МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1. Решение:

1. $a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$ — разложим a, b, c на множители, т.к. ищем abc наименьшее, то другие множители, отличн. от $2, 3, 5$ не рассматриваем

$b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_3}$

Тогда: $\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 8 \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 12 \\ \alpha_1+\gamma_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$

т.к. $ab \,\vdots\, 2^8$, $bc \,\vdots\, 2^{12}$, $ac \,\vdots\, 2^{14}$

Аналогично, $\begin{cases} \alpha_2+\beta_2 \geq 14 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 20 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2} = 27{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq 28$, т.к. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — натур. или 0.

$\begin{rcases} \alpha_3+\beta_3 \geq 12 \\ \beta_3+\gamma_3 \geq 17 \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 39 \end{rcases} \Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 34$, но $\alpha_3+\gamma_3 \geq 39 \Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 39$

Значит, $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \geq$

$\geq 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$ — оценка.

Пример:

$a = 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{12}$

$b = 2^3\cdot 3^7\cdot 5^0$

$c = 2^9\cdot 3^{13}\cdot 5^{27}$

$abc = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

$\Rightarrow$

$ab = 2^8\cdot 3^{15}\cdot 5^{12}$ (+)

$bc = 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{27}$ (+)

$ac = 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$ (+)

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$.

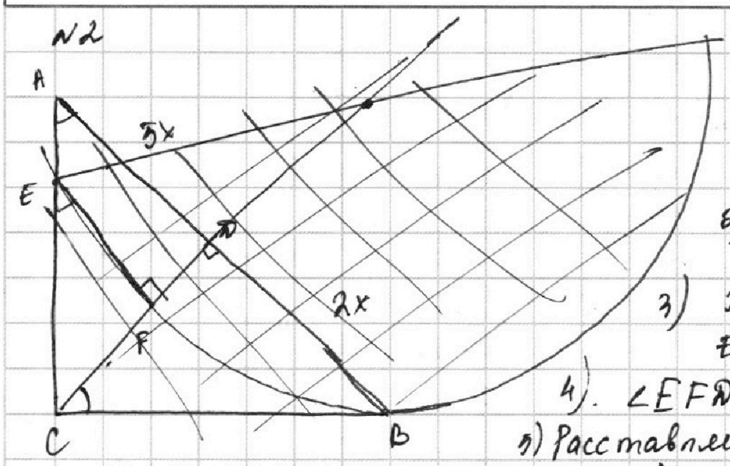
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Решение:

1). В $\triangle ABC$:

$AC^2 = AD \cdot AB = 5x \cdot 7x = 35x$

$\Rightarrow AC = \sqrt{35}\, x$

2) $CB^2 = BD \cdot BA = 2x \cdot 7x = 14x \Rightarrow$

$\Rightarrow CB = \sqrt{14}\, x$

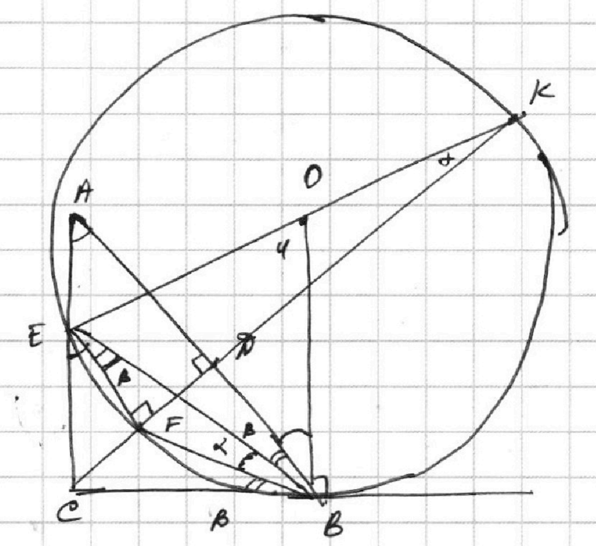
3) Т.к. $AB \parallel EF$, ~~то~~ и $CD \perp AB$, то $EF \perp CD$

4). $\angle EFD = 90^\circ \Rightarrow EK$ - диаметр.

5) Расставляем углы: $\angle FEB = \angle EBA = \beta$ (накр. леж. углы) ; $\angle CBF = \angle FEB = \beta$ (лежат на одной дуге)

$\angle EOB = \varphi$, тогда $\alpha = \dfrac{\varphi - 2\beta}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = \varphi - 2\beta$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow 10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x)) = \pi - 2x.$

1. $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x - \pi k \le \frac{\pi}{2}$; – по определению arcsin, $k \in \mathbb{Z}$

$-\pi \le -x - \pi k \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x + \pi k \le \pi \Leftrightarrow -\pi k \le x \le \pi - \pi k$

2. $10\left(\frac{\pi}{2} - x - \pi k\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi - 10x - 10\pi k = \pi - 2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8x = 4\pi - 10\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4}$

$-\pi k \le \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4} \le \pi - \pi k \Leftrightarrow -k \le \frac{1}{2} - \frac{5k}{4} \le 1 - k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -k - \frac{1}{2} \le -\frac{5k}{4} \le \frac{1}{2} - k \Leftrightarrow k - \frac{1}{2} \le \frac{5k}{4} \le k + \frac{1}{2}$

1.) $k - \frac{1}{2} \le \frac{5k}{4} \Leftrightarrow \frac{k}{4} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k \geq -2$

2) $k + \frac{1}{2} \geq \frac{5k}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{k}{4} \Rightarrow k \le 2$

$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$

$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi\cdot(-2)}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 3\pi;$

$x_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi(-1)}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} = \frac{7\pi}{4};$

$x_3 = \frac{\pi}{2};$

$x_4 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{2\pi - 5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4};$

$x_5 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi\cdot 2}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} = -2\pi$

Ответ: $\{-2\pi; -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; 3\pi\}.$

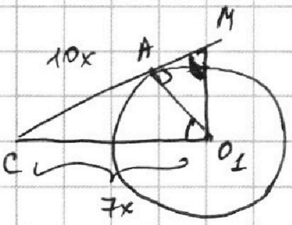
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\triangle AO_1M \sim \triangle BO_2M \Rightarrow \dfrac{AO_1}{BO_2} = \dfrac{O_1M}{O_2M} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow O_1M = \dfrac{10}{7}$, $MO_2 = \dfrac{60}{7}$

$\triangle AO_1M \sim \triangle O_1CM \Rightarrow \dfrac{AO_1}{O_1C} = \dfrac{MO_1}{MC} \Rightarrow \dfrac{1}{O_1C} = \dfrac{\frac{10}{7}}{MC} \Rightarrow \dfrac{MC}{O_1C} = \dfrac{10}{7}$



$MO_1 = \sqrt{100x^2 - 49x^2} = \sqrt{51}\,x$

$k = \dfrac{MO_1}{CO_1} = \dfrac{\sqrt{51}\,x}{7x} = \dfrac{\sqrt{51}}{7}$

в силу симметрии

Значит $\dfrac{a}{3} \in \left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

$a \in \left(-\infty; -\dfrac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\dfrac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

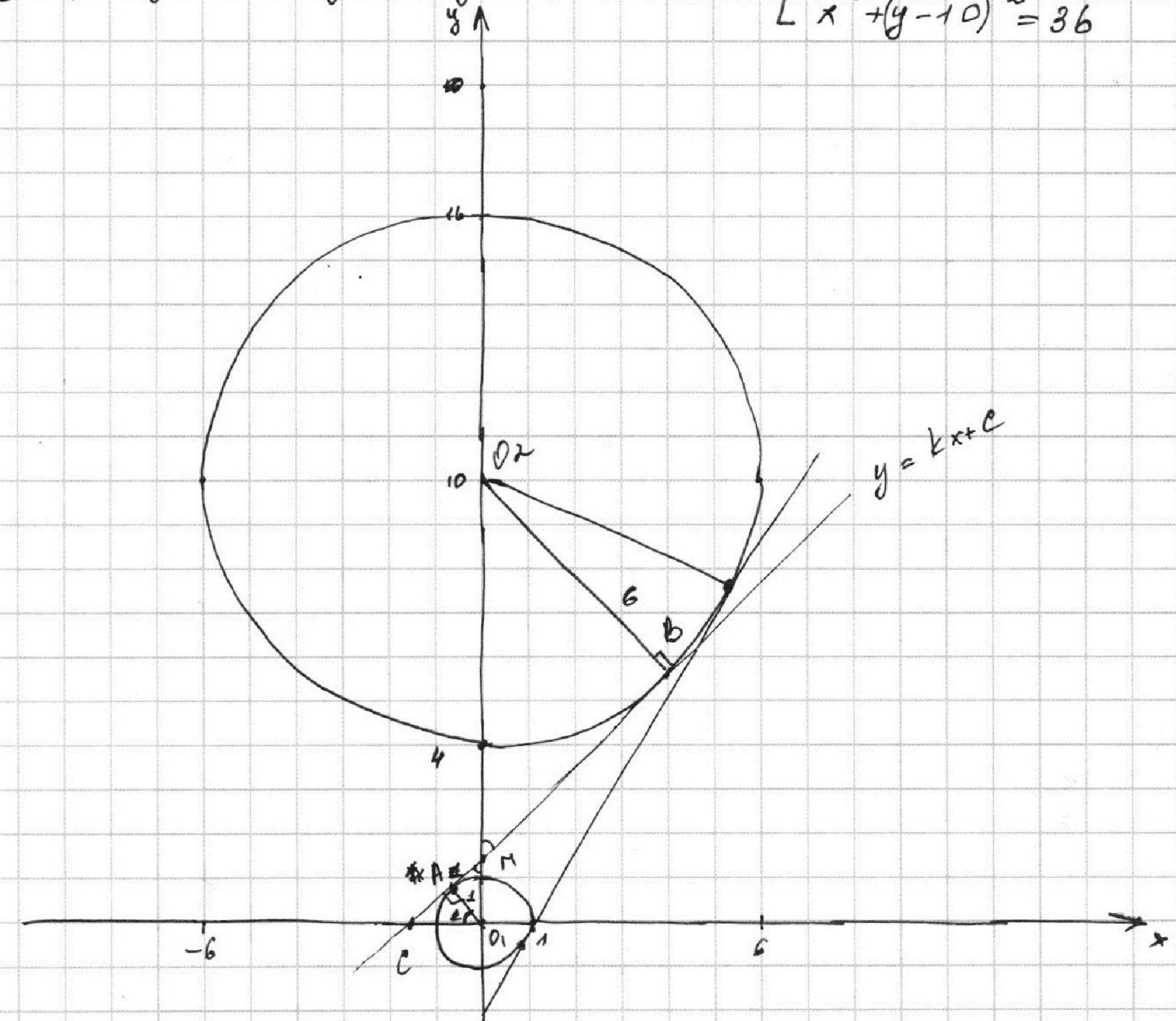
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4. $\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (2) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 & (1) \end{cases}$

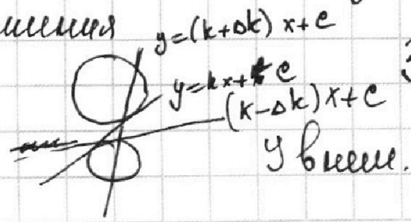
Решение:

(1). $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right.$



(2) $ax - 3y + 4b = 0 \iff 3y = ax + 4b \iff y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3}$

3. Проводим общую внутреннюю касательную. ; $y = kx + c$
Заметим, что, если k увеличить, то система будет иметь 4 решения



Значит, гранич. случай — внутр. касат.

У внеш. касательной угол наклона больше.

№5. $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

1) Замена: $t = \log_5 2x$; $\log_{8x^3}625 = \log_{8x^3}5^4 = \log_{2x}5^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\log_{2x}5$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3 \Leftrightarrow t^4 - \frac{9+4}{3t} + 3 = 0 \Leftrightarrow t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0$ (*) 1

2) $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$; Замена $m = \log_5 y$

$m^4 + \frac{4}{m} = -\frac{1}{3m} - 3 \Leftrightarrow m^4 + \frac{12+1}{3m} + 3 = 0 \Leftrightarrow m^4 + \frac{13}{3m} + 3 = 0$ (*) 2

$\log_{y^3}0{,}2 = \log_{y^3}\frac{1}{5} = \log_{y^3}5^{-1} = -\frac{1}{3}\log_y 5$

3) (*) 1: $t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$
(*) 2: $m^5 + 3m + \frac{13}{3} = 0$ $\Big\} \Rightarrow t^5 + m^5 + 3t + 3m = 0$.

$(t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4) + 3(t+m) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 3) = 0$.

1. $t + m = 0$
2. $t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 3 = 0 \Leftrightarrow t^3(t-m) - m^3(t-m) + t^2m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-m)(t^3 - m^3) + t^2m^2 + 3 = 0$ Но:

$\underbrace{(t-m)^2}_{\geq 0}\underbrace{(t^2 + tm + m^2)}_{\geq 0} + \underbrace{t^2m^2}_{\geq 0} + 3 \geq 3$ - ра-во (2) невозможно.

4) $t + m = 0 \Leftrightarrow \log_5(2x) + \log_5 y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5(2xy) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$

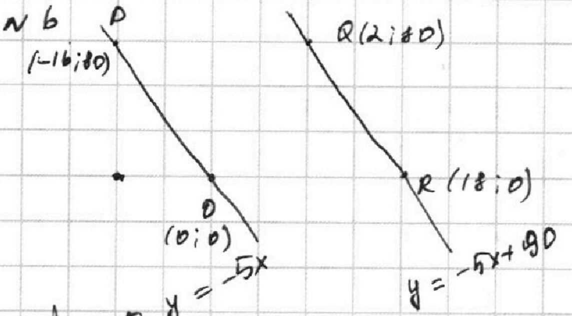
Ответ: 0,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



Решение:

1) Критерий того, что $A(x;y)$ принадл. ~~на~~ $PQRO$:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 80 \\ -5x \le y \\ y \le -5x+90. \end{cases}$$

2) Будем рассматр. точки, принадл. прямой, вида $y = -5x + c$; $c \in \{0; 1; \dots; 90\}$.

3) Тогда, пусть $A \in m$; $m: y = -5x+c$; $A(x_1; y_1)$
$B(x_2; y_2)$: $5x_2 + y_2 = 45 + 5x_1 + y_1 = 45 + 5x_1 - 5x_1 + c = 45 + c$,
тогда $y_2 = 45 + c - 5x_2$ и т.к. $B \in PQRO$, то
B лежит на одной из прямых $y = -5x + c$, $c \in \{0; 1; \dots; 90\}$

4) Тогда
$$\begin{cases} 0 \le 45 + c - 5x_2 \le 80 \\ 0 \le 45 + c \le 90 \\ 0 \le c \le 90 \end{cases} \Rightarrow$$
1. $c \in \{0; 1; \dots; 45\}$
2. ~~$-45-c \le -5x_2 \le 35-c$~~
~~$c-35 \le 5x_2 \le 45+c$~~

5) Значит, для каждой точки $A(x_1; y_1)$, что $y_1 = -5x_1 + c$, найд. ~~такая~~ ~~и~~ такая точка B.

6) Найдем кол-во точек, принадл. прямой $y = -5x + c$ и $PQRO$. На примере отрезка PO: $x \in [-16; 0]$ – 17 точек, т.к. $x \in \mathbb{Z}$.

7) Если есть A, то ей подойдут 17 точек B, лежащих на $y = 45 + c - 5x_2$

8) Прямых, где может располагаться точка A: $y = -5x + 90$ … $y = -5x + 45$
→ 46 прямых

Значит, суммарно пар:

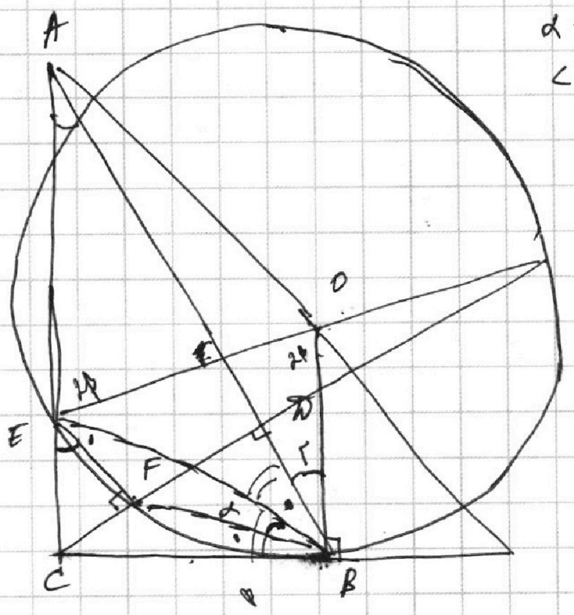
$$\underbrace{17}_{\text{точек A на 1 прямой } y=-5x+c} \cdot \underbrace{17}_{\text{точек B, подх. A}} \cdot \underbrace{46}_{\text{прямые, где распол. точка A}} = 13294$$

Ответ: 13294.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\alpha = 2\beta - 2\bullet$

$\angle CBO : 2\beta + \Gamma = 90^\circ.$

$\alpha = \cancel{\beta} \cancel{90-}$

$\alpha = 2\beta - 2\bullet$

$90 - \alpha - \beta.$

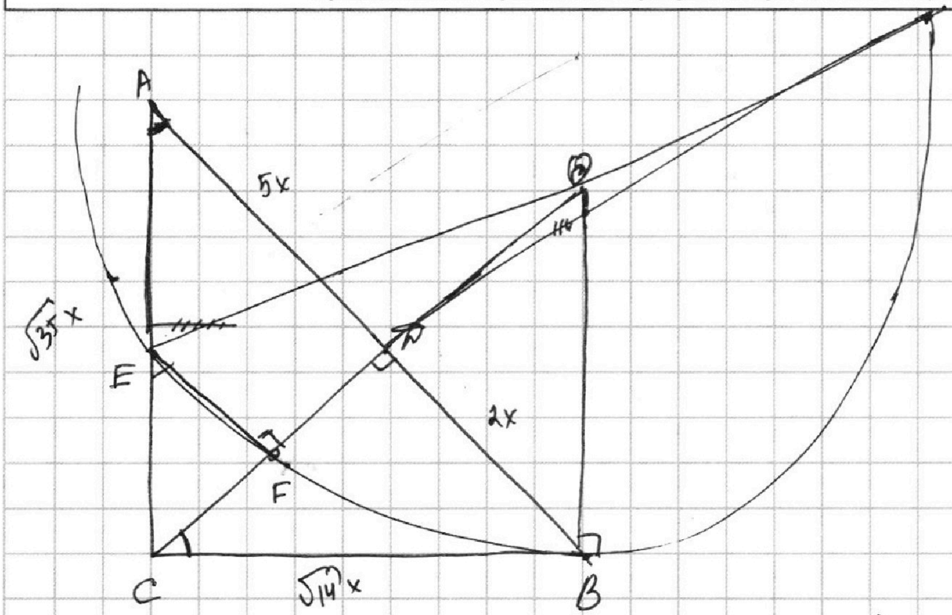
$4 - \alpha = 2\alpha + 2\beta - \alpha =$

$= \alpha + 2\beta.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

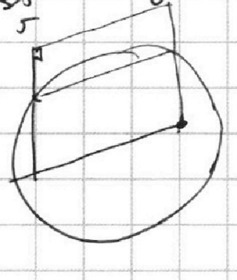
1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

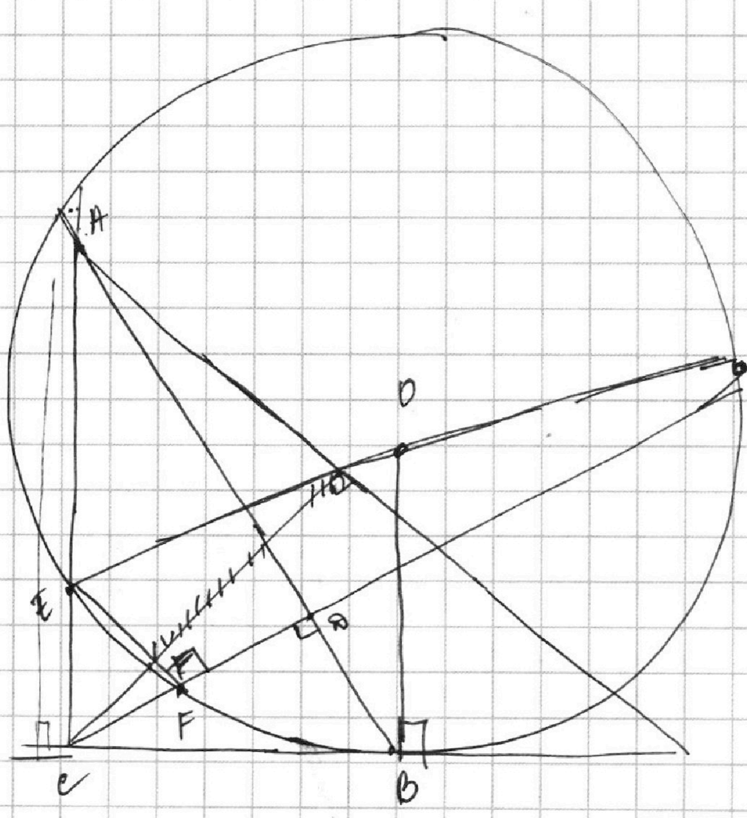
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

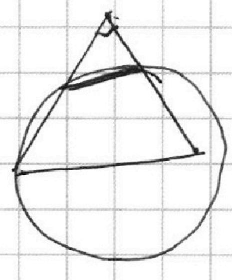


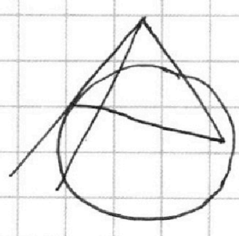
$$\frac{OB}{\sqrt{14}x} = \frac{\sqrt{14}x}{\sqrt{35}x} \Rightarrow OB = \frac{14x^2}{\sqrt{35}x} = \frac{14}{\sqrt{35}}x = \frac{2}{5}\sqrt{35}x.$$

$$CF(CF+21) = CB^2$$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

~~$a = \cdot 5^{12}$~~

~~$c = 5^{27}\cdot 2^{9}$~~

~~$\frac{8+12+14}{2} = 17.$~~

$a = 2^{5}\cdot 3^{8}\cdot 5^{12}$

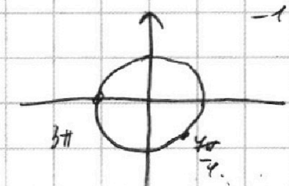
$b = 2^{3}\cdot 3^{7}\cdot 5^{0}$

$c = 2^{9}\cdot 3^{13}\cdot 5^{27}$

$a+b=8$
$b+c=12$
$a+c=14.$

$a+b=14$
$b+c=20$
$a+c=21$
$a+b+c=28$

$a+b+c=17$
$c=9 \quad b=3$
$a=5$



$-1.$

$10\arcsin(\cos(-2\pi)) = \pi + 4\pi$

$10\arcsin\left(\cos\frac{4\pi}{4}\right) = \pi - \frac{7\pi}{2}$

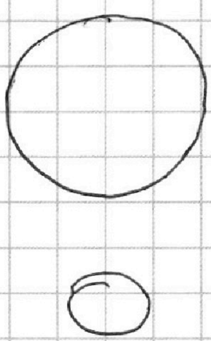
$-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

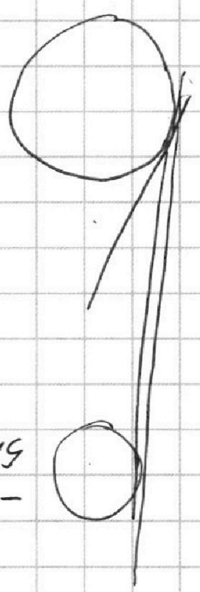
$\pi + \frac{3\pi}{4}.$ $\quad \frac{2\pi - 7\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}.$

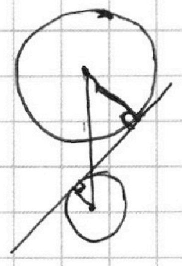
$-\frac{5\pi}{2}.$

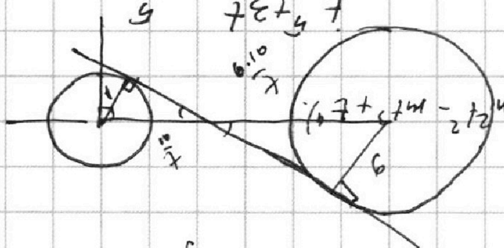
$10\arcsin(\cos 3\pi) = \pi - 6\pi$

$10\cdot -\frac{\pi}{2} = -5\pi.$









$m^4 + \frac{13}{3m} + 3 = 0$

$t^4 - \frac{5}{3t} + 3 = 0$

$m^4 - t^4 + \frac{13}{3m} + \frac{5}{3t} = 0$

$m^4 + \frac{13}{3m} + 3 = 0.$

$m^5 + 3m + \frac{13}{3} = 0.$

1 макс. 1 кор.

$t^5 + 3t - \frac{5}{3} = 0$

$m^5 + 3m + t^5 + 3t + \frac{8}{3} = 0.$

$m^5 + t^5$

$m(m^4+3)$ $\quad m^4$

$t^5 + 3t = \frac{5}{3}$ $\quad \frac{13}{3}$

$m^5 + 3m = -\frac{13}{3}$

$t^5m^5 + 3mt^5 + 3tm^5 + 9tm = -\frac{65}{9}.$

$5m^5 -$

$m^4 - t^4 + \frac{13t + 5m}{3tm} = 0.$ $\quad m+t$

$(m^2-t^2)(m^2+t^2)$

$(m+t)(m-t)(m^2+t^2) + \frac{13t+5m}{3tm} = 0$

$m+t=a$

$(m+t)^5$

$m^5 + t^5$

$(m+t)(m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4).$

$t^5 + 3t - \frac{5}{3} = 0$

log

$\frac{t^5+3t}{m^5+3m} = -\frac{5}{13}$

$-13t^5 - 39t = 5m^5 + 15m$

$5m^5 + 13t^5 + 15m + 39t = 0.$

$m^5 + 3m + \frac{13}{3} = 0$

$xy - 1$

$m+t$

$\log 2x$

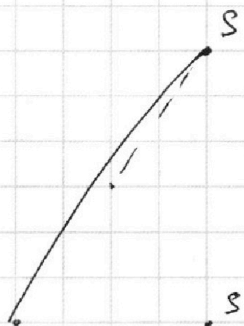
$\log 2 + \log x$

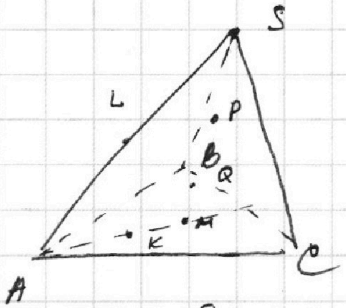
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

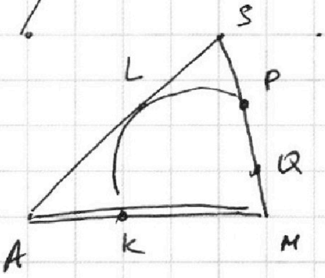
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

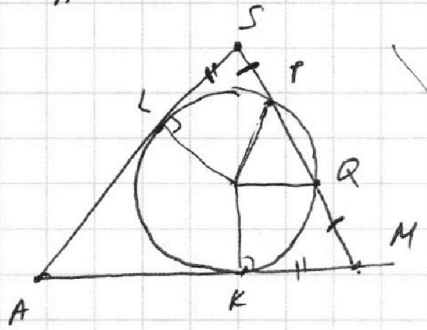
$SP = MQ.$

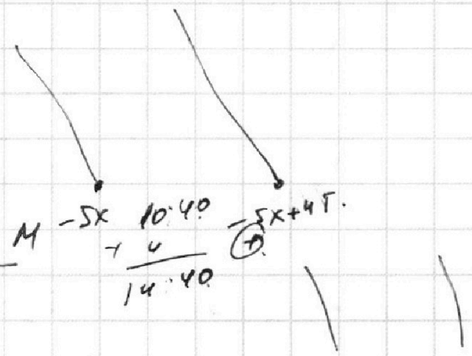




AA_1, BB_1, CC_1







$-5x$ 10:40 $+4$ 14:40

$-5x+45$

B $-3x+45$ $-5x+90$

$A:(x_1;y_1).$
$y_1 = -5x_1$
$5x_2 + y_2 = 45$
$\boxed{y_2 = 45 - 5x_2}$

$y_1 = -5x_1 + 90.$
$5x_2 + y_2 = 45 + 90.$

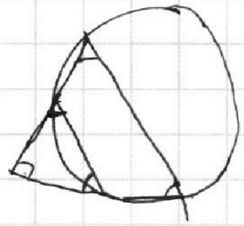
$17 \cdot 17 \cdot 46$

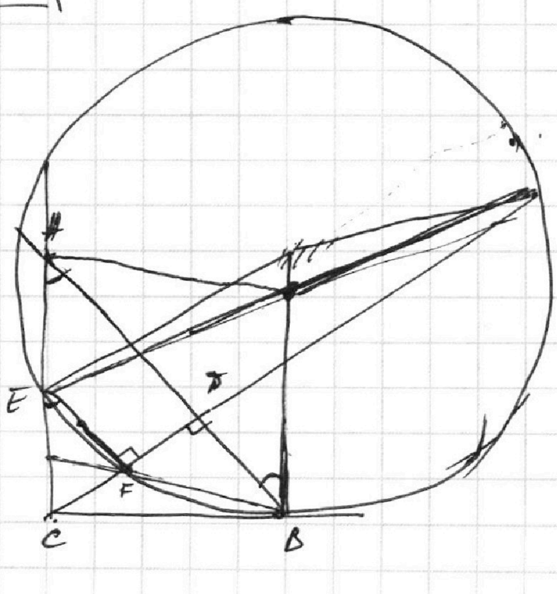
$17 \times 17 = 119 + 17 \cdot = 289$

$289 \times 46 = 1734 + 1156 = 13294$

$289 \times 6 = 1734$

$289 \times 4 = 1156$



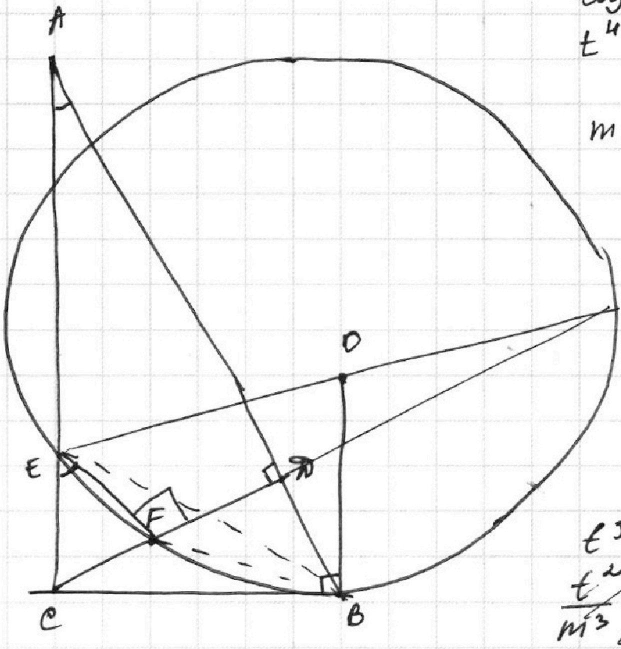


МФТИ

$\log_5^4 2x - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3 \Rightarrow t^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3t$

$t^5 + 3t -$



$m^4 + \frac{4}{m} = -\frac{1}{3m} - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3t} + 3 = 0$

$t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0.$

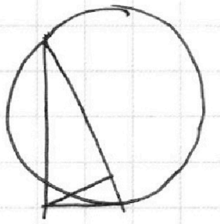
$t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0.$

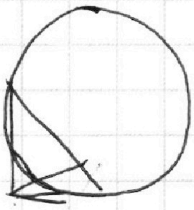
m^5

$t^5 + m^5 + 3t + 3m = 0.$

$\cancel{\frac{t^2}{m^3} + \frac{m^2}{t^3} + \frac{3t}{m^3} + \frac{3m}{t^3} = 0}$

$\cancel{\frac{t^5}{m^5} + 1 + \frac{3t}{m^5} +}$

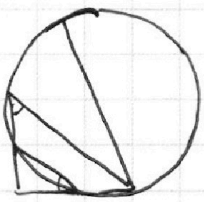




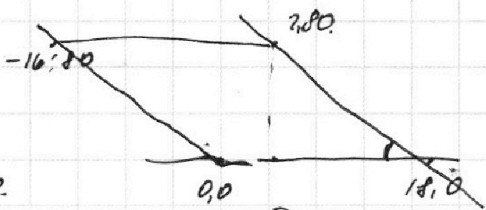
$t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4$

$t^3(t-m) - m^3(t-m)$

$(t-m)(t^3 - m^3) + t^2m^2$



$5x_2 - 5x_1 +$



$kx + b$

$k = -\frac{80}{16} = -5$

$0 = -5\cdot 18 + b$

$\Rightarrow b = 90.$

$A(x_1; y_1)$. ∈ паралл.

$\begin{cases} 0 \le y_1 \le 80. \\ y_1 \le 90 - 5x_1, \\ y_1 \ge -5x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le y_2 \le 80 \\ y_2 \le 90 - 5x_2 \\ y_2 \ge -5x_2 \end{cases}$ $y = -5x$

$y = -5x + 90.$

$5x_2 + y_2 = \underbrace{45 + 5x_1 + y_1}_{\text{задано}}$ B

$y_2 = -5x_2 + B$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Rightarrow \le 5x_2 + y_2$

$-45 \le 5x_1 + y_1 \le 45.$

$0 \le B \le 90$

$0 \le 45 + 5x_1 + y_1 \le 90$

y_1 $\cancel{-45 \le 5x_1 + y_1}$

$y = -5x + A,\ A \in \{0; 1; \dots; 90\}$

$0 \le 45 + A \le 90$

$5x_2 + y_2 = 45 + 5x_1 - 5x + A. \Rightarrow y_A = -5x_2 + 45 + A.$ $-45 \le A \le 45.$

$A \in [0; 45]$.

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$

$\frac{\pi}{2} - x$

$\frac{\pi}{2} - x - \pi k$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x - \pi k \le \frac{\pi}{2}$

$-\pi \le -x - \pi k \le 0$

$0 \le x + \pi k \le \pi$

$-\pi k \le x \le \pi - \pi k$

$10(\frac{\pi}{2} - x - \pi k) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x - 10\pi k = \pi - 2x$

$8x = 4\pi - 10\pi k$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4}$ $\quad -\pi k \le \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4} \le \pi - \pi k$

$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$

a – ?
$\exists b$: 4 реш.

$\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{array}\right.$

$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ $\quad xy$ – ?
$25 \quad 125$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$ $\quad \log_{y^3} \frac{1}{5} =$

$\log_5 2x = t$ $\quad \log_{2x} 5^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\log_{2x} 5$ $\quad = \log_y 5^{-\frac{1}{3}} =$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$ $\quad = -\frac{1}{3}$

xy

$\log_5 xy = \log_5 x + \log_5 y$

$m^4 + \frac{4}{m} = -\frac{1}{3m} - 3$ $\quad (t+m)$ – ?

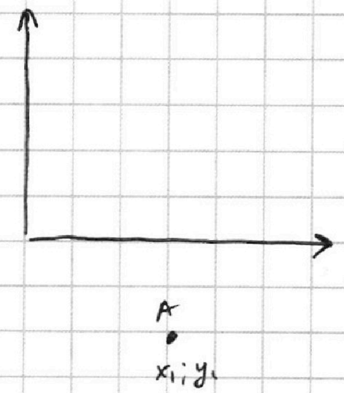
$t^4 - m^4 - \frac{3m + 4t}{tm} = \frac{4m + t}{3tm}$

$\cancel{t^4 + m^4 - \frac{3}{t} + \frac{4}{m} = \frac{4}{3t} - \frac{1}{3m}}$

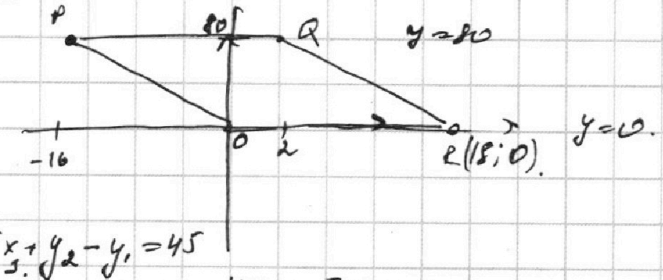
$t^4 - m^4 - \cancel{\frac{3m + 4t \ldots 3t}{3tm}} = 0$

$t^4 - m^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{m} = \frac{4}{3t} + \frac{1}{3m}$

$\Rightarrow t^4 - m^4 -$



$O(0;0)$



$A(x_1; y_1)$
$B(x_2; y_2)$
$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$
$5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$

$m^4 + \frac{4}{m} = -\frac{1}{3m} - 3 \quad m^4 + \frac{4}{m} + \frac{1}{3m} + 3 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ a, b, c : $ab : 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$ac : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$abc - ?$

$abc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$\cancel{\alpha_1+\beta_1 \geq 8}$
$\cancel{\alpha_2+\beta_2 \geq 14}$
$\alpha_3+\beta_3 \geq$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\Gamma_1} \cdot 3^{\Gamma_2} \cdot 5^{\Gamma_3}$

$\alpha_1+\beta_1 \geq 8$
$\alpha_2+\beta_2 \geq 14$
$\alpha_3+\beta_3 \geq 12$

$\beta_1+\Gamma_1 \geq 12$
$\beta_2+\Gamma_2 \geq 20$
$\beta_3+\Gamma_3 \geq 17$

$abc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot k$

$b = 1.$
$c = 2^{12} 3^{20} \cdot 5^{17}$
$a = 2^8 \cdot 3^{14}$

$\alpha_1+\Gamma_1 \geq 14$
$\alpha_2+\Gamma_2 \geq 21$
$\alpha_3+\Gamma_3 \geq 39$

$\alpha_1+\beta_1+\Gamma_1 \geq 17$
$\alpha_2+\beta_2+\Gamma_2 \geq 28$
$\alpha_3+\beta_3+\Gamma_3 \geq 34.$

$\frac{14+20+21}{2} = \frac{34+21}{2} = \frac{55}{2} = 27{,}5$

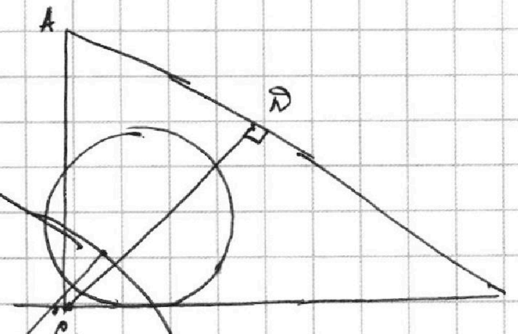
$\frac{12+17+39}{2} = \frac{12+56}{2} = \frac{68}{2}$

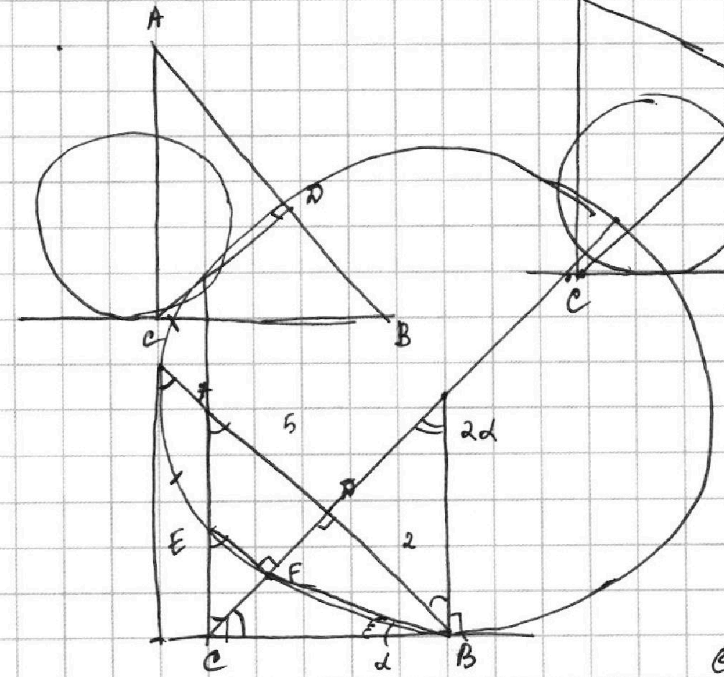
$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\Gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\Gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\Gamma_3}$

$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}.$

$\frac{12+17+39}{2} = \frac{29+39}{2} = \frac{68}{2}$

$c = \cancel{5^{39}}$





$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} - ?$

$\frac{EF}{AC} = \frac{EC}{AB}$

$\frac{5x}{AC} = \frac{AC}{7x} \Rightarrow AC = \sqrt{35}\,x$

$\frac{2x}{CB} = \frac{CB}{7x} \Rightarrow CB = \sqrt{14}\,x$