



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_4^4 x - 6 \log_{11} 11 = \log_{9^3} \frac{1}{11} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Решение:

1) Пусть $a: 2^x, b: 2^y, c: 2^z$, где

$x, y, z \in \mathbb{Z}$ и $x, y, z \geq 0$;

2) п.к. $(ab): 2^6$, но $2^x \cdot 2^y \geq 2^6$, т.е.

$x+y \geq 6$, аналогично $y+z \geq 14$, $x+z \geq 16$, сложив эти три неравенства,

получим $2 \cdot (x+y+z) \geq 6+14+16=36$, $(x+y+z) \geq 18$,

но $2^x \cdot 2^y \cdot 2^z \geq 2^{18}$, получим $(a \cdot b \cdot c): 2^{18}$;

Все три неравенства выполняются, например при $x=9, y=9, z=0$;

3) Аналогично для числа 3 $a: 3^x, b: 3^y, c: 3^z$,
 $x, y, z \in \mathbb{Z}, x, y, z \geq 0; x+y \geq 13, y+z \geq 25$,
получим $x_1 + y_1 + z_1 \geq \frac{13+21+25}{2} = \frac{34+25}{2} = \frac{59}{2} = 29,5$;

получим $x_1 + y_1 + z_1 \geq 30$, значит $(a \cdot b \cdot c): 3^{30}$;

4) Аналогично для числа 5, $a: 5^{x_2}, b: 5^{y_2}, c: 5^{z_2}$,

$x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}, x_2, y_2, z_2 \geq 0$, получим

$x_2 + y_2 + z_2 \geq \frac{11+13+28}{2} = \frac{24+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$, получим

~~$(a \cdot b \cdot c): 5^{26}$~~

5) ~~Значит $a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ (т.к. 2, 3, 5 - простые~~

~~числа); неравенство выполняется, например при~~

~~$a = 5$~~ 5) мы знаем, что $x_1 + y_1 \geq 13, y_1 + z_1 \geq 21$,

$x_1 + z_1 \geq 25$, получим при $x_1 = 9, y_1 = 4$ и $z_1 = 17$, все

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нум неравенства будут выполнены; нум знам
 $x_1 + y_1 + z_1 \geq 30;$

6) Мы знаем, что $x_2 + y_2 \geq 11$, $y_2 + z_2 \geq 13$, $x_2 + z_2 \geq 28$,
нога, так $y_2 \geq 0$, то $x_2 + y_2 + z_2 \geq 28;$

нум $x_2 \geq 14$, $y_2 \geq 0$, $z_2 \geq 14$, все

нум неравенства будут выполнены, нум знам

$x_2 + y_2 + z_2 \geq 28;$ но

7) Тогда $a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28};$

8) Если $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$, $b = 2^2 \cdot 3^4$, $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$,

то $a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ и

$a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} ; (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}) ; b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} ; (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14})$

~~$a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} ; (2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28})$~~

$a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} ; (2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}) ;$

Ответ $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

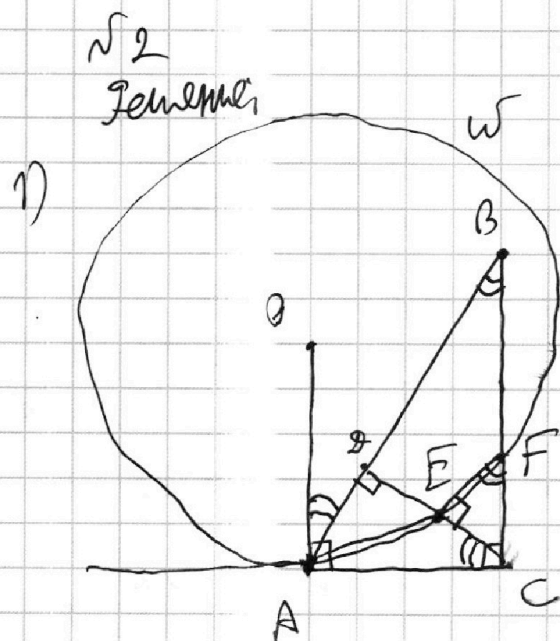
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) $AD : DB = 2 : 5$; пусть $AD = 2 \cdot x$, где $x > 0$,

тогда $BD = 5 \cdot x$; $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{5 \cdot x \cdot 2 \cdot x} = \sqrt{10} \cdot x$;

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{(2x)^2 + (\sqrt{10}x)^2} = \sqrt{14} \cdot x$

$BC = \sqrt{35} \cdot x$;

3) Если $B \in \omega$, то $CF \cdot CB = CA^2$;

$CF \cdot CB = 14x^2$; ~~$CF \cdot CB = 14x^2$~~ $CF = \frac{14x^2}{BC} = \frac{14x^2}{\sqrt{35}x} =$
 $= \frac{7 \cdot 2 \cdot x}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{35} \cdot x}{5}$; тогда, так как $\triangle ADC \sim \triangle CBF$,

то $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CBF}} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{14} \cdot x}{\frac{2\sqrt{35} \cdot x}{5}}\right)^2 =$
 $= \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 5}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$;

Ответ: $\frac{5}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Решение:

$$1) 10 \cdot \sin \alpha \cos(\sin \alpha) = 9\pi - 2\alpha;$$

Пусть $\alpha \cos(\sin \alpha) = L$, где $L \in [0, \pi]$, тогда
 $\cos L = \sin \alpha$; и $10 \cdot L = 9\pi - 2\alpha$, $L = \frac{9\pi - 2\alpha}{10}$;

$$\text{значит } \begin{cases} \cos\left(\frac{9\pi - 2\alpha}{10}\right) = \sin \alpha, \text{ и.о.} \\ 0 \leq L \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{2\alpha}{10}\right) = \sin \alpha; \\ 0 \leq \frac{9\pi - 2\alpha}{10} \leq \pi \end{cases}; \begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha - 2\pi}{5}\right) = \sin \alpha, \\ -9\pi \leq -2\alpha \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha - 2\pi}{5}\right) = \sin \alpha; \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{9\pi}{2} \end{cases}; \begin{cases} \frac{\alpha - 2\pi}{5} = \alpha + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha - 2\pi}{5} = \pi - \alpha + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 4,5 \cdot \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha = -2\pi + 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ 6\alpha = 7\pi + 10\pi m, m \in \mathbb{Z}; \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 4,5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5\pi h - \pi}{2}, h \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \alpha = \frac{7\pi + 10\pi m}{6}, m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 4,5\pi \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad x = \frac{5\pi h - \pi}{2}; \quad h \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } h > 2, \text{ то } x > \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } h < 0, \text{ то } x < -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{Таким образом } 0 \leq h \leq 2; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}, \text{ соответственно}$$

значения

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array} \right];$$

$$(2) \quad x = \frac{7\pi + 10\pi m}{6}, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } m > 2, \text{ то } x > \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } m < -1, \text{ то } x < \frac{-3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}, \text{ соответственно}$$

$$\text{Если } -1 \leq m \leq 2, \text{ то } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}, \text{ поэтому}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array} \right];$$

значения

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array} \right];$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}.$$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$1) \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 = 25)(x^2 + y^2 + 18y + 72) = 0 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5} \quad (3) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \quad (1) \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \quad (2) \end{cases} \end{cases}$$

(1) $x^2 + y^2 = 5^2$; график этой фигуры это окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 5;

(2) $x^2 + (y+9)^2 = 2^2$; график этой фигуры это окружность с центром в точке $(0; -9)$ и радиусом 2;

(3) ~~$x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5}$~~ ; график ~~этой~~ прямой равенства это прямая, перпендикулярная; при $\left(-\frac{6a}{5}\right) = 0$ эта прямая становится параллельной оси Ox ;

2) Изобразим все это на графике:

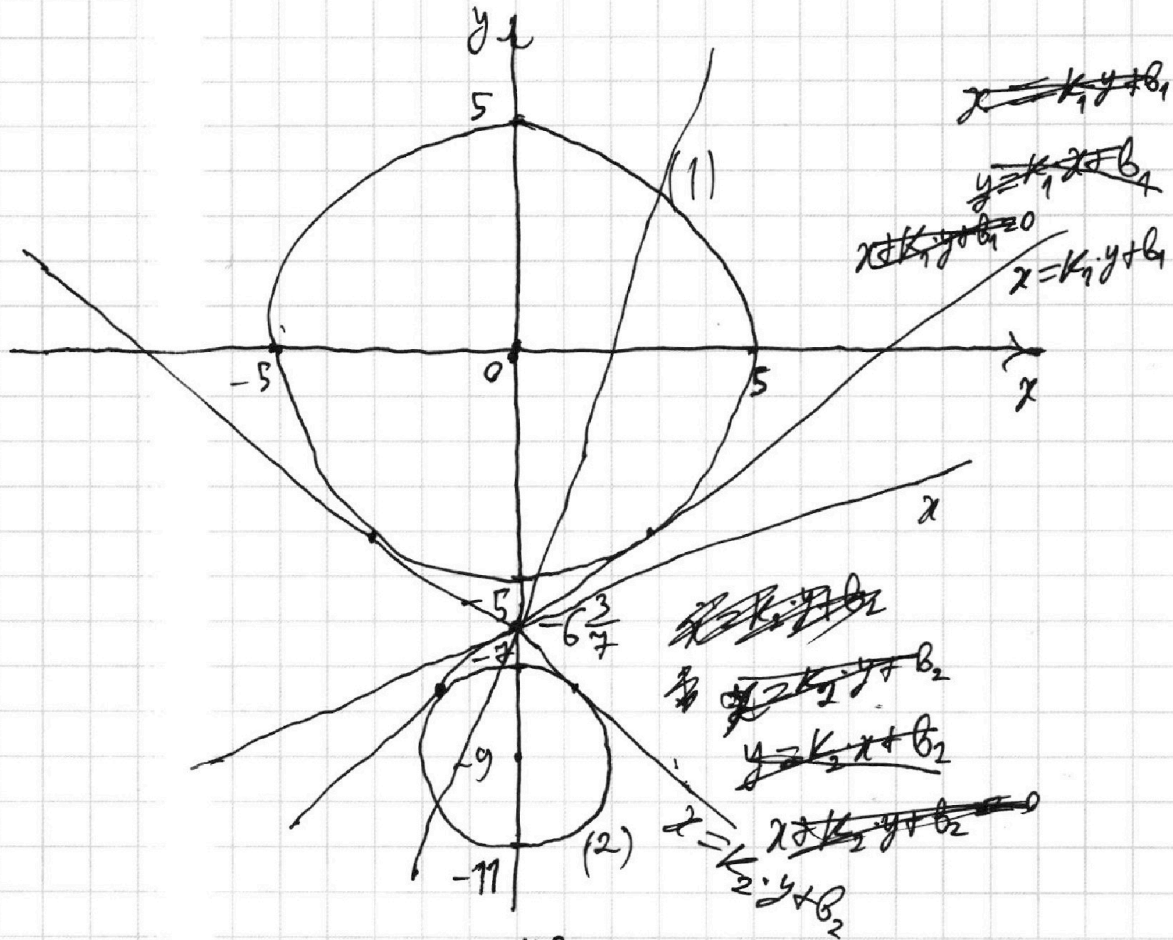
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) Записать уравнение ^{внутренней} касательной к двум данным окружностям

то уравнение $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$
 $0 = x - k_1 y + b_1$, $0 = x - k_2 y + b_2$

Заметим, что зафиксировав значение параметра a ,

можно при изменении параметра b получить касательную $x = (-\frac{6a}{5})y + \frac{b}{5}$

касательная вдоль оси абсцисс; тогда, если

$(-\frac{6a}{5}) = k_1$, то уравнение $x = k_1 y + b_1$ будет касательной

касательной касательной касательной $x = (-\frac{6a}{5})x + b$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~но при параллельном переносе прямой $x = k_1 y + b_1$ влево вдоль оси Ox эта прямая не будет пересекать (2)-ю окружность, т.е. не будет 4 решения у системы; а при переносе вправо, она не будет пересекать~~

~~функции все прямые $y = k_3 \cdot x + b_3$,~~

~~где $k_1 \leq k_3 \leq k_2$ ($k_1 < 0$ и $k_2 > 0$);~~

~~$k_2 \leq k_3 \leq k_1$ ($k_1 > 0$; $k_2 < 0$);~~ ~~иногда прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$;~~

~~$y = k_1 x - b_1 \geq 0$; $d_0 = 0 - k_1 \cdot 0 =$~~

4) ~~т.к. $k_1 < 0$~~ ~~параметр k окружности,~~
но рассматриваем на море $(0; 0)$ и $(0; 9)$ точки

для точек 5 и 2 соответственно, т.е.

$$\begin{cases} 5 = \frac{10 + k_1 \cdot 0 + b_1}{\sqrt{(1-0)^2 + k_1^2}} \\ 2 = \frac{10 - 9k_1 + b_1}{\sqrt{(1-0)^2 + k_1^2}} \end{cases}; \begin{cases} 5\sqrt{k_1^2 + 1} = |b_1| \\ 2\sqrt{k_1^2 + 1} = |b_1 - 9k_1| \end{cases}$$

~~$9k_1^2 + 9 = 81k_1^2$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1^2 = 25(1+k_1^2); \quad (b_1 - 9k_1)^2 = 4(1+k_1^2);$$
$$(b_1 - 9k_1)^2 = \frac{4}{25} b_1^2; \quad \frac{21}{25} b_1^2 - 18 b_1 k_1 + 81 k_1^2 = 9;$$

$$\left[\begin{array}{l} b_1 = 15k_1 \\ b_1 = \frac{45}{7} k_1 \end{array} \right];$$

5) Если $b_1 = 15k_1$, то $|15k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2}$;

$$9k_1^2 = 1+k_1^2; \quad k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{8}};$$

6) Если $b_1 = \frac{45}{7} k_1$, то $|\frac{45}{7} k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2}$;

$$\frac{45 \cdot 45}{7 \cdot 7} k_1^2 = 25(1+k_1^2); \quad \frac{81}{49} k_1^2 = 1+k_1^2;$$

$$\frac{32}{49} k_1^2 = 1; \quad k_1^2 = \frac{49}{32}; \quad k_1 = \pm \frac{7}{\sqrt{32}};$$

2) Если $k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$, то $b_1 = \frac{15}{\sqrt{8}}$, тогда уравнение

касательной будет: $x \pm \frac{y}{\sqrt{8}} + \frac{15}{\sqrt{8}} = 0$

при $x \geq 0$; $y = -15$; тогда $(0; -15)$ — точка

пересечения этой касательной и оси y (или x), тогда,

так как они не лежат на отрезке, соединяющем

центры окружностей (1) и (2), то $k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ не

подходит; аналогично при $k_1 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$ и $b_1 = -\frac{15}{\sqrt{8}}$

не будет подходящей



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Если $k_1 = \frac{7}{\sqrt{32}}$, то $b_1 = \frac{45}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{45}{\sqrt{32}}$,

тогда уравнение касательной будет:

$$x = \frac{7}{\sqrt{32}} y + \frac{45}{\sqrt{32}}; \text{ или } x = 0;$$

$$y = -\frac{45}{7} = -6\frac{3}{7}, \text{ где } 0 < -6\frac{3}{7} < -9,$$

значит уравнения:

$$x = \frac{7}{\sqrt{32}} y + \frac{45}{\sqrt{32}} \text{ и } x = -\frac{7}{\sqrt{32}} y - \frac{45}{\sqrt{32}}$$

это уравнения внутренних касательных;

9) Запишем все прямые $x + k_0 y + b_0 = 0$,

где $k_0 \cdot (-6\frac{3}{7}) + b_0 = 0$; т.е. $b_0 = \frac{45}{7} k_0$

и $k_0 \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, т.е. $x = k_0 y + \frac{45}{7} k_0$

Эта прямая проходит через точку $(0; -6\frac{3}{7})$

и из-за $k_0 \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, она не пересекает ни одну

из окружностей не далее чем в одной точке, тогда
при параллельном переносе этой прямой вверх или

вниз, она будет ещё дальше от центра O_1 ^{одной}

из центров окружностей; и не сможет пересекать

две окружности в двух точках одновременно, т.е. у системы

не будет более 2 решений; следовательно при $k_0 \leq \frac{7}{\sqrt{32}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

10) Если $\text{tg} \alpha = -\frac{7}{\sqrt{32}} \leq k_0 \leq \frac{7}{\sqrt{32}}$, прямая $x = k_0 y + b_0$ будет пересекать камуфляж из окружностей в двух точках, т.е. у системы будет ровно 4 решения;

11) Если $\text{tg} \alpha > \frac{7}{\sqrt{32}}$ это $x = (-\frac{6a}{5})y + \frac{b}{5}$;

~~мы можем выбрать любое $\frac{b}{5}$, тогда~~

~~прямая $x = k_0 y + \frac{b}{5}$ мы уже знаем,~~

т.е. если $-\frac{6a}{5} \leq -\frac{7}{\sqrt{32}}$ или $-\frac{6a}{5} \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, то

любая прямая, параллельная касательной

прямой $x = (-\frac{6a}{5})y$, ^{если $a < 0$} не сможет пересекать

~~ни~~ окружностей в 4-ех точках;

или $-\frac{7}{\sqrt{32}} < -\frac{6a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}}$, то выберем $\frac{b}{5} = \frac{45}{7} \cdot (-\frac{6a}{5})$;

т.е. $b = \frac{5 \cdot 45}{7} \cdot (-\frac{6a}{5})$; мы получим прямую,

проходящую через точку $(0; -\frac{45}{7})$ и перескающую

окружностей в четырех точках, тогда

$$-\frac{7}{\sqrt{32}} < -\frac{6a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}}; \quad -\frac{35}{6\sqrt{32}} < a < \frac{35}{6\sqrt{32}} = \frac{35 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot 32} =$$

$$= \frac{35 \cdot 4\sqrt{2}}{6 \cdot 32} = \frac{35\sqrt{2}}{48}; \quad \text{тогда} \quad -\frac{35\sqrt{2}}{48} < a < \frac{35\sqrt{2}}{48}$$

Ответ: $(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Решение:

1) Пусть $\log_m x = t$ и $\log_m \left(\frac{1}{2}y\right) = a$,

тогда $a + t = \log_m \frac{xy}{2}$, но

~~$(a+t)^{24} = 11^{a+t} = \frac{xy}{2}$~~ $xy = 2 \cdot 11^{a+t}$;

2) $t^4 - \frac{6}{t} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} \mid t \neq 0$;

$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$;

$a^4 + \frac{1}{a} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{a} - 5 \mid a \neq 0$;

$a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$; тогда

$a^5 + t^5 + 5t + 5a = 0$;

$(a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 5(a+t) = 0$;

$\begin{cases} a+t = 0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 5 = 0 \\ a+t \neq 0 \end{cases}$;

Если $a+t = 0$, то $xy = 2 \cdot 11^0 = 2$; для этого
можно выбрать по корню из уравнения $a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$

и $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$, которые можно подобрать

(п.к. степень многочленов в уравнениях четная)
и не имеют корней 0, п.к. $\frac{16}{3} \neq 0$ и $\left(-\frac{16}{3}\right) \neq 0$;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~из этих двух корней, получим x и $(\frac{1}{2}y)$,
где будет выталкиваться, что $xy = 2$;~~

~~3) Рассмотрим на примере:~~

~~$$A = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4; \text{ т.к. } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0,$$~~

~~покажем, что $A > 0$ при любых a и b ;~~

~~$$A = a^4 + b^4 - a \cdot b (a^2 - ab + b^2)$$~~

~~Рассмотрим на примере $\beta = a^2 - ab + b^2$~~ ~~как на квадратное трехчленное переменного a ,~~~~график этой функции это парабола, ветви~~~~которой направлены вверх; тогда $D = b^2 - 4b^2 =$~~ ~~$= -3b^2$, где $b \neq 0$, тогда $D < 0$, значит парабола~~~~целиком лежит выше оси абсцисс, значит~~

~~$$a^2 - ab + b^2 > 0; \text{ тогда}$$~~

$$3) A = a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 + a^2b^2 =$$

$$= a^3(a-b) + b^3(b-a) + a^2b^2 =$$

$$= (a^3 - b^3)(a-b) + a^2b^2; \text{ т.к. } f(a) = a^3 \text{ растёт,}$$

то $(a^3 - b^3)$ и $(a-b)$ имеют одинаковый знак,

тогда $(a^3 - b^3) \cdot (a-b) \geq 0$, но $a^2b^2 > 0$ (т.к. $a, b \neq 0$),

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

значит $A = (a^3 - b^3)(a - b) + a^2 + b^2 > 0$, тогда

$(A + 5) > 0$, значит доверимся

$$a^4 - a^3 b + a^2 + b^2 - a b^2 + b^4 + 5 = 0 \text{ невозможно}$$

тогда ~~так же~~ ~~тогда~~ $a + b \geq 0$;

4) Возьмем корень уравнения $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$, t_0 ,

~~так~~ он может существовать (н.к. многочлен

в левой части уравнения нечетной степени);

и $t_0 \neq 0$, н.к. $-\frac{16}{3} \neq 0$;

Аналогично возьмем корень уравнения $a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$,

$a_0 = -t_0$; ~~так~~ он может существовать и $a_0 \neq 0$;

~~тогда~~, н.к. н.к. $(-t_0)^5 + 5 \cdot (-t_0) + \frac{16}{3} =$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 0; \text{ тогда } \text{~~так же~~}$$

$(a_0 + t_0) = -t_0 + t_0 = 0$; значит

$$x = 11^{t_0} \text{ и } \frac{1}{2}y = 11^{a_0}, \text{ тогда } \frac{xy}{2} = 11^0; xy = 2$$

Ответ: 2.



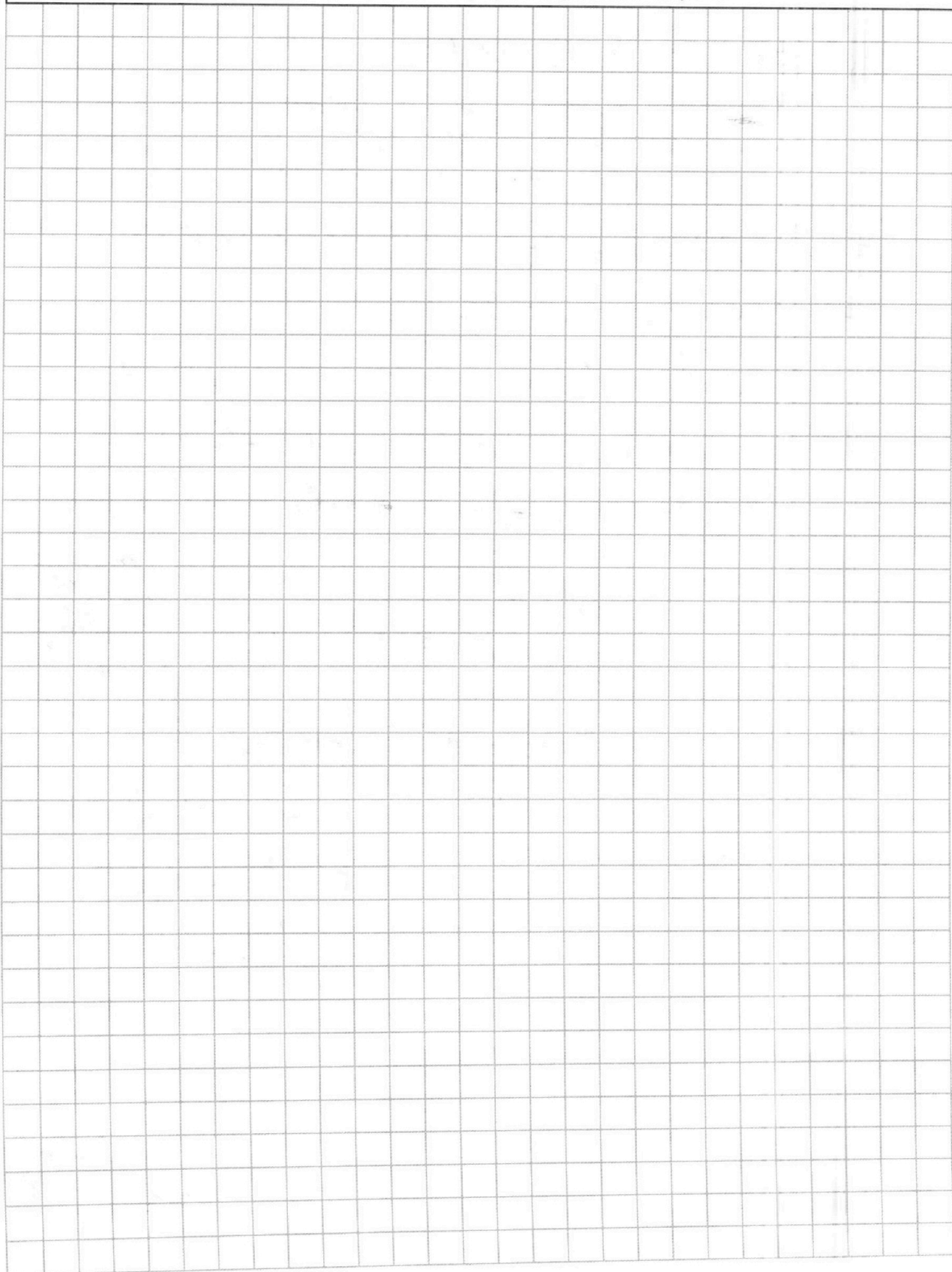
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФПИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^5 + 5a + b^5 + 5b = 0; \quad (a+b)^{-?} \quad a^2 + b^2$$

$$a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 + 5 = 0;$$

$$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3)(a+b) =$$

$$= a^4 + 3a^3 b + 3a^2 b^2 + a b^3 + a^3 b + 3a^2 b^2 + 3a b^3 + b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 - 5a^3 b - 5a^2 b^2 - 5a b^3 + 5 = 0;$$

$$(a+b)^4 - 5(a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 - 1) = 0;$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4)$$

$$a^2 - ab + b^2$$

$$-5ab(a^2 + ab + b^2)$$

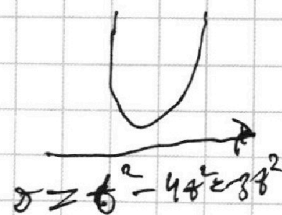
$$a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4$$

$$a > b;$$

$$b^4 - a^3 b + a^4 - a^3 b$$
$$b^3 (b-a) + a^3 (a-b);$$

$$(a^3 - b^3)(a-b)$$

$$a^2 - ab + b^2$$


$$b^2 - 4ab + a^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 20$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$

$$b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 20$$

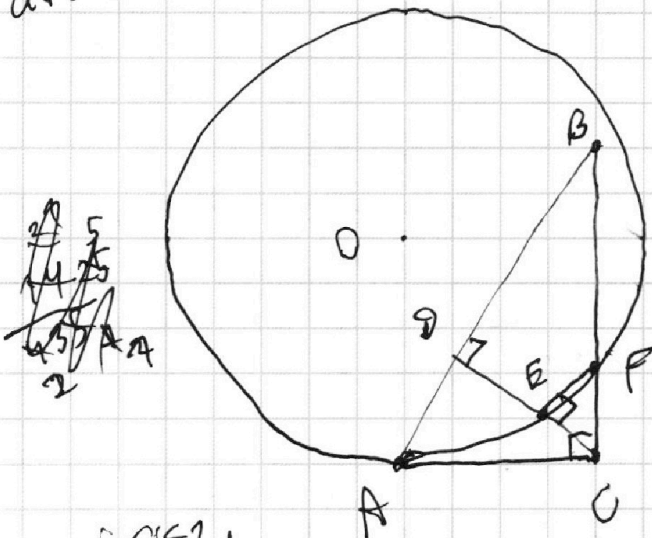
$$S_{\triangle CEF}$$

$$(a+b) = ?$$

$$BD : DA = 5 : 2$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0$$

$$\log_m x + \log_m y = \log_m xy$$



$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\log_m^4 x - \frac{6}{\log_m x} = \log_m^4 11 - 5; \quad \log_m^4 x - \frac{6}{\log_m x} = (-2) \cdot \log_m^2 x - 5;$$

$$\log_m^4 x - \frac{6}{\log_m x} = \frac{-2}{\log_m^2 x} - 5; \quad \log_m^4 x - \frac{6}{\log_m x} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{\log_m^2 x} - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5; \quad t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - 5\frac{1}{3} = 0; \quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_m^4 \left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\log_m \left(\frac{y}{2}\right)} = \log_m^4 \left(\frac{y}{2}\right)^3 - 5;$$

$$-\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_m \frac{y}{2}} - 5$$

$$d^4 + \frac{1}{d} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{d} - 5$$

$$a^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5a; \quad a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x + \frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} = 0$$

$$2 + \left(\frac{6a}{5}\right)y - \frac{b}{5} = 0;$$

$$x + k_1 y + b_1 = 0;$$

$$\frac{|b_1|}{\sqrt{1+k_1^2}} = 5; \quad \left| \frac{b_1 - 9 \cdot k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} \right| = 2;$$

$$b_1^2 = 25 \cdot (1+k_1^2);$$

$$(b_1 - 9k_1)^2 = 4(1+k_1^2);$$

$$b_1^2 - 18b_1 \cdot k_1 + 81k_1^2 = \frac{4}{25} \cdot b_1^2;$$

$$\frac{21}{25} \cdot b_1^2 - 18b_1 \cdot k_1 + 81k_1^2 = 0;$$

$$\frac{b_1}{k_1} = 9 \pm \frac{21}{25} \cdot 81 = \frac{4}{25} \cdot 81; \quad \left(\frac{2 \cdot 9}{5}\right)^2$$

$$b_1 = \left(\frac{9 \pm \frac{18}{5}}{\frac{21}{25}} \right) \cdot k_1$$

~~9 ± 18/5 = 27/5~~

$$|15k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2};$$

$$15^2 k_1^2 = 25(1+k_1^2);$$

$$9k_1^2 = k_1^2 + 4;$$

$$8k_1^2 = 4; \quad k_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$9 - \frac{18}{5} = \frac{27}{5}$$

$$\frac{27 \cdot 25}{5 \cdot 21} = \frac{45}{7}$$

$$9 \pm \frac{18}{5} = \frac{45 \pm 18}{5} = \frac{63}{5}$$

$$\frac{63 \cdot 25}{5 \cdot 21} = 15$$

$$\left[\begin{array}{l} b_1 = 15k_1 \\ b_1 = \frac{45}{7} \cdot k_1 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \cdot \cos 65 (\sin \alpha) = 9\sqrt{10} - 2x;$$

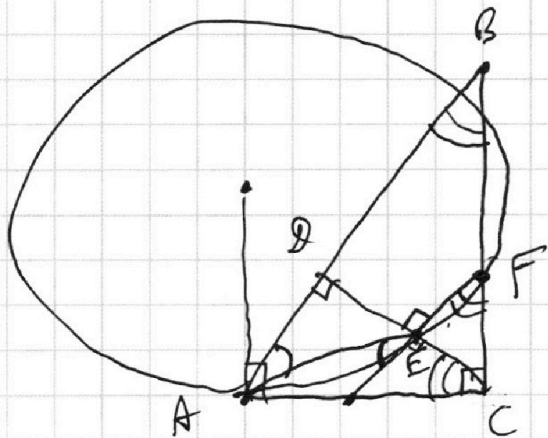
14:42

$$\cos \alpha \in [0, \sqrt{10}]$$

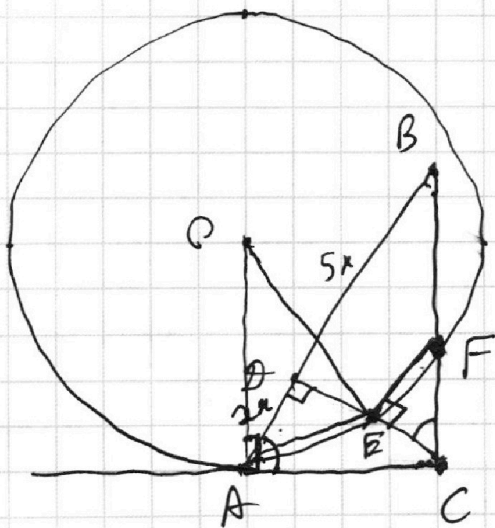
$$\begin{aligned} \cos 65 (\sin \alpha) &= L \\ \sin \alpha &= 85L \\ 10L &= 9\sqrt{10} - 2x \\ L &= \frac{9\sqrt{10} - 2x}{10} \end{aligned}$$

$$AB : BD = 7 : 5;$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$$



$$\cos 2\alpha \cdot 5x = 2\sqrt{10}x$$



$$\frac{BD}{AB} = \frac{5}{7}$$

$$\cos \frac{9\sqrt{10} - 2x}{10} = \sin \alpha$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{10} - 2x}{10} \right) = \sin \alpha$$

$$\sin \left(\frac{2x - 9\sqrt{10}}{10} \right) = \sin \alpha$$

$$\sin \left(\frac{x - 2\sqrt{10}}{5} \right) = \sin \alpha$$

$$\frac{x - 2\sqrt{10}}{5} = \alpha + 2\pi k$$

$$x - 2\sqrt{10} = 5\alpha + 10\pi k$$

$$-2\sqrt{10} + 10\pi k = 9x$$

~~sin alpha = ...~~

$\triangle ADE \sim \triangle DAE$

$$0 \leq \frac{9\sqrt{10} - 2x}{10} \leq \sqrt{10}$$

$$0 \leq 9\sqrt{10} - 2x \leq 10\sqrt{10}$$

$$-9\sqrt{10} \leq -2x \leq \sqrt{10};$$

$$-\frac{\sqrt{10}}{2} \leq x \leq \frac{9\sqrt{10}}{2};$$

$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{AD}$
 $DB : DC = AB^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x+y \geq 21$
 $y+z \geq 23$
 $x+z \geq 28$

$x+y+z \geq 26$
 $x \geq 13$
 $x \geq 13$
 $y \geq 13$

AB
 BC
 AC

~~20/7~~
~~20/7~~

$$\frac{20}{6} \pi = 2 \frac{2}{3} \pi$$

a	b	c
2^4	2^2	2^{12}
3	3^4	3
5	1	5^{14}

$$\sin\left(\frac{\pi - 2\pi}{5}\right) = \sin \alpha; \quad \boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 4,5 \cdot \frac{\pi}{6}}$$

1) $\frac{\pi - 2\pi}{5} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$\pi - 2\pi = 5\pi + 10 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot k, k \in \mathbb{Z};$$

$$10\pi k - 2\pi = 4\pi, k \in \mathbb{Z}; \quad \alpha = \frac{5\pi k - \pi}{2}; \quad \begin{matrix} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{matrix}$$

2) $\frac{\pi - 2\pi}{5} = \pi - \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\pi - 2\pi = 5\pi - 5\alpha + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$6\alpha \geq 7\pi + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

AB : $(2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$; BC : $(2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13})$
 AC : $(2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28})$; ABC - ?

a : 2^x
 b : 2^y
 c : 2^z

$x+y \geq 23$
 $y+z \geq 21$
 $x+z \geq 25$
 $x+y+z \geq 30$
 $z \geq 12$
 $y \geq 4$
 $x \geq 9$

$(x+y)^2 \geq 6$
 $x^2 + y^2 \geq 14$
 $x^2 + z^2 \geq 16$

$x+y+z \geq 18$

~~$x+y \geq 23$~~ $x+y \geq 21$
 ~~$y+z \geq 21$~~ $y+z \geq 23$
 ~~$x+z \geq 25$~~ $x+z \geq 28$

$x+y+z \geq 26$
 $k=0$
 $k=1$
 $k=2$
 $k=3$

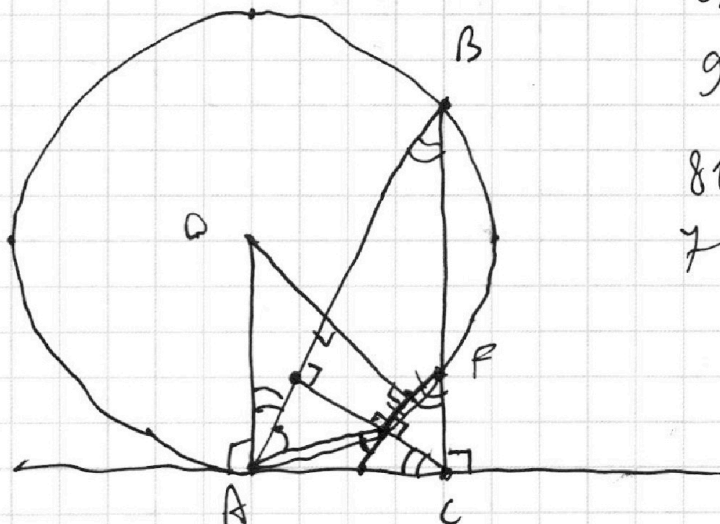
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
 Отметьте крестиком номер задачи,
 решение которой представлено на странице:



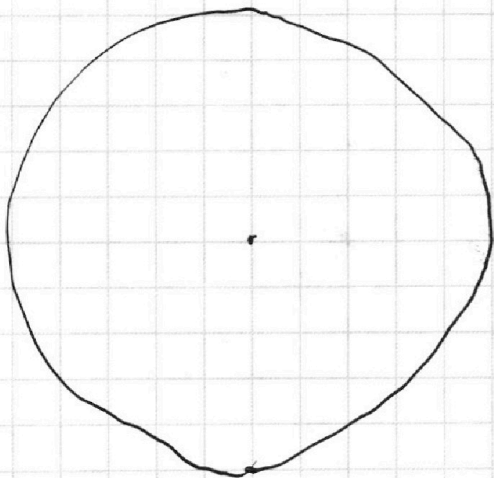
- 1 2 3 4 5 6 7



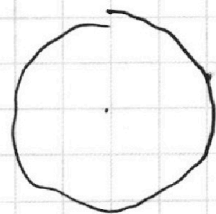
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 b_1 &= 5\sqrt{1+k^2} \\
 b_1 - 9k_1 &= 2\sqrt{1+k^2}; \\
 9k_1 &= 3\sqrt{1+k^2}; \\
 81k^2 &= 9 + 9k^2; \\
 72k^2 &= 9 \\
 k^2 &= \frac{1}{8} \\
 k &= \pm \frac{1}{\sqrt{8}}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 CP \cdot CB &= CA^2; \\
 \frac{CP}{CA} &= \frac{CA}{CB}; \\
 \Delta ACP &\sim \Delta BCA;
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 x &= k_1 y + b_1; \\
 -x + k_1 y + b_1 &= 0; \\
 d_1 &= \frac{0 - 9k_1 + b_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = 2; & d_0 &= \frac{0 + 0 + b_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = 5;
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



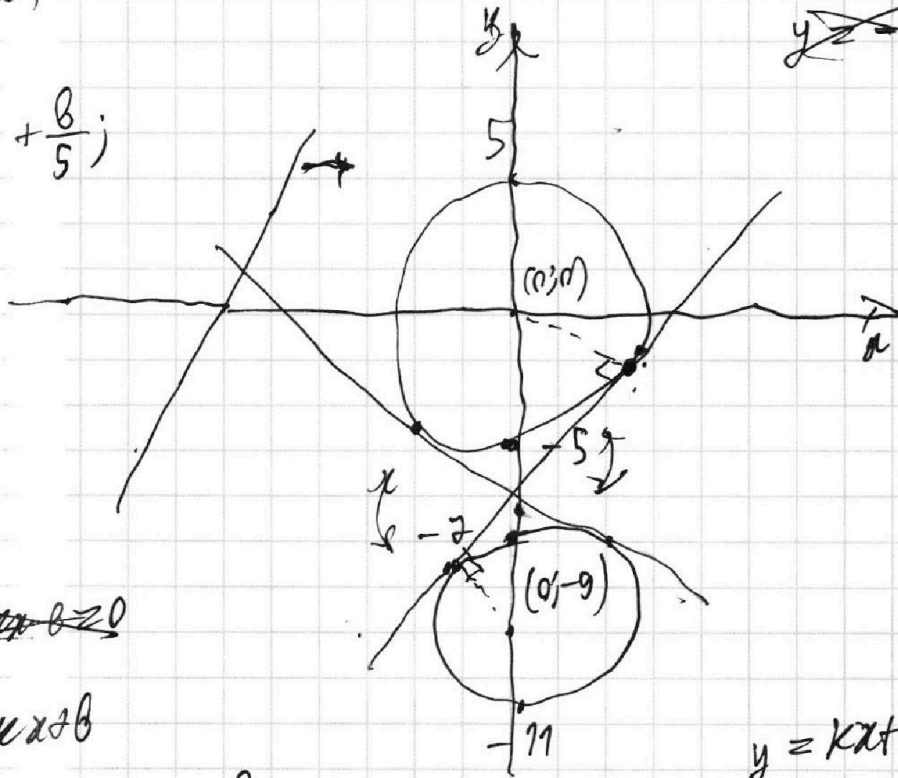
$$\begin{cases} 5x + 6ay - \theta = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ \cancel{x^2 + y^2 = 25} \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

4 решения;
лучше все а,
не 1 б)

1) Если $a=0$;
2) Если $a \neq 0$;

~~$$y = \frac{5x + \theta}{6a}$$~~

$$x = y \cdot \left(\frac{6a}{5}\right) + \frac{\theta}{5}$$



~~$$y = kx + \theta$$~~

$$y = kx + \theta$$

$M(x_0, y_0)$

$$d = \frac{y_0 - kx_0 - \theta}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$y = kx + \theta$$

~~$$y = kx + \theta = 0$$~~

$$d_0 = \frac{\theta}{\sqrt{1+k^2}} = 5;$$

$$d_{-9} = \frac{-9 + \theta}{\sqrt{1+k^2}} = 2;$$

~~$$\frac{\theta}{\theta - 9} = \frac{5}{2}$$~~

$$2\theta = 5\theta - 45;$$

$$3\theta = 45;$$

$$\theta = 15;$$

$$k = \pm \sqrt{8}$$