МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $ab \vdots 2^{8}\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$, $bc \vdots 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$, $ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac = (abc)^2 \vdots 2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68}$

$\Rightarrow abc \vdots 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$, но $abc \vdots ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39} \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \vdots 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39} \Rightarrow \min(abc) = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

Пример на $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

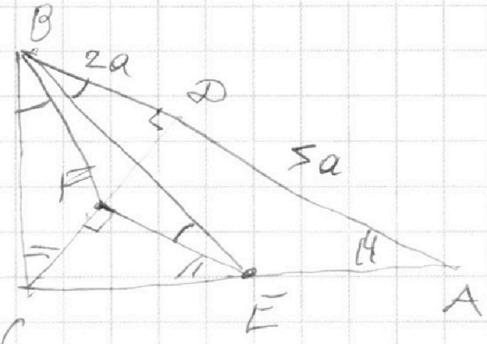
$$\left.\begin{aligned} a &= 2^{5}\cdot 3^{8}\cdot 5^{22} \\ b &= 2^{3}\cdot 3^{7} \\ c &= 2^{9}\cdot 3^{14}\cdot 5^{17} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} bc &= 2^{12}\cdot 3^{21}\cdot 5^{17} \\ ac &= 2^{14}\cdot 3^{22}\cdot 5^{39} \\ ab &= 2^{8}\cdot 3^{15}\cdot 5^{22} \end{aligned}\right\} \text{все условия выполнены}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\exists\ AD = 5a \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = 2a \Rightarrow AB = 7a$

$1 = \cos(\angle CAB) : \cos(\angle CAD) =$

$= \dfrac{CA}{AB} : \dfrac{AD}{CA} = \dfrac{CA^2}{35a^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow CA = \sqrt{35}\, a \Rightarrow$ по Т Пифагора $BC = \sqrt{14}\, a \Rightarrow CD = \sqrt{10}$

$\angle CBF = \angle FBE = \angle EBA$ (II)

(касательн.)

$\left.\begin{array}{l}\angle BCD = \angle CAB \text{ (по 2 углам)} \\ \angle CAB = \angle CEF \text{ (II)}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BFC \sim \triangle BEA \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ CF = y \Rightarrow \dfrac{CF}{EA} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow EA = \cancel{\dfrac{7}{\sqrt{14}} y}\ \sqrt{\dfrac{7}{2}}\, y$

$\triangle CFE \sim \triangle CDA \Rightarrow \dfrac{CE}{CF} = \dfrac{CA}{CD} = \sqrt{\dfrac{7}{2}} \Rightarrow EC = \sqrt{\dfrac{7}{2}}\, y \Rightarrow$

$\Rightarrow EC = EA \Rightarrow FE$ — сред. линия в $\triangle ACD \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{CEF} = \dfrac{1}{4} S_{CAD} = \dfrac{1}{8} CD \cdot AD = \dfrac{\sqrt{10} \cdot 5}{8} a^2$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AC = \dfrac{7\sqrt{10}}{2} a^2 \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \dfrac{7 \cdot 4}{5} =$

$= 5{,}6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10 \arcsin(\cos(x)) = 10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$

т. к. $10 \arcsin(\ldots) \in [-5\pi; 5\pi] \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$

$$\left[\begin{array}{l} 10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 5\pi - 10x + 20\pi k_1 \\ 10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 5\pi + 10x + 20\pi k_2 \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4\pi + 20\pi k_1 = 12x \\ 4\pi + 20\pi k_2 = -8x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \pi + 5\pi k_1 \\ 2x = -\pi + 5\pi k_2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x \in \left\{-\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\} \cup \left\{-2\pi; \frac{-\pi}{2}; -3\pi\right\} \Rightarrow$$

$(k=-1)$ $(k=0)$ $(k=1)$ $(k=-1)$ $(k=0)$ $(k=1)$

$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$

Ответ: $x \in \left\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{3}\pi; \cancel{\frac{2}{3}\pi}\ 2\pi\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

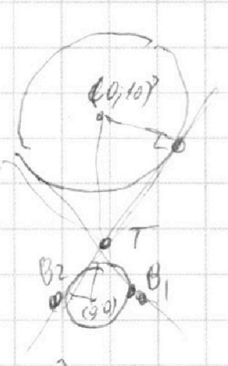
$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} & \text{- прямая} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2 = 10^2-64 = 6^2 \end{array}\right. & \text{- две окружности с} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ решений ≤ 4

центрами $O_1(0;0)$ и $O_2(0;10)$ и радиусами $r=1$ и $6=R$ $\Rightarrow$ T - точка пересеч. внутр. касательных $\Rightarrow T\left(0; 10\cdot\frac{r}{R+r}\right) =$

$= \left(0; \frac{10}{7}\right) \Rightarrow$ т.к

рис.



Лемма: Если система имеет ~~ровно~~ 4 корня, то $\Leftrightarrow$

и $\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{10}{7} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1^2 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right. \end{cases}$ - (прямая, проходящая через T), тоже 4 корня

Док-во:

1) $\Leftarrow$: поставим $b = \frac{10}{7}\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow$ получим 4 корня

2) $\Rightarrow$: $\exists$ это не так. Тогда система из леммы имеет либо 2 корня (прямая будет касательной), либо 0 корней. Если $b > \frac{10}{7}\cdot\frac{3}{4}$, то прямая $y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ - не пересекает нижнюю окружность !!! Если $b < \frac{10}{7}\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow$ прямая не пересекает верхнюю окружность $\Rightarrow$!!! $\Rightarrow$ лемма доказана

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

B_1; B_2 — точки ~~касания~~ r из T =>

=> ~~B_1~~ пересечения O_x с касательными из T к окр. с радиусом $r=1$. =>

$B_1\left(\frac{10}{7}\cdot\frac{7}{\sqrt{51}};0\right)=B_1\left(\frac{10}{\sqrt{51}};0\right)$, $B_2\left(-\frac{10}{\sqrt{51}};0\right)$ =>

=> прямая $y=\frac{a}{3}x+\frac{10}{7}$ пересекает отрезок $[B_1B_2]$. ($\exists$ в точке x_0) => $y=0=\frac{a}{3}x_0+\frac{10}{7}$ =>

=> $x_0=\frac{-30}{7a}$ ~~(т.к. x_0 огр. => $a\neq 0$)~~ (при $a=0$, было 0 корней) => $\frac{1}{7a}\in\left[-\frac{1}{3\sqrt{51}};\frac{1}{3\sqrt{51}}\right]$ => $a\in\left(-\infty;-\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)\cup$

$\cup\left(\frac{3\sqrt{51}}{7};+\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} (\log_5(2x))^4 - 3\left(\frac{1}{\log_5(2x)}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\log_5(2x)}\right) - 3 \\ (\log_5(y))^4 + 4\left(\frac{1}{\log_5(y)}\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{\log_5(y)}\right) - 3 \end{cases}$$

ОДЗ:
$x > 0$
$y > 0$
$x \neq \frac{1}{2}$
$y \neq 1$

$$\left.\begin{matrix} a = \log_5(2x) \\ b = \log_5(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow xy = \frac{5^{(a+b)}}{2}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a^5 - \frac{13}{3} + 3a = 0 \\ b^5 + \frac{13}{3} + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(3 + a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0$$

$\Downarrow$

$$a^5 + 3a + b^5 + 3b = 0$$

$f(x) = x^5 + 3x$ – монотонно возрастающая функция $\Rightarrow$ корней при фиксированном b у уравнения $f(a) = -b^5 - b$ не более 1. $\exists$ корень у него $a = -b \Rightarrow a$ всегда $= -b \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow$

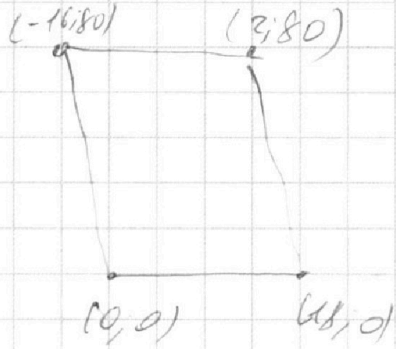
$\Rightarrow xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$. (также xy сущест., т.к $f(a) = \frac{13}{3}$ – имеет корень (между 1 и 2) $\Rightarrow$ существуют x и y)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Заметим, что прямые $y=-5x+k$, где $k\in\mathbb{Z}$ проходят либо через 0 точек, либо через ~~17~~ 17 ~~одну~~ точку, либо через 16 точек цел. координатами внутри #, т.к. $y=-5x+k$ ∥ стороне #. Рассмотрим какую-то точку ($x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$) на прямой вида $-5x+k=y$, тогда для всех ее точек выполнено $45+5x_i+y_i=45+k=const$ ⇒ Для точек лежащих на прямой $y=-5x+k_1$ парные точки $(x_2;y_2)$ лежат на прямой $y=-5x+k_1+45$ ⇒ $k_1\in[0;45]$, ~~$k\vdots5$, т.к.~~

На прямой лежит 17 точка ⇔ $k\vdots5$ ⇒ кол-во пар $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ = (кол-во $k\not\vdots5$)$\cdot16^2$ + кол-во($k\vdots5$)$\cdot17^2$ $=16^2\cdot36+10\cdot17^2=12106$

P.S. прямая будет иметь 17 точку (при $k\vdots5$), т.к. будут точки на сторонах # ∥ оси O_x, а в ост. случ. ($k\not\vdots5$) будет 16 точек, т.к. $y_{i_1}-y_{i_{17}}=5\cdot((x_i+16)-x_i)=80$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

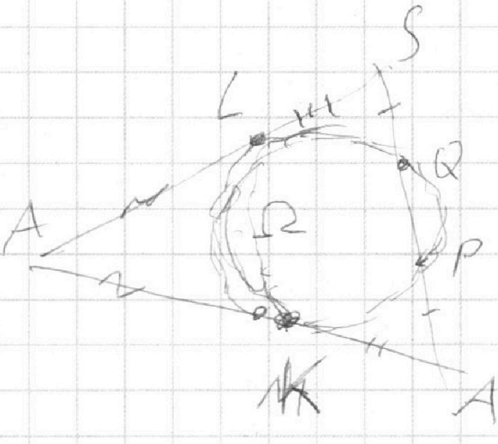
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

а) Рассмотрим плоскость ASA_1

Тогда:



$A_1P = SQ$

$A_1Q = PS$

$\Downarrow$

$A_1P \cdot A_1Q = SQ \cdot SP = SL^2$ (степень точки S от Ω)

$\| $

A_1K^2 (степень точки A от Ω)

$\Rightarrow LS = KA_1$;

$AL = AK$ - (касательные из A к Ω) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AS = AA_1 = BC = 16$

Рассмотрим плоскость ABC

$\bar{m} = 2\,\overline{AA'} \Rightarrow |\bar{m}| = 32$

$\bar{n} = \overline{CB} \Rightarrow |\bar{n}| = 16$

$\Rightarrow \overline{CC'} = \frac{-\bar{m} - 3\bar{n}}{4}$, $\overline{BB'} = \frac{-\bar{m} + 7\bar{n}}{4}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 \cdot \sin(\angle AA_1B) = 8 \cdot 16 \sin(\angle AA_1B) = 100$

$\Rightarrow \cos(\angle AA_1B) = \frac{\pm\sqrt{399}}{32} \Rightarrow CC_1^2 \cdot BB_1^2 = (13 \cdot 16 + \frac{3}{4}\sqrt{399}) \cdot 16$

$\cdot (13 \cdot 16 - \frac{3}{4}\sqrt{399}) = 41664 - \frac{9}{4} \cdot 399 \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{40764 + \frac{9}{4}} \cdot 16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 ☒

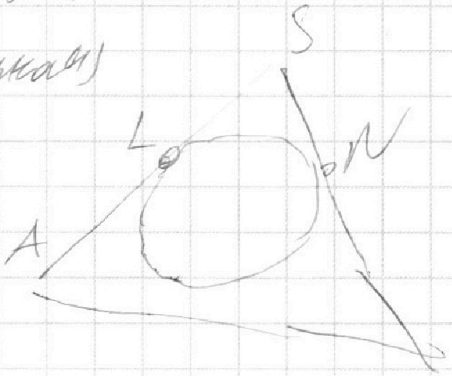
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) Рассмотрим плоскость ASN

$\Rightarrow NS = SL$ (т.к. касательная)

~~Из~~ Мы знаем, что

$SL = A_1K$.



Тогда центр Ω

лежит на плоскости $\perp SA_1$ и проходящей

через середину (т.к. степени точек A_1 и S

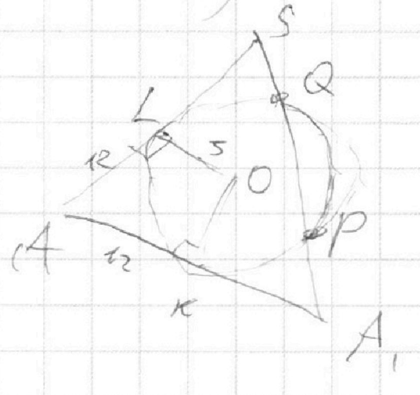
равны); лежит на $\perp$ из K (от плоскости ABC);

~~лежит~~ $\Rightarrow O$ - центр $\Omega \in (SAA_1)$

$AK = AA_1 - A_1K = 12$

Пусть H - основание высоты

из A на BC



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(\overline{c}+\overline{b})^2 = 4\cdot 16^2$

$(\overline{c}-\overline{b})^2 = 16^2$

$\overline{AC} \pm \overline{AB}$

$(AC+AB)^2 = 4(AC-AB)^2 =$

$= 3AC^2 + 3AB^2 = (10\cos())AB\cdot AC$

$AC^2 + AB^2 = \frac{10}{3}\cos()AB\cdot AC$

$16^2 = 2^8 = 256$

2890

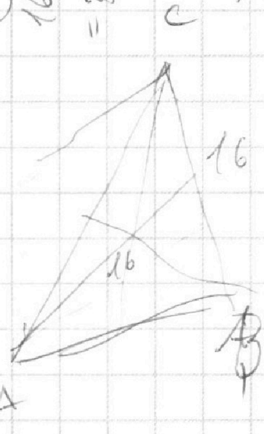
$16+17 = 33$

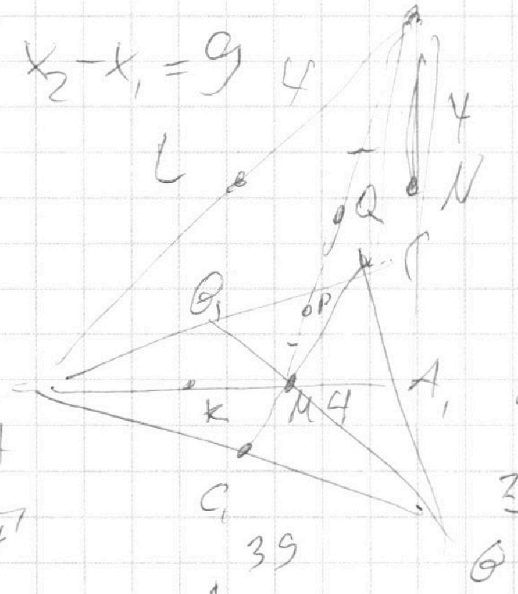
$16 \cdot 8 = 208$

$\overline{c} - \frac{\overline{c}+\overline{b}}{2}$

$\frac{25}{32}$

$4\cdot 8 = 32$





$x_2 - x_1 = 9$

$\frac{-\overline{c}+\overline{b}+\overline{c}}{2}$

$\left(\frac{\overline{b}}{2}-\overline{c}\right)^2 +($

$\sin(\alpha)$

$\cos(\angle AA_1B) = \frac{32^2-25^2}{32^2}$

$\sqrt{17\cdot 57}$

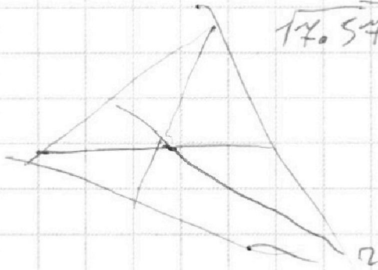
$2b-4c$

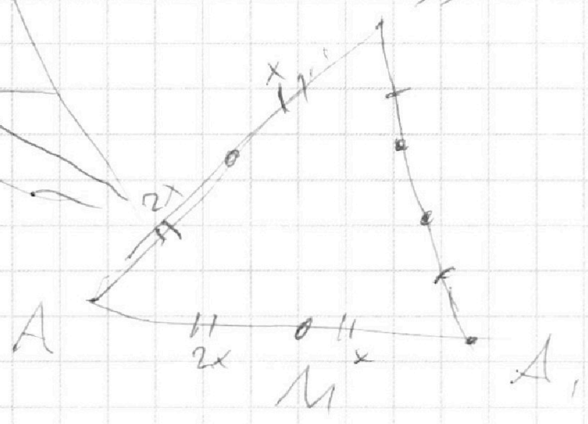
$\frac{2m-3(m+n)}{4} =$

$= \frac{-m-3n}{4}$

$\frac{-m+3n}{4}$

$(200+8)^2 = 40000+1600+64 = 41664$





$\frac{m^2+9n^2-8\cos()mn}{16} =$

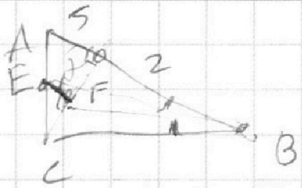
$= 18n + 24\cos()n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

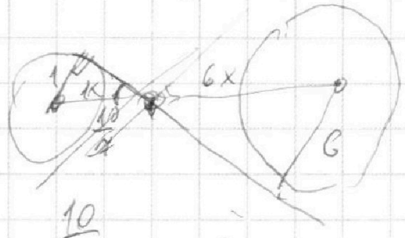
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$ab \cdot bc \cdot ac : (2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}) =$

$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$



$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$

$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5$

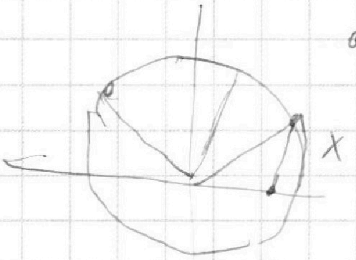
$\frac{10}{7}$

$\frac{7}{10}$

$x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

$x^3 (y-10)^2 = 6^2$

$-\frac{\pi}{2}$



$(4\pi + 2)\pi k = \left[\begin{matrix}-12x \\ 8x\end{matrix}\right.$

$\pi + 5\pi k = \left[\begin{matrix}-3x \\ 2x\end{matrix}\right.$

$\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\pi k = \pi - 2x$

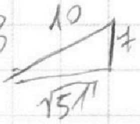
$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$y = kx + d$

$= \frac{\pi}{2} + x$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$

$\left(\frac{1}{a}\right)^4 + 3a = \frac{4}{3} a - 3$



$b^5 + 3b = \frac{-13}{3}$

$\left(\frac{1}{b}\right)^4 + 4b = \frac{-1}{3} b - 3$

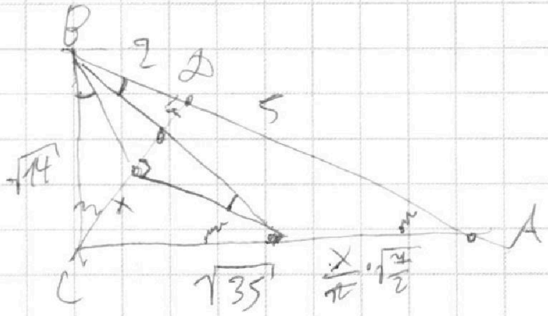
$\frac{1}{a^4} = \frac{13}{3} a - 3$

$A^5 + 3A = \frac{13}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

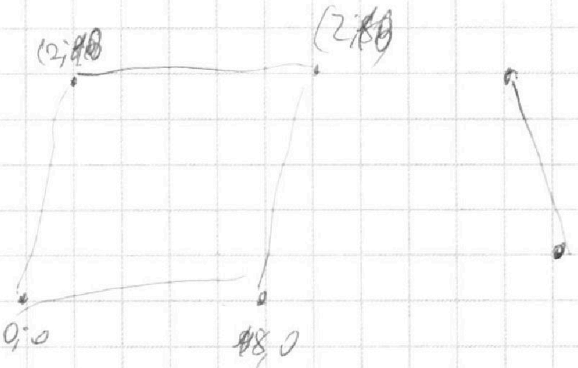
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$5x+y=43$

$CD=\sqrt{10}$



$y=-5x+k$