



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-15; 90)$ ,  $Q(2; 90)$  и  $R(17; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}1. \quad (ab) &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\(bc) &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\(ac) &: 2^6 \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}\end{aligned}$$

$$\min(abc) - ?$$

Минимальное значение произведения достигается, если оно состоит только из множителей  $2, 3, 5$ .

Пусть  $a = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$ ,  $k, l, m \in \mathbb{Z}_+$   
 $b = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t$ ,  $r, s, t \in \mathbb{Z}_+$   
 $c = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ ,  $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$

Если произведение чисел делится на определенную степень простого числа, значит в этом произведении присутствует это же число не меньше, чем в делителе.

$$\begin{array}{lll}2: \left\{ \begin{array}{l} k+r \geq 6 \\ r+x \geq 14 \\ k+x \geq 16 \end{array} \right. & 3: \left\{ \begin{array}{l} l+s \geq 13 \\ s+y \geq 21 \\ l+y \geq 25 \end{array} \right. & 5: \left\{ \begin{array}{l} m+t \geq 11 \\ t+z \geq 13 \\ m+z \geq 28 \end{array} \right. \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ k+r+x \geq \frac{6+14+16}{2} = 18 & l+s+y \geq \frac{13+21+25}{2} = 29 \frac{1}{2} & m+t+z \geq \frac{11+13+28}{2} = 26 \end{array}$$

$$abc = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \geq 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \quad \text{по условию}$$

Так как все показатели чисел не превышают степень числа, то в  $abc$  все показатели тоже не превышают степень числа.

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}, \text{ равн.-то при } a = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}; b = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^7; c = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^4$$

$$\text{Отвем: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

В  $(abc)$  все показатели должны быть целые неотрицательные, а также не меньше, чем наибольший показатель данной степени простого множителя в показателях произведения. Следовательно:  
 $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ , равн.-то при  $a = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}; b = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^7; c = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^4$

$$\text{Отвем: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

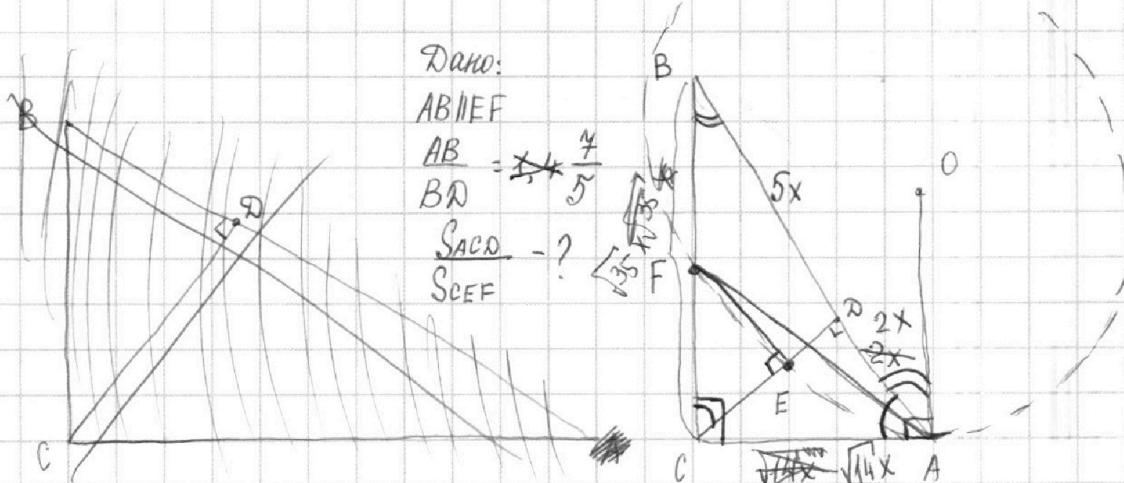


- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



Дано:

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$$

$\angle BCD - ?$

$\angle SCEF$

$$1) \left( \begin{array}{l} CD \perp AB \\ EF \parallel AB \end{array} \right) \Rightarrow (CD \perp EF) \Rightarrow (\triangle DAC \sim \triangle ECF \text{ по острому углу})$$
$$(BCD = \angle DAC = 180^\circ - \angle CBA) \quad k = \frac{AC}{CF} \quad \cancel{\frac{BC}{EF}} \quad \cancel{\frac{\angle DAC}{\angle ECF}} \quad \cancel{\frac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle ECF}}} = k^2$$

$$2) \text{Свойство высоты в прямодолгом треугольнике: } \frac{BC}{AC} = \sqrt{\frac{BD}{AD}} = \sqrt{\frac{5}{7+5}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

2) Свойство высоты в прямодолгом треугольнике

$$CBB = \sqrt{5x \cdot 7x} = \sqrt{35}x$$

$$CDO = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$$

$$AC = \sqrt{(7x-5x) \cdot 7x} = \sqrt{14}x$$

$$3) \text{степень точки } C: CA^2 = CF(2R - CF) \quad (\text{диаметр равен частичной } CF \text{ внутри окружности} + 2 \cdot CF, \text{ т.к. диаметр перпен. } CA, \text{ образует прямой угол})$$
$$k = \frac{AC}{CF} = \frac{CA^2}{CF(2R - CF)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. 10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \in [0; \pi] ; \quad x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ 10 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 9\pi - 2x ; \quad 5\pi - 10x = 9\pi - 2x ; \quad 8x = -4\pi ; \quad x = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

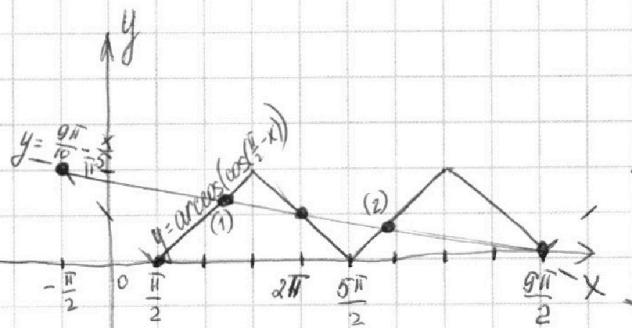
$$\left( \frac{\pi}{2} - x \right) < 0 ; \quad x > \frac{\pi}{2} \quad 9\pi - 2x < 8\pi$$

$$(10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))) \in [0; 10\pi]$$

$9\pi - 2x < 0 ; \quad x > \frac{9\pi}{2}$  - решений на промежутке  $(\frac{9\pi}{2}, \infty)$  нет

$$\left( \frac{\pi}{2} - x \right) > \pi ; \quad x < -\frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} 9\pi - 2x > 10\pi \\ 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \in [0; 10\pi] \end{array} \right. - \text{решений на промежутке } (-\infty, -\frac{\pi}{2}) \text{ нет}$$

$$x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \right]$$



по проверкой удовлетворяет  $x = \frac{9\pi}{2} : \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{2})) = 0$  - решение

$$x = 2\pi : \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - 2\pi)) = \frac{\pi}{2} - \text{решение}$$

$$\text{точка (1)} : \frac{9\pi}{10} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2} ; \quad \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} = x - \frac{\pi}{2} ; \quad \frac{6x}{5} = \frac{4\pi}{5} ; \quad x = \frac{4\pi}{6}$$

$$\text{точка (2)} : \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} = x - \frac{5\pi}{2} ; \quad \frac{6x}{5} = \frac{17\pi}{5} ; \quad x = \frac{17\pi}{6}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \begin{cases} y = C + kx \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} - \text{путь найти, при каких сик одно решение}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + (y+g)^2 = 4 \\ y = C + kx \end{cases} - n$$

$$(1) x^2 + (C+kx)^2 = 25$$

$$(k^2+1)x^2 + 2Cx + C^2 - 25 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (kC)^2 - (C^2 - 25)(k^2 + 1) =$$

$$= 25k^2 - C^2 + 25 = 0$$

$$(2) x^2 + (C+kx+g)^2 = 4$$

$$(k^2+1)x^2 + 2k(C+g)x + (C+g)^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = k^2(C+g)^2 - (k^2+1)((C+g)^2 - 4) =$$

$$= 4k^2 - (C+g)^2 + 4 = 0$$

$$\begin{cases} 25k^2 - C^2 + 25 = 0 \\ 4k^2 - C^2 - 18C - 77 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} :4 \\ :25 \end{array} \right| \begin{cases} 21C^2 + 25 \cdot 18C + 47 \cdot 25 + 4 \cdot 25 = 0 \\ 25k^2 - C^2 + 25 = 0 \end{cases}$$

$$21C^2 + 25 \cdot 18C + 85 \cdot 25 = 0$$

$$7C^2 + 150C + 27 \cdot 25 = 0$$

$$C \in \left\{ -\frac{45}{7}, -15 \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C = -15 \\ 25k^2 - 225 + 25 = 0; k = \pm \sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C = -\frac{45}{7} \\ 25k^2 - \left(-\frac{45}{7}\right)^2 + 25 = 0; 25k^2 - \frac{45^2}{49} + 25 = 0 \end{array} \right.$$

$$k^2 = \frac{45^2 - 25 \cdot 49}{25 \cdot 49} = \frac{10 \cdot 80}{25 \cdot 49}$$

$$k = \pm \frac{20}{35} \sqrt{2} = \pm \frac{4}{7} \sqrt{2}$$

$$k \in (-\infty; -\frac{4}{7} \sqrt{2}) \cup (\frac{4}{7} \sqrt{2}; \infty) - \text{подходит}$$

$$\left[ -\frac{5}{6a} < -\frac{4}{7} \sqrt{2}; -\frac{24\sqrt{2}a - 35}{42a} < 0; a \in (0; \frac{35}{24\sqrt{2}}) \right]$$

$$\left[ -\frac{5}{6a} > \frac{4}{7} \sqrt{2}; \frac{24\sqrt{2}a + 35}{42a} < 0; a \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}, 0) \right]$$

$$\left[ a \in \left( -\frac{35}{24\sqrt{2}}, 0 \right) \cup \left( 0, \frac{35}{24\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$\text{Ответ: } \left( -\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

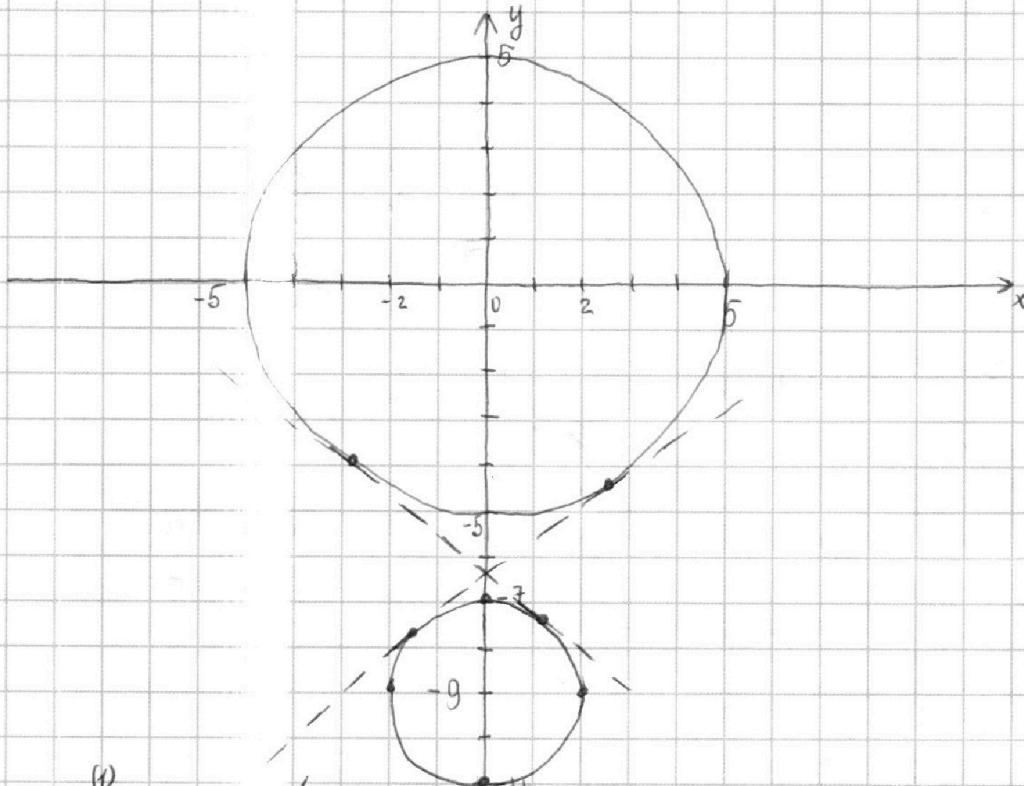
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4 а - ? Задача 4 решения

(1)  $5x + 6ay - b = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$  - прямая (не может быть параллельной, т.к. коэффициент при  $x \neq 0$ )

(2)  $(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0; (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$



0)  $a=0$ : (1)  $5x=b$ ;  $x=\frac{b}{5}$  - вертикальная прямая. Если  $b=0$  - 4 решения

1)  $a \neq 0$ : (2)  $y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$  - прямая. У прямой и окружности не более двух общих точек, поэтому 4 решения достигаются тогда, когда прямая касается (не касается) обе окружности.

Чтобы найти такие угловые коэффициенты прямой, при которых при хотя бы одном свободном члене случаются оба пересечения.

Угловыми считаются значения прямых, у которых коэффициент угла наклона равен значению коэффициенту у общих внутренних касательных этих окружностей. Если коэффициент прямой будет параллелен этим касательным или более падающей, то при переходе вверх-вниз она будет касаться обеих пересекать окружности не более, чем в двух точках.

При прямых, не определенных выше, что будут подходить б, при которых свободный член том же, что и общих внутренних касательных

Найдем общие внутренние касательные окружностей:

$k = -\frac{5}{6a}$  - одному значению  $k$  соответствует ровно одно значение  $a$ ,  $k \neq 0$   
 $e = \frac{b-5a}{6a}$  - одному значению  $e$  соответствует ровно одно значение  $b$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### 5. (продолжение)

$f(t)$  и  $g(p)$  - это функции  $h(x) = 3x^5 + 15x$  симметричны вниз/вверх на 16

$$h(x) = -3x^5 - 15x = -h(x) \Rightarrow h(x) \text{ - нечетная функция}$$

у  $f(t)$  чётные симметрии  $(0; -16)$

у  $g(p)$   $(0; 16)$

$$\text{Пусть } f(t_0) = 0 \text{ при } t_0 \\ g(p_0) = 0 \quad p_0 = t_1 \quad (f(t_0) = 0) \Rightarrow f(t_1) = -32$$

$$(|f(t_0)| - (-16)) = |f(t_1)| - (-16) = 16 \Rightarrow (t_0 = -t_1 = -p_0)$$

$$x \cdot y = 11 \cdot 2 \cdot 11 = 2 \cdot 11 = 2$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5$$

$$\log_{11} x = t; x = 11^t$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \neq 0 \\ 3t^5 - 18 = -2 - 15t \end{array} \right.$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0; f(t) = 3t^5 + 15t - 16$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 15 & -16 \\ \hline \cancel{\frac{1}{3}} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{\frac{1}{3}} & \cancel{9} & \\ \hline \end{array}$$

$f(t)$  - возрастающая  $\Rightarrow$  решений у уравнения не более одного

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} - 5$$

$$\log_{11}(0,5y) = p, y = 2 \cdot 11^p$$

$$p^4 + \frac{1}{p} = -\frac{13}{3p} - 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p \neq 0 \\ 3p^5 + 3 = -13 - 15p \end{array} \right.$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0; g(p) = 3p^5 + 15p + 16$$

$g(p)$  - возрастающая  $\Rightarrow$  решений у уравнения не более одного

$$x \cdot y = 11^t \cdot 2 \cdot 11^p = 2 \cdot 11^{p+t}$$

продолжение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

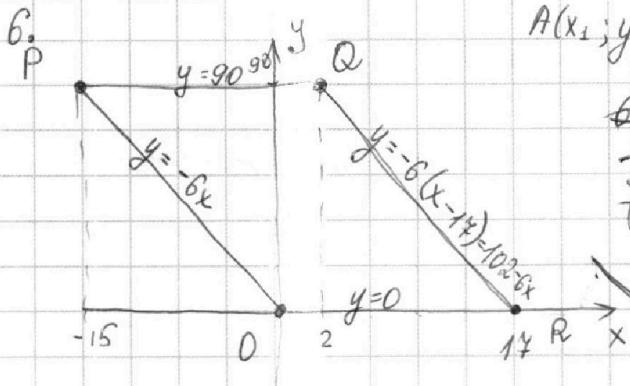
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$
$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$
$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$
~~$$6x_2 - 6x_1 = 48$$~~
$$y_2 + 6x_2 = y_1 + 6x_1 + 48$$
~~$$y_2 - y_1 = 48$$~~

1) посчитаем количество точек, для которых  $x_2 - x_1 = 8$ . Тогда  $y_2 - y_1 = 0$ , т.е. они лежат на одной горизонтали

Две верхние горизонтали, где боковые стороны проходят не через целые точки, таких пар ~~пар~~ точек с целыми координатами 17. Но есть подходящих пар 9

У ~~других~~ таких горизонталей, где боковые стороны проходят через целые стороны:  $y=0, y=6, y=12, y=18, y=24, y=30$  16 штук. Тогда 10 подходящих пар на горизонтали.

Л.в. решенных пар:  $10 \cdot 16 + 9(91 - 16) = 160 + 9 \cdot 75 = 835$

2) посчитаем количество точек для которых  $y_2 - y_1 = 48$ , то есть они лежат на одной вертикали. Для каждой точки с целыми координатами внутри этого параллелограмма нужно подобрать прямую вида  $y = -6x + b$ , на которой эта точка лежит. Тогда для этой точки подойдут в пару все точки на прямой  $y = -6x + b + 48$  и исходящие внутри параллелограмма.

Для данного параллелограмма существует 103 таких прямых ( $b \in [0; 102]$ ). Все они покрывают ~~точки с целыми координатами~~ внутри и на границе параллелограмма.

Если прямые проходят через ~~точки с целыми координатами~~ на границах, то на них лежит 16 нулевых точек. Иначе 15 нулевых точек. 16 точек будут, если  $b = 6$ .

Всего существует 103 таких прямых для  $b \in [0; 54]$ , т.е. для 55  $b$ .

Из них 10 проходит через точки с целыми координатами на горизонтальных границах. Т.е. всего пар:

$$15 \cdot 15(55 - 10) + 16 \cdot 16 \cdot 10 = 225 \cdot 45 + 2560 = 10125 + 2560 = 12685$$

Ответ: ~~10125~~ пар. 12685 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

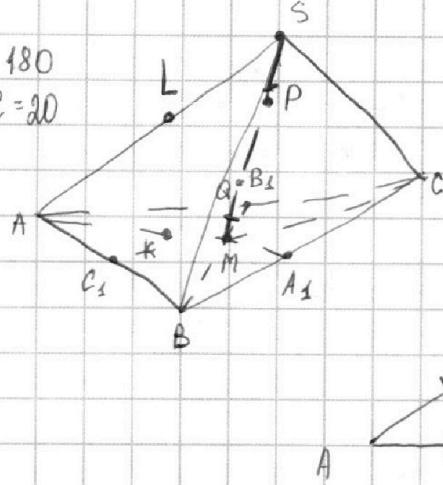
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

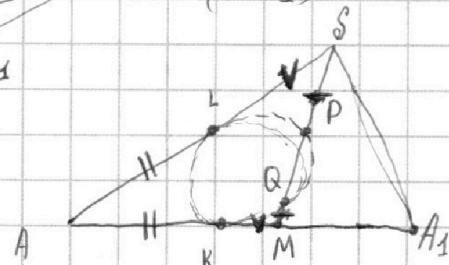
7.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= 180 \\ SA = BC &= 20 \end{aligned}$$



$$a) (AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1) - ?$$

1) Воздействие сферы плоскости  
(ASA<sub>1</sub>)



AL = AK - отрезки касательных

$$\left( \begin{array}{l} SL^2 = SP(SP + PQ) \\ MK^2 = MQ(MQ + PQ) \end{array} \right) \Rightarrow (SL = MK)$$

Дано если P и Q были равны  
шагами, то в стечении точек L и M  
в скобках можно поменять  
было пишется, а равенство осталось бы.

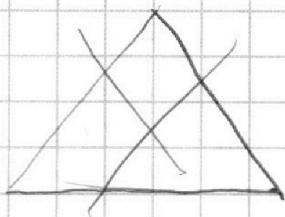
$$AS = AM = 20$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 30$$

$$2) \text{ высота } \Delta ABC \text{ к } BC; AH = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$$

$$(A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24 > BC) \Rightarrow$$

$\Delta ABC$  - тупоугольный





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

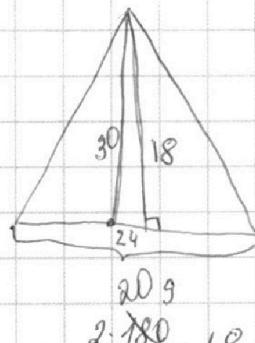
параллельность  
касание  
отношение

$$\frac{CF}{FB} = \frac{CE}{CD} = \frac{AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1}{CD} = \frac{1}{2}$$

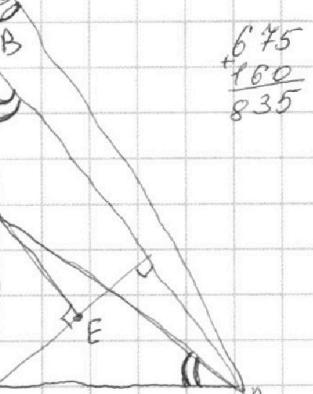
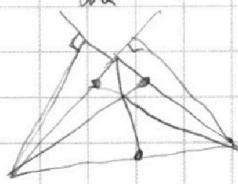
$$CD = \sqrt{10}x$$

$$\frac{CE}{\sqrt{10}x} = \frac{CF}{\sqrt{35}x} = \frac{EF}{5x}$$

$$\frac{CE}{\sqrt{10}x} = \frac{FE}{\sqrt{14}x} = \frac{FC}{\sqrt{14}x}$$



$$\frac{2 \cdot 180}{282} = 18$$



$$\begin{array}{r} 675 \\ + 160 \\ \hline 835 \end{array}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CF}{AC}$$

$$160 + 819 - 144 =$$

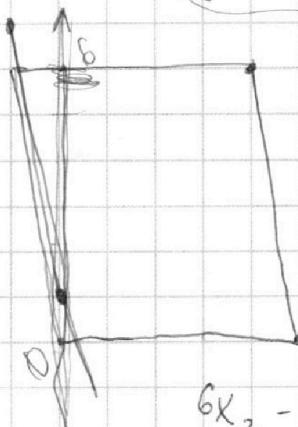
90

84

78

72

$$y^2 + 6x \cdot \frac{y}{2} = y_1 + 6x_1 + 48$$



$$\begin{array}{l} 0^\circ, O \\ y = -6x \\ y = -6x + 48 \end{array}$$

$$0; 0 \quad 1; 42$$

$$6x_2 - 6x_1 + -6x + 8 + 48$$

$$CF(2R - 2CF) = 14x^2$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 45 \\ \hline 1125 \\ + 900 \\ \hline 10125 \end{array}$$

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

