



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.  $ab = 2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc = 2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac = 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

Решка:

Пусть  $d_1, \beta_1, \gamma_1$  - степень входящие в  $a$  числа  $a, b, c$   
 $d_2, \beta_2, \gamma_2$  - — " — 3 — " —  
 $d_3, \beta_3, \gamma_3$  - — " — 5 — " —

$$\text{Т.к. } ab = 2^7 3^{11} 5^{14} \Rightarrow d_1 + \beta_1 \geq 7 \quad d_2 + \beta_2 \geq 11$$

$$bc = 2^{13} 3^{15} 5^{18} \quad \beta_1 + \gamma_1 \geq 13 \quad \beta_2 + \gamma_2 \geq 15$$

$$ac = 2^{14} 3^{17} 5^{43} \quad d_1 + \beta_1 \geq 14 \quad d_2 + \gamma_2 \geq 17 \quad d_3 + \gamma_3 \geq 43$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \quad d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 22$$

$\Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$ , т.к. степень входящ 2 прошлых  $d_1 + \beta_1 + \gamma_1$ ,  
 $a^3: d_2 + \beta_2 + \gamma_2$ , причем,  $: 5^{43}$ , т.к. степень входящ  
 $5 = d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \beta_3 + \gamma_3 \geq 43$ .

Пример:

$$a = 2^4 3^7 5^{20}$$

$$b = 2^3 3^4 5^0$$

$$c = 2^{10} 3^{22} 5^{23}$$

$$\text{Отвем: } 2^{17} 3^{22} 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

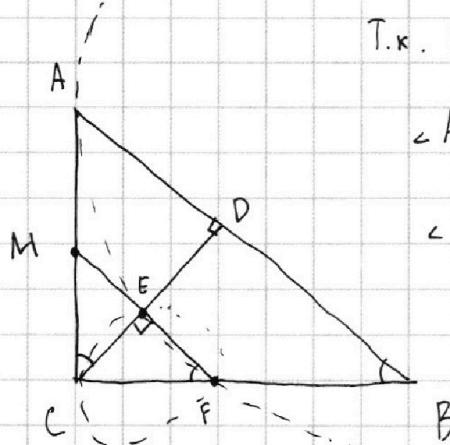
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



$$\text{Т.к. } EF \parallel AB \Rightarrow \angle B = \angle EFC = \alpha$$

$\angle ACD = \beta$ , т.к. также как и  
 $\angle B$  дополняет  $\angle A$  до  $90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Т.к. } \angle ACE = \angle CFE \Rightarrow \\ AC - \text{кас к окр } CEF \end{aligned}$$

EF - радиос окр CEF и AEF

$M = AC \cap EF$ , т.к.  $M \in$  радиос окр AEF и CEF ( $\in EF$ ) и лежит на пр AC вбл как к этим окр  $\Rightarrow$   
 $\deg M(AEF) = MA^2 = \deg M(EFC) = MC^2$   
 $\Rightarrow MA = MC$

$$\text{Т.к. } EF \parallel AB \Rightarrow \frac{EF}{DB} = \frac{CE}{CD} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} DB \quad CE = \frac{1}{2} CD$$

$$\text{Т.к. } \frac{AB}{DB} = 1,3 \Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{10}{3}, \text{ т.к. } DB = 10x, AD = 3x$$

$$\begin{aligned} \text{Т.к. } ACB - \text{прямой треуг и } CD - \text{его высота} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB = \\ = 30x^2 \end{aligned}$$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$  ( $\angle CDA = \angle CEF$ ,  $\angle ACD = \angle CFE$ )

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = \left( \frac{AD}{CE} \right)^2 = \left( \frac{3x}{\frac{1}{2}\sqrt{30}x} \right)^2 = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}.$$

Ошибки:  $\frac{6}{5}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Пусть:  $\alpha = \arccos(\sin x)$   $\alpha \in [0; \pi]$

$$\cos \alpha = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

1 способ:  $\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \pi + 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

2 способ:  $\alpha = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$

$$5\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi t\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}(-1) = -\frac{9\pi}{6} \quad x_4 = \frac{21\pi}{6}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} \quad x_3 = \frac{11\pi}{6}$$

~~$$4x = 4\pi$$~~  
~~$$x \in \pi$$~~  
~~$$x = \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$0 \text{ способ: } x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$$~~

$$4x = 4\pi - 10\pi t$$

$$x = \pi - \frac{5\pi t}{2}$$

$$\alpha = \pi - \frac{5\pi t}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi t = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi t}{2} \in [0, \pi]$$

$$x_5 = -\frac{3\pi}{2} \quad x_6 = \pi \quad x_7 = \frac{7\pi}{2} \quad \Rightarrow t \in \{1, 0, -1\}$$

Ответ:  $\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{7}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi; \pi$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

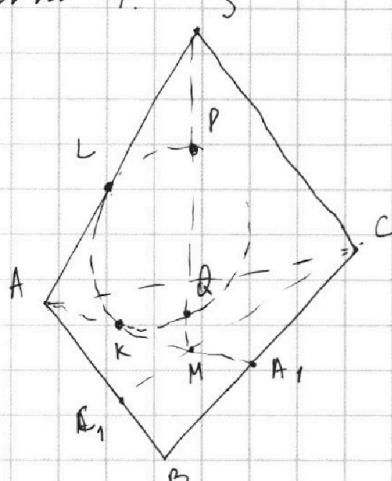
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.

a)



Так как  $SP = MQ \Rightarrow$  ве у. о. Р лежит между S и Q.

т.к.  $\Omega$  касается  $AB$  и  $AM \Rightarrow$

$AL = AK$ , как отрезки касательных к сфере

$$SL^2 = SP \cdot SQ \quad (\text{степень точки } S \text{ от } \Omega)$$

$$MQ \cdot MP = \underbrace{SP \cdot SQ}_{\sim} = MK^2 \quad (\text{степень точки } M \text{ от } \Omega)$$

↓

$$SL = MK$$

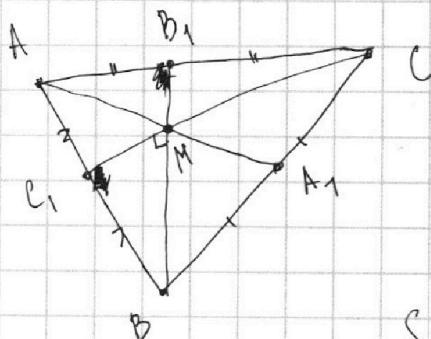
$$AM = AK + KM = AL + SL = AS = 10 = BC \Rightarrow AA_1 = 15$$

т.к.  $M$ - центр круга  $\Delta ABC \Rightarrow$

$$MA_1 = \frac{AM}{2} = 5 = \frac{BC}{2}$$

т.к.  $MA_1 = BA_1 = A_1C \Rightarrow \Delta BMC$ - прямой.

$$S_{\Delta ACC_1} = S_{\Delta CC_1B} = 30 \quad (\text{т.к. } \frac{S_{\Delta ACC_1}}{S_{\Delta CC_1B}} = \frac{AC_1}{C_1B} = 1).$$



$$S_{\Delta CC_1B} = \frac{BM \cdot CC_1}{2} = 30$$

$$\Rightarrow BM \cdot CC_1 = 60 \quad \text{т.к. } BB_1 = \frac{3}{2} BM \Rightarrow \\ BB_1 \cdot CC_1 = 90$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 90 = 1350.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

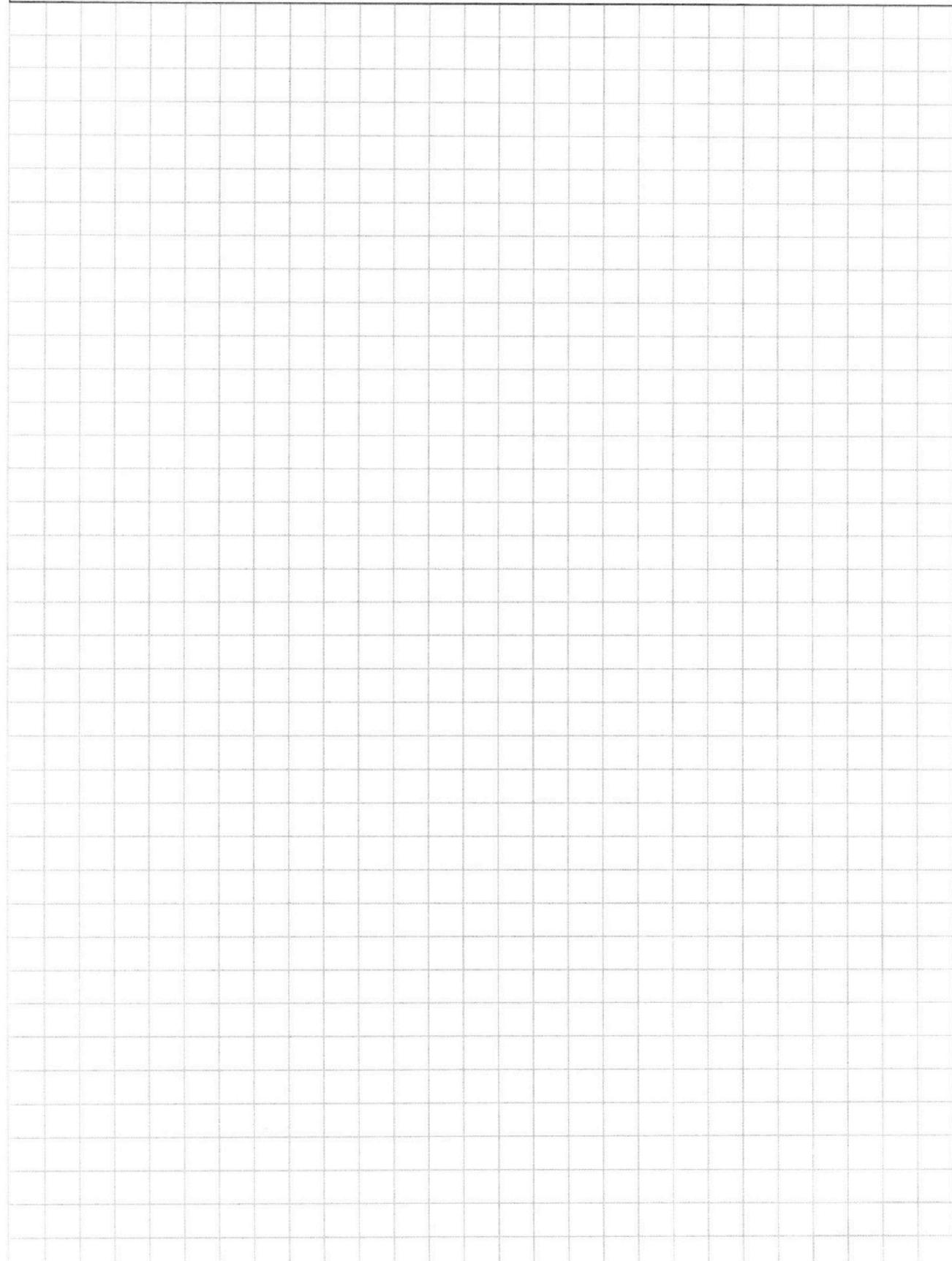
5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



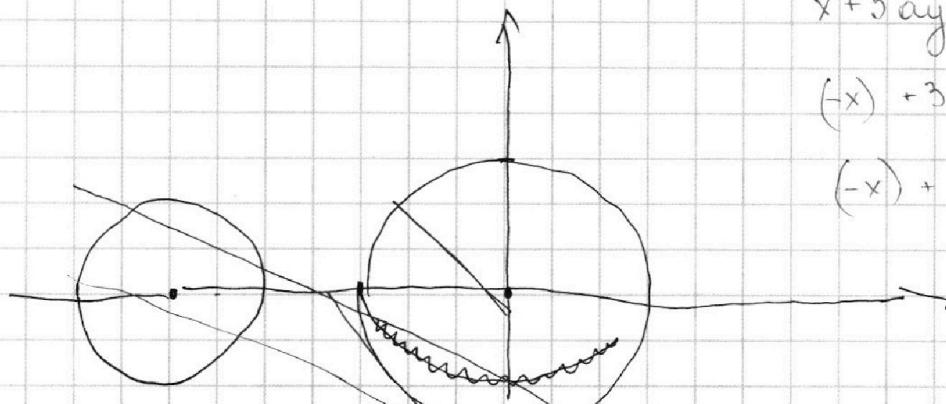
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x + 3ay - b = 0$$

$$(x^2 + (x+7)^2 + y^2 - 4) \cdot (x^2 + y^2 - 9) = 0.$$



$$x + 3ay$$

$$hh = 9q + 801 = 9q + 0h + 89 = 61 \cdot n + 89$$

$$89 + (4)$$

$$(h^2, x)$$

$$a = h + s \frac{x}{t} + hs$$

$$(h^2, h) + (x^2, x)$$

$$a = h + t \frac{x}{t} - ht$$

$$\cancel{h \times g + b01} = \cancel{xg + b01} + \cancel{h + b01}$$

$$x = h \times$$

$$0 = \left( t^{xg} b01 + t^h b01 \right) \frac{e}{E} + \left( xg + b01 \right) - \left( h + b01 \right)$$

$$0 = h + t^h b01 \frac{e}{E} + \left( h + b01 \right) \quad 0 = h + t^{xg} b01 \frac{e}{E} - \left( xg + b01 \right)$$

$$h - t^{xg} b01 \frac{e}{E} = t^{xg} b01 \frac{e}{E} - \left( (xg) + t^h b01 \right)$$

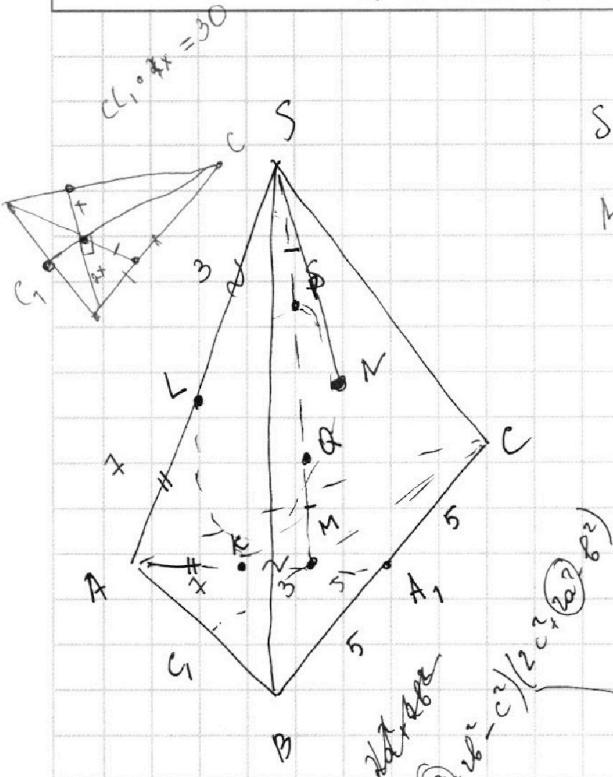
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



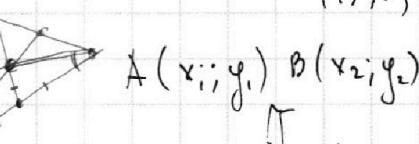
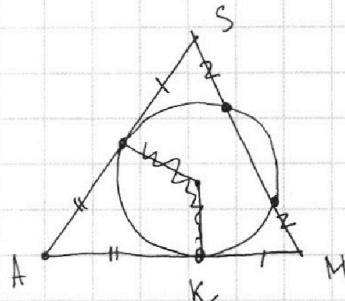
$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$\angle SAB = 60^\circ \text{ как}$$

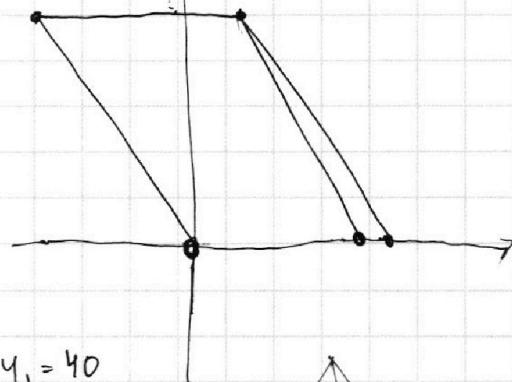
$$SA = BC = 10$$

$$SA = AM = 10$$

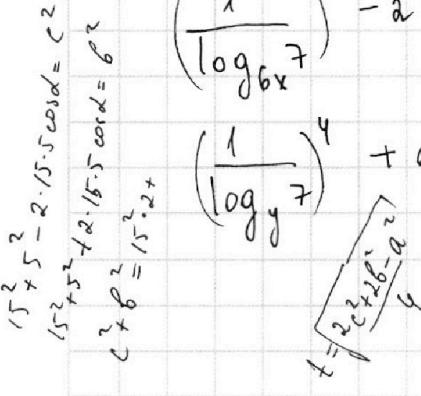


$$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7}\right)^4 - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

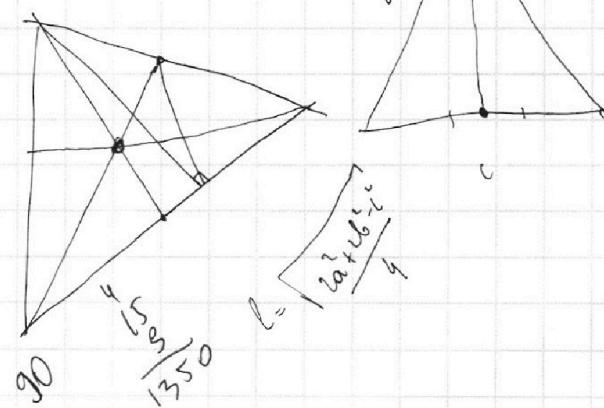
$$\left(\frac{1}{\log_y 7}\right)^4 + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$$



$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$



$$15^2 \cdot 4 \times 10^2 = 10^2 \cdot 26^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^7 3^{11} 5^{14}$$

$$5^{43} 3^{17} 2^{19}$$

$$4 \quad 43 \quad 18$$

$$bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$$

$$a = 2^3$$

$$32 \quad 75$$

$$ac: 2^{14} 3^{17} 5^{13}$$

$$b = 2^2$$

$$= x \sin \alpha$$

$$7 \quad 13 \quad 14$$

$$1 + 15 + 7 = 43$$

$$\arcsin(x) \sin(\alpha)$$

$$a = 2^{d_1} 3^{d_2} 5^{d_3}$$

$$d_1 + d_2 \geq 7 \quad 11 \quad 14$$

$$d_2 = 7 \quad d_3 = 20$$

$$b = 2^{p_1} 3^{p_2} 5^{p_3}$$

$$p_1 + p_2 \geq 13 \quad 15 \quad 17$$

$$p_2 = 4 \quad p_3 =$$

$$c = 2^{s_1} 3^{s_2} 5^{s_3}$$

$$s_1 + s_2 \geq 14 \quad 17 \quad 19$$

$$s_2 = 8 \quad s_3 = 28$$

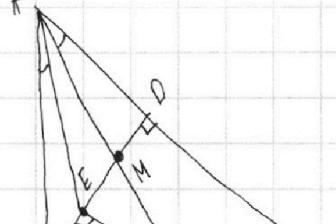
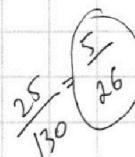
30

$$d_1 + p_1 + s_1 \geq 17$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$d_2 + p_2 \geq 14$$

$$24$$



$$p_2 + s_2 \geq 18$$

$$43 + 18 - 14 = 47$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{13}{10} \quad \text{II} = x \quad \frac{BD}{AD} = \frac{3}{2} \quad \text{II} = x \quad x + \frac{e}{118} = (x - \frac{2}{11})s$$

$$II = x$$

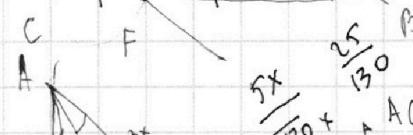
$$\frac{II - x}{II} = p \quad \frac{AD}{BD} = \frac{3}{10} \quad II = x \quad x + \frac{e}{118} = (x - \frac{2}{11})s$$

$$CD = x \sqrt{130} \quad \frac{II : e}{II} = p \quad [ \frac{2}{11} : 0 ] = p$$

$$x - \frac{e}{118} = p \quad x - \frac{e}{118} = \cos x \quad \cos x = \sin x \cos = p \sin x$$

$$\arccos(\cos x) = \arccos(p \sin x) = \arccos(p \sin x) = \arccos(p \sin x)$$

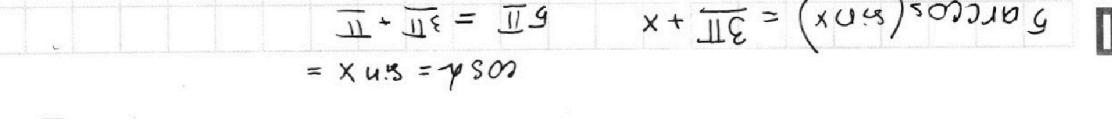
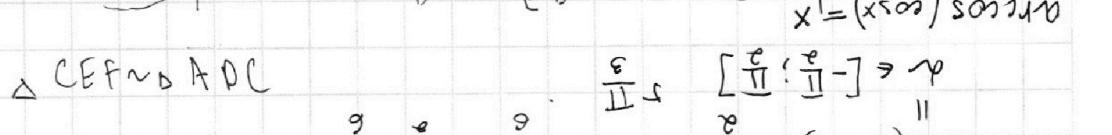
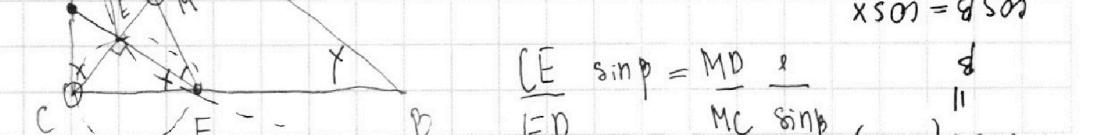
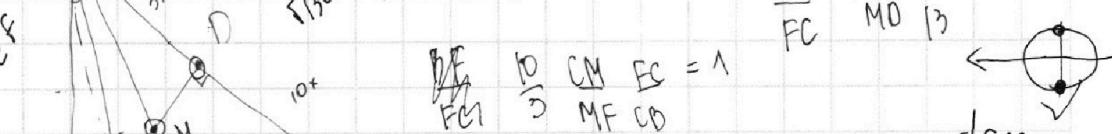
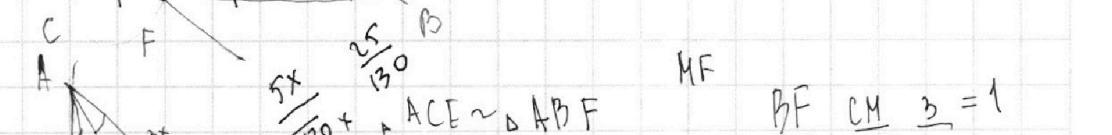
$$3 + \frac{e}{118} = \frac{\sqrt{130}}{2} \quad \frac{DC}{2} = \frac{\sqrt{130}}{2}$$



$$\frac{CE \cdot AB}{AC \cdot EF} = \frac{DC}{EF}$$

$$\frac{CE}{EF} = \frac{DC}{EF}$$

$$\frac{e}{118} = \frac{\sqrt{130}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$$\begin{aligned} & 6x > 0 \\ & 6x \neq 1 \\ & y > 0 \\ & y \neq 1 \\ & y \neq -1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & 36x^2 \neq 1 \\ & (\log_7 6x)^4 - 2 \frac{1}{\log_7 6x} = \log_a b \cdot \log_b a = 1 \\ & 7^3 \\ & 343 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7}\right)^4 - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\left(\frac{1}{\log_y 7}\right)^4 + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4 \quad t^4 = \frac{7}{2} \frac{1}{t} - 4$$

$$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7}\right)^4 = \frac{7}{2} \log_{6x} 7 - 4 \quad \frac{1}{\log_{6x} 7} \quad s^4 = -\frac{7}{2} - 4$$

$$\left(\frac{1}{\log_y 7}\right)^4 = -\frac{7}{2} \log_y 7 - 4 \quad t^4 + 4 \geq 4t^2$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{\log_x 7}\right)^4 + \frac{7}{2} \log_x 7 + 4 \quad \frac{7}{2} \quad o = t - \frac{7}{2} + \frac{7}{2} t^2$$

$$t^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} + 4 = 0$$

$$o = h + \frac{7}{2} + s \quad o = h + \frac{7}{2} - \frac{7}{2} t$$

$$h - \frac{7}{2} \frac{x}{60/5} = t \frac{7}{60/5} + (h + \frac{7}{2}) \quad h - t \frac{7}{60/5} = t \frac{7}{60/5} - (h + \frac{7}{2})$$