



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П.к. $ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}; ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$

$\Rightarrow abc: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$, но $abc: ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \Rightarrow$

$\Rightarrow abc: 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow \min(abc) = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Пример. ма $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{22}$

$b = 2^3 \cdot 3^7$

$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27}$

$bc = 2^{12} \cdot 3^{21} \cdot 5^{17}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$

$ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{22}$

} все уравнения
выполнены

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle ACD = 5\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BCD = 2\alpha \Rightarrow AB = 4a$$

$$1 = \cos(\angle CAB) : \cos(\angle CAD) =$$

$$= \frac{CA}{AB} : \frac{AD}{CA} = \frac{CA^2}{35a^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{35}a \Rightarrow \text{по } \Delta \text{ Пифагора } BC = \sqrt{14}a \Rightarrow CD = \sqrt{10}a$$

$$\angle CBF = \angle FBE = \angle EBA \quad (II)$$

(касательные)

$$\left. \begin{array}{l} \angle BCD = \angle CAB \text{ (по } \angle \text{ условиям)} \\ \angle CAB = \angle CEF \text{ (II)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta BFC \sim \Delta BEA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CFE = \angle A \Rightarrow \frac{CF}{EA} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow EA = \frac{4}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} y = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{10}} y$$

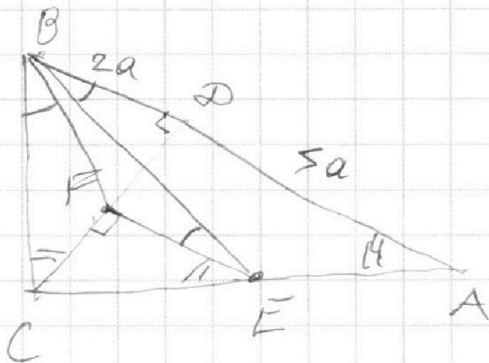
$$\Delta CFE \sim \Delta CDA \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{\frac{35}{10}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{35}{10}} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC = EA \Rightarrow FE - \text{выс. } \Delta ACD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CAD} = \frac{1}{4} CD \cdot AD = \frac{\sqrt{10} \cdot 5a^2}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35} a^2}{2} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{4 \cdot 4}{5} =$$

$$= 5,6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos(x)) = 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

$$\forall k. 10 \arcsin(\dots) \in [-5\pi; 5\pi] \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$\begin{cases} 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 5\pi - 10x + 20\pi k_1 \\ 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 5\pi + 10x + 20\pi k_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\pi + 20\pi k_1 = 12x \\ 4\pi + 20\pi k_2 = -8x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \pi + 5\pi k_1 \\ 2x = -\pi + 5\pi k_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \underbrace{-\frac{4}{3}\pi}_{(k=-1)}, \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{(k=0)}, \underbrace{2\pi}_{(k=1)} \right\} \cup \left\{ \underbrace{-2\pi}_{(k=-1)}, \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{(k=0)}, \underbrace{3\pi}_{(k=1)} \right\} \Rightarrow$$

⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, 2\pi, 3\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

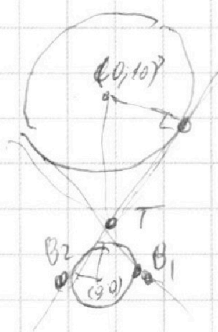
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} & \text{— прямая} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 10^2 - 64 = 6^2 \end{cases} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{решений} \leq 4 \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \text{— две окружности с}$$

центрами $O_1(0; 0)$ и $O_2(0; 10)$ и радиусами $r=1$ и $R=6$. $\Rightarrow T$ — точка пересеч. двух касательных $\Rightarrow T(0; \frac{10 \cdot r}{R+r}) = (0; \frac{10}{7}) \Rightarrow \text{т.к.}$



Лемма: Если система

имеет ~~ровно~~ 4 корня, то \Leftrightarrow

$$\text{и } \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{10}{7} & \text{— (прямая, проходящая через } T) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1^2 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases} \end{cases} \text{, тоже 4 корня}$$

Док-во:

1) \Leftarrow : подставим $b = \frac{10}{7} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow$ получим 4 корня

2) \Rightarrow :] Это не так. Тогда система из леммы имеет либо 2 корня (прямая будет касательной), либо 0 корней. Если $b > \frac{10 \cdot 3}{7 \cdot 4}$, то прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ не пересечет ни одну окружность! И, если $b < \frac{10 \cdot 3}{7 \cdot 4} \Rightarrow$ прямая не пересечет верхней окружности $\Rightarrow \text{н.} \Rightarrow$ лемма доказана

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



B_1, B_2 - точки касания r из $T \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1$ пересечения O_x с касательными

из T к окр. с радиусом $r=1. \Rightarrow$

$$B_1 \left(\frac{10}{4} \cdot \frac{7}{\sqrt{51}}; 0 \right) = B_1 \left(\frac{10}{\sqrt{51}}; 0 \right); B_2 \left(-\frac{10}{\sqrt{51}}; 0 \right) \Rightarrow$$

\Rightarrow прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{10}{4}$ пересекает отрезок

$$[B_1, B_2]. (\exists \text{ в точке } x_0) \Rightarrow y=0 = \frac{a}{3}x_0 + \frac{10}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-30}{4a} \quad (\text{т.к. } x_0 \text{ - окр.} \Rightarrow a \neq 0) \quad (\text{при } a=0, \text{ было}$$

$$0 \text{ корней}) \Rightarrow \frac{1}{4a} \in \left[-\frac{1}{3\sqrt{51}}; \frac{1}{3\sqrt{51}} \right] \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{3\sqrt{51}}{4} \right) \cup$$

$$\left(\frac{3\sqrt{51}}{4}; +\infty \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (\log_5(2x))^4 - 3\left(\frac{1}{\log_5(2x)}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\log_5(2x)}\right) - 3 \\ (\log_5(y))^4 + 4\left(\frac{1}{\log_5(y)}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\log_5(y)}\right) - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} O \neq 3: \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x + \frac{1}{x} \\ y + \frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \log_5(2x) \\ b = \log_5(y) \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{5^{(a+b)}}{2}$$

$$\begin{cases} a^5 - \frac{13}{3} + 3a = 0 \\ b^5 + \frac{13}{3} + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(3 + a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0$$
$$\downarrow$$
$$a^5 + b^5 + 3a + 3b = 0$$

$f(x) = x^5 + 3x$ — монотонно-возрастающая функция
 \Rightarrow корнем при фиксированном b уравнения
 $f(a) = -b^5 - b$ является 1 . А корнем y равно
 $a = -b \Rightarrow a$ всегда $= -b \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$. (тогда xy существует, т.к.
 $f(a) = \frac{13}{3}$ — имеет корень (между 1 и 2) \Rightarrow
 \rightarrow существуют x, y)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что
прямые $y = -5x + k$,
где $k \in \mathbb{Z}$ проходят
либо через 0 точек, либо
через $\neq 4$ ~~точек~~ точек \in , либо через $\neq 6$ точек
цел. координатами внутри $\#$, т.к.
 $y = -5x + k$ в стороне $\#$. Рассмотрим
полюса - то точку $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ на прямой
выра $-5x + k = y$, тогда для всех x есть точка
выра $45 + 5x + y = 45 + k = \text{const} \Rightarrow$ для
точек лежащих на прямой $y = -5x + k$,
любые точки (x_1, y_1) лежат на прямой
 $y = -5x + k_1 + 45 \Rightarrow k_1 \in [0; 45]; k_1 \neq 5, 10, \dots$
Для прямой лемма $\neq 4$ точка $\in \Rightarrow k: 5 \Rightarrow$
кол-во пар $(x_1, y_1), (x_2, y_2) = (\text{кол-во } k: 5) \cdot 86^2 +$
 $\text{кол-во } (k: 5) \cdot 86^2 = 86^2 \cdot 36 + 10 \cdot 86^2 \cdot 17^2 = 12106$
P.S. прямая будет иметь $\neq 4$ точку (при $k: 5$), т.к.
будут точки на сторонах $\#$ // оси O_x , а
в осн. смч. $(k: 5)$ будут 46 точек, т.к. $y_i - y_j = 5 \cdot ((x_i + 16) - x_i) = 80$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) Рассмотрим плоскость ASA_1

Положим:

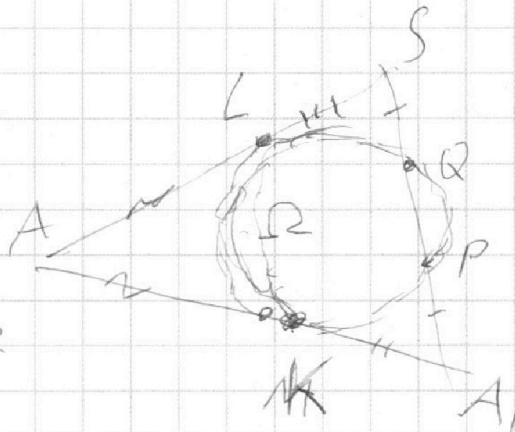
$$A_1P = SQ$$

$$A_1Q = PS$$

$$A_1P \cdot A_1Q = SQ \cdot SP = SL^2$$

|| (сечение
2 точки A
от Ω)
 A_1M

(сечение
точки S
от Ω)
 AK



$$\Rightarrow LS = MA_1;$$

$AL = AK$ - (касательные из A к Ω) \Rightarrow

$$\Rightarrow AS = AA_1 = BC = 16$$

Рассмотрим плоскость $A\theta E$

$$\vec{m} = 2 \vec{AA'} \Rightarrow |\vec{m}| = 32 \quad \vec{CC'} = \frac{-\vec{m} - 3\vec{n}}{4}$$

$$\vec{n} = \vec{CB} \Rightarrow |\vec{n}| = 16 \quad \vec{BB'} = \frac{-\vec{m} + 3\vec{n}}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 \cdot \sin(\angle AA_1B) = 8 \cdot 16 \cdot \sin(\angle AA_1B) = 100$$

$$\Rightarrow \cos(\angle AA_1B) = \frac{\sqrt{399}}{32} \Rightarrow CC'^2 + BB'^2 = (13 \cdot 16 + \frac{3}{4} \sqrt{399}) / 6$$

$$= (13 \cdot 16 - \frac{3}{4} \sqrt{399}) / 6 = 41664 - \frac{9}{4} \cdot 399 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{40764 + \frac{9}{4}} \cdot 16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

д) Рассмотрим плоскость ASN

$\Rightarrow NS = SL$ (т.к. касательная)

Из мы знаем, что

$$SL = AK.$$

Тогда центр Ω

лежит на плоскости $\perp SA$, и проходящей

через середину (т.к. степени точек A , и S

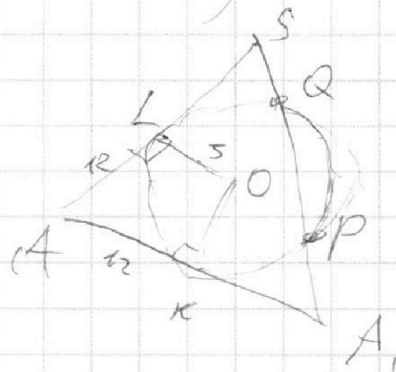
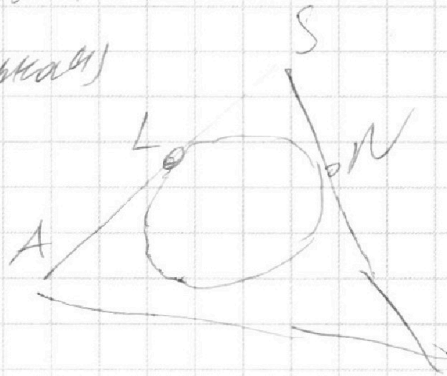
равны); лежит на \perp из K (от плоскости ABC);

~~лежит~~ $\Rightarrow O$ -центр $\Omega \in (SAA_1)$

$$AK = AA_1 - AK = 12$$

Ω - основание высоты

из A на BC



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

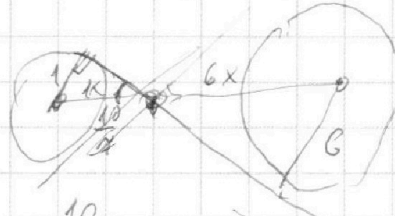
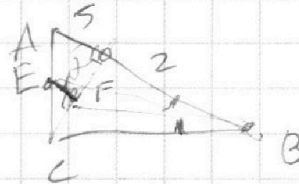


$$ab \cdot bc \cdot ac = (2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^6)^2 =$$

$$17 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5$$

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5$$



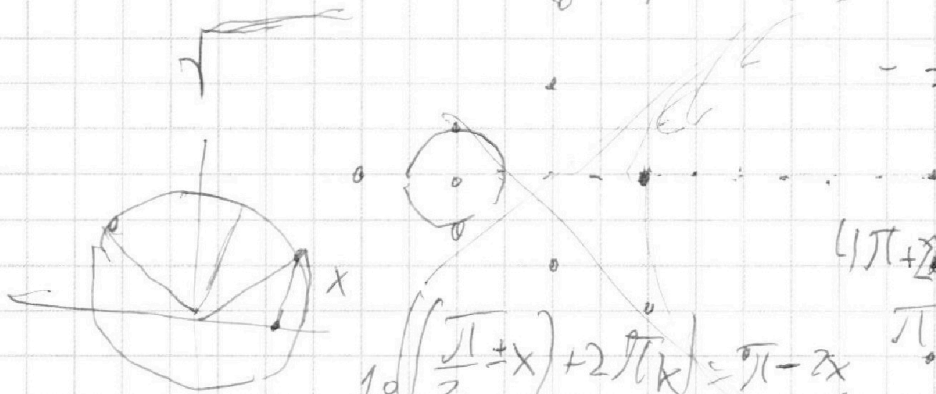
$$\frac{10}{4}$$

$$\frac{7}{10}$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{9}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$x^3(y-10)^2 = 6^2$$

$$-\frac{\pi}{2}$$



$$\begin{cases} \pi + 2\pi k = -12x \\ 8x \end{cases}$$

$$\pi + 5\pi k = \begin{cases} -3x \\ 2x \end{cases}$$

$$\pi - \frac{\pi}{2}x = y = kx + d$$

$$= \frac{\pi}{3} + x$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^4 = 3a = \frac{4}{3}a - 3 \quad \frac{10}{15\pi}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^4 = 4a = \frac{1}{3}a - 3$$

$$B + 3B = \frac{213}{3}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{13}{3}a - 3$$

$$A + 3A = \frac{13}{3}$$

$$x \in [-2\pi, 3\pi]$$

