



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 3

- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- ✓ 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
- ✓ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✓ 5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
- а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
- б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.



- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~нам надо~~  
~~минимизировать если  $a, b, c \in \mathbb{N}$~~   
~~если есть такое~~  
~~число, то~~

~~( $a, b, c \in \mathbb{N}$ )~~

~~которое делится на  $a, b, c$ .~~

~~Предположим:~~

$$a \cdot b \cdot c = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$b \cdot c = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$$

$$a \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow c = 6 \cdot 2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^{24}$$

$$\Rightarrow b^2 = 2^2 \cdot 2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^{24} = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{2^6 \cdot 3^{12}}{5^{10}} \quad \# \Rightarrow b = \frac{2^3 \cdot 3^6}{5^5}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2^3 \cdot 3^6}{5^5}$$

$$\int a_5 + b_5 = 12 \quad \Rightarrow [a_5 - \text{это } 56]$$

~~значит  $a_5$ , не номер~~  
~~делитель число  $a_5$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

аналогично для  $b_5, c_5, a_3, b_3, c_3, a_2, b_2, c_2$  корень.

$$\begin{cases} b_5 + c_5 = 14 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases} \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 = 39 \Rightarrow a_5 = 12$$
$$\begin{cases} a_5 + b_5 + c_5 = 39 \\ b_5 + c_5 = 14 \end{cases} \Rightarrow b_5 = 0$$
$$\begin{cases} a_5 + b_5 + c_5 = 39 \\ b_5 + c_5 = 14 \end{cases} \Rightarrow c_5 = 17$$
$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 14 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ a_3 + c_3 = 22 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 = 28 \Rightarrow a_3 = 8$$
$$\begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 = 28 \\ b_3 + c_3 = 20 \end{cases} \Rightarrow b_3 = 6$$
$$\begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 = 28 \\ a_3 + c_3 = 22 \end{cases} \Rightarrow c_3 = 14$$
$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ b_2 + c_2 = 12 \\ a_2 + c_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 17$$
$$\Rightarrow a_2 = 5$$
$$\begin{cases} a_2 = 5 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow a : 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$$
$$b : 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{14}$$
$$c : 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$$
$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} = \boxed{2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}$$
$$\min(a \cdot b \cdot c) = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \quad \text{Домнож.: } [2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}]$$



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

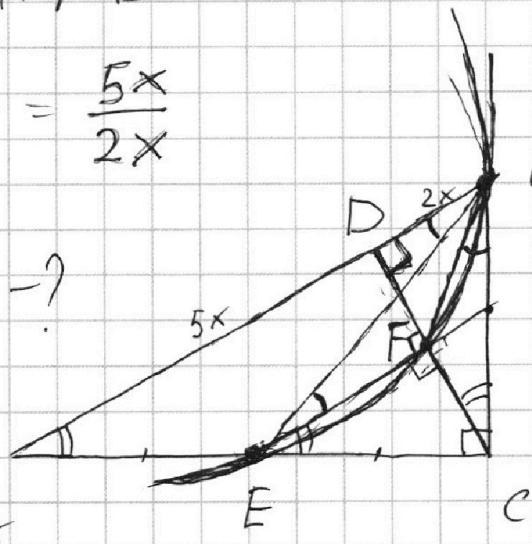
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$EF \parallel AB$$

нашансо Решение:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{5x}{2x}$$

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ECF}} - ?$$



$AB$  - шп.  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ.$$

$$AD = 5x \Rightarrow BD = 2x$$

$$\Rightarrow AB = 7x.$$

$$\begin{aligned} CD + AB &| \\ AB \parallel EF &| \Rightarrow EF \perp CD \end{aligned}$$

$$AB \parallel EF \Rightarrow \angle BAC = \angle FEC$$

"  
 $\triangle ABC \sim \triangle FEC$   
(но 2 угла)

$$\Rightarrow K = \left[ \frac{CE}{AB} \right] = \left[ \frac{CF}{BC} \right]. \quad (1)$$

$\angle CBF = \angle BEF$  (об-ко касательной и вто. угла)

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle BEF = \angle ABE$  (нашансо.)

$\Rightarrow \angle ABE = \angle CBF$ .

$$\angle CDB = \angle ACB = 90^\circ$$

$\angle ABC$  - односторон  
 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$

$\Rightarrow \angle BCD = \angle BAE$   $\Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle AEB$   
(но 2 угла)

$$\Rightarrow \frac{CF}{AE} = \frac{BC}{AB} \quad \cancel{\text{или}} \quad \Rightarrow CF = AE \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$(1): \quad CE = AB \cdot \frac{CF}{BC}$$

$$\Rightarrow CE = AB \cdot \frac{AE \cdot \frac{BC}{AB}}{BC} = AE$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(кофейка)

$$\triangle ABC: AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{5+4+} = x\sqrt{35}$$

$$AE = CE \Rightarrow CE = \frac{x\sqrt{35}}{2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{CE}{AB} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}}{7x} = \frac{\sqrt{35}}{14} = \sqrt{\frac{5}{28}}$$

$$K^2 = \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{5}{28} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5} = 5,6$$

Объем: 5,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = \pi - 2x$$

начало

~~ВИДЕОУЧЕБНИК~~

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos x) - 2x = 4\pi$$

$$\arccos(\cos x) = x \text{ при } x \in [0; \pi]$$

$$10x - 2x = 4\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \text{найдем } \checkmark$$

Решение:  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$\arcsin(\cos x) \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$$

рассмотрим все возможные случаи:  $-2\pi \leq x \leq 3\pi$

$$x \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = 2\pi - x$$

$$\Rightarrow 10(2\pi - x) - 2x = 4\pi$$

$$20\pi - 10x - 2x = 4\pi$$

$$12x = 16\pi \quad x = \frac{4\pi}{3} - \text{найдем } \checkmark$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in [2\pi; 3\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x - 2\pi \quad \text{корректно}$$

$$\Rightarrow 10(x - 2\pi) - 2x = 4\pi$$

$$10x - 20\pi - 2x = 4\pi$$

$$8x = 24\pi$$

$$x = 3\pi \quad \text{найдено} \checkmark$$

$$x \in [-\pi; 0] \Rightarrow \arccos(\cos x) = -x$$

$$\Rightarrow 10(-x) - 2x = 4\pi$$

$$-12x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{найдено} \checkmark$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x + 2\pi$$

$$\Rightarrow 10(x + 2\pi) - 2x = 4\pi$$

$$10x - 2x + 20\pi = 4\pi$$

$$8x = -16\pi$$

$$x = -2\pi \quad \text{найдено} \checkmark$$

Ответ:  $x \in \left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

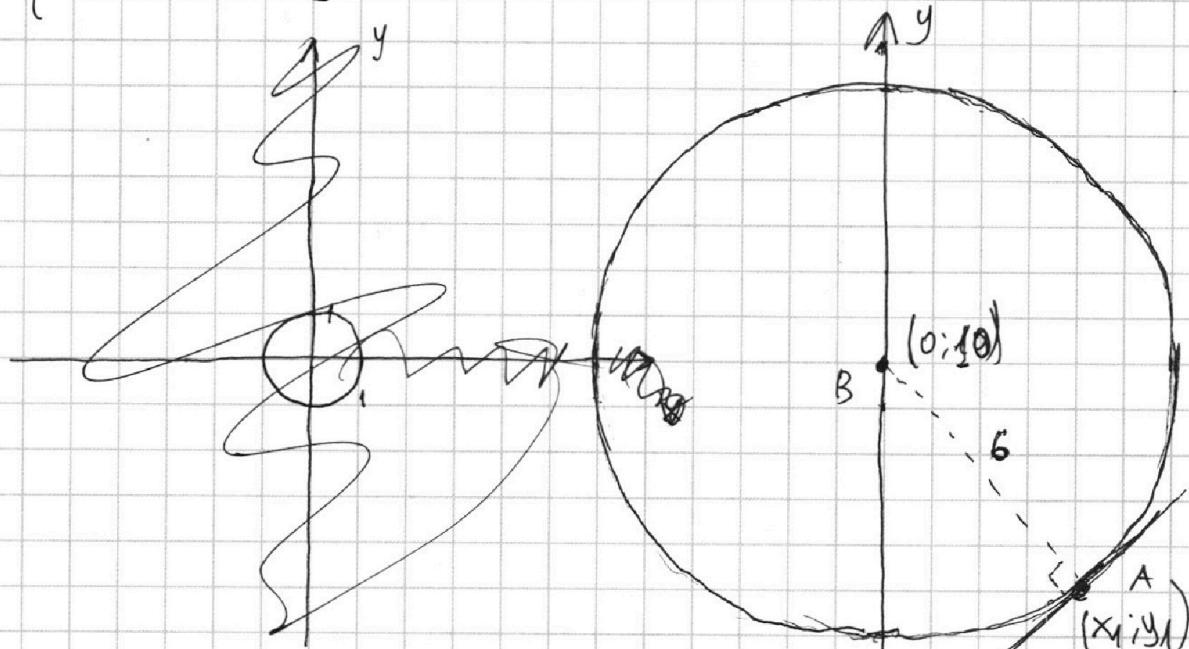
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нахождение

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

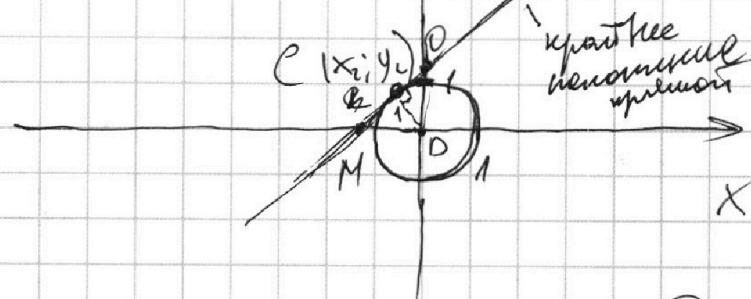
$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-10)^2 - 36) = 0 \\ ax - 3y + 4b = 0 \quad (1) \end{cases}$$



$$(1): ax - 3y + 4b = 0$$

$$3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$



а винесем на учен показате прими,

b - на ~~но~~ притягательство ~~но~~ а

$(0, \frac{4}{3}b)$  ~~знач~~ то, показатель прими  
зигем подъема.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

$\overrightarrow{AB} \{x_1; y_1 - 10\}$

$\overrightarrow{BAE} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$

$\Rightarrow x_1(x_2 - x_1) + (y_1 - 10)(y_2 - y_1) = 0$

$x_1^2 + (y_1 - 10)^2 = 36 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - 20y_1 + 100 = 36$

$\overrightarrow{DC} \{x_2; y_2\}$

$\Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 - 10y_2 + 10y_1 - 20y_1 + 100 = 36$

$x_1x_2 + y_1y_2 - 10y_2 - 10y_1 + 64 = 0$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)x_2 + (y_2 - y_1)y_2 = 0$

$x_2 - x_1x_2 + y_2 - y_1y_2 = 0$

$x_1x_2 + y_1y_2 = 1$

$\Rightarrow -10y_2 - 10y_1 + 100 + 64 = 0$

$y_1 + y_2 = 6,5$

$\triangle CDO \sim \triangle ABO$  ( ~~$AB \parallel CD$~~ )  
( $CD \perp AO, AB \perp AO$ )

$$\Rightarrow \frac{DO}{BO} = \frac{1}{6} \Rightarrow OD = \frac{1}{6} BD = \left(\frac{10}{7}\right)$$

$$CO = \sqrt{\frac{100}{48} - \frac{48}{48}} = \frac{\sqrt{51}}{4}$$

( $\cos D$ )

$$\angle MOO - \text{одна из } COO \text{ и } DOO$$

$$\angle OCO = \angle MOO = 90^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \triangle OCD \sim \triangle ODM$  (по 2 умн.) | корр.

$$\Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{DO}{CO} \Rightarrow DM = 1 \cdot \frac{\frac{10}{\sqrt{51}}}{\frac{10}{\sqrt{51}}} = \frac{10}{\sqrt{51}}$$

уравнение касательной AC  
(помимо О и M)

$$\Rightarrow \frac{y - OD}{O - CD} = \frac{x - O}{-DM - O}$$

$$\frac{y - \frac{10}{\sqrt{51}}}{-\frac{10}{\sqrt{51}}} = \frac{x}{\frac{-10}{\sqrt{51}}} \Rightarrow \left( y - \frac{10}{\sqrt{51}} \right) \sqrt{51} =$$

$$\Rightarrow y - \frac{10}{\sqrt{51}} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{51}} x \quad \begin{array}{l} \text{б это штуче} \\ \text{не делай 2x корней} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{51}} \Rightarrow a = 3 \cdot \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{51}} \quad \begin{array}{l} 1 \\ \text{— правильное} \\ \text{напоминание} \\ \text{касательной} \end{array}$$

~~$\frac{3\sqrt{51}}{\sqrt{51}}$   $\Rightarrow$  аналогично~~  
чуть больше пойдёт синий цвет с  
4-ми корнями, чуть меньше — и я  
не буду. напоминание штучек  
но могу что-нибудь испортить. Отрицательные.

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{\sqrt{51}}) \cup [\frac{3\sqrt{51}}{\sqrt{51}}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \quad \text{начало}$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$$

$$xy - ?$$

Решение:

$$x \neq 1$$

$$\cancel{\log_5(2x)} - \frac{3}{\cancel{\log_5(2x)}} = \cancel{\log_5(2x)} - 3$$

$$\cancel{\log_5^4(2x)} - \frac{4}{\cancel{\log_5(2x)}} + 3 = 0$$

$$\cancel{\log_5^4(2x)} + 3 \cancel{\log_5(2x)} - 4 = 0$$

$$\begin{cases} \log_5(2x) = 1 \\ t^4 + t^3 + t^2 + t + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(\log_5(2x) \neq 0)$$

$$\Rightarrow x = 2,5$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3$$

$$3 \log_5^4 y + 11 \cancel{+ 9} \log_5 y = 0$$

$$(\log_5 y \neq 0)$$

$$y \neq 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3\log_5(2x)} - 3$$

$$3\log_5^5(2x) + 9\log_5(2x) - 13 = 0.$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3$$

$$\begin{cases} \log_5 2x \neq 0 \\ \log_5 y \neq 0 \\ y \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+9 \quad \left( 3\log_5^5 y + 9\log_5 y + 13 = 0 \right)$$

$$3\log_5^5(2x) + 9\log_5(2x) - 13 = 0$$

$$\Rightarrow \log_5^5(2x) + \log_5^5 y + 3\log_5 2x + 3\log_5 y = 0$$

$$\Rightarrow \log_5^5 2x = -\log_5^5 y$$

$$2x = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

Ответ: ~~0,5~~ 0,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

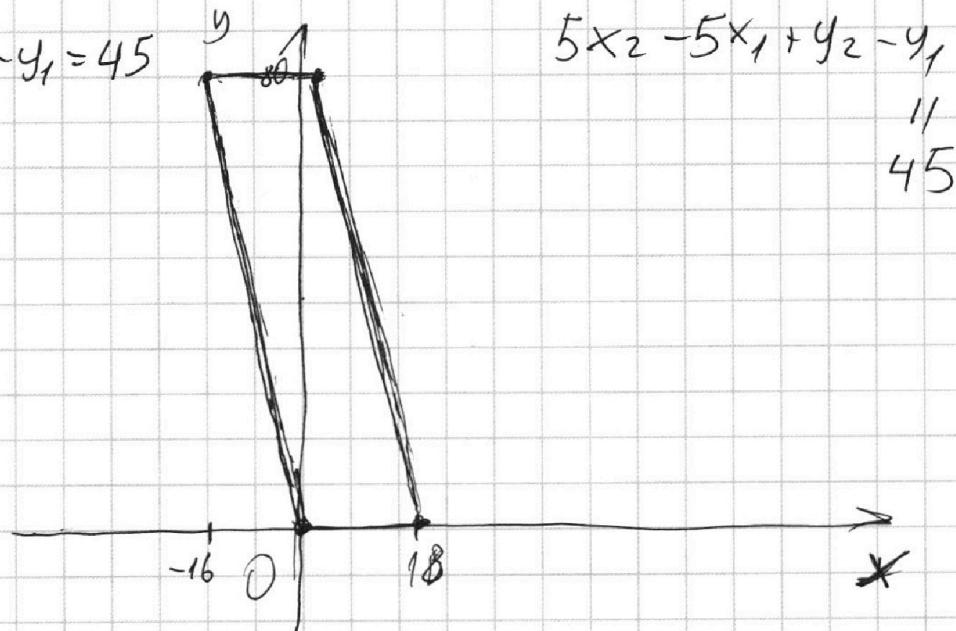
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 : 5$$



$$0 \leq y_2 \leq 80$$

$$0 \leq y_1 \leq 80$$

$$-80 \leq -y_1 \leq 0 \Rightarrow -80 \leq y_2 - y_1 \leq 80$$

- |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                                     |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input checked="" type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|

**МФТИ.**Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{ABC} = 100$$

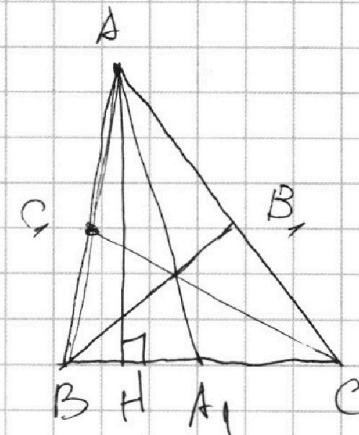
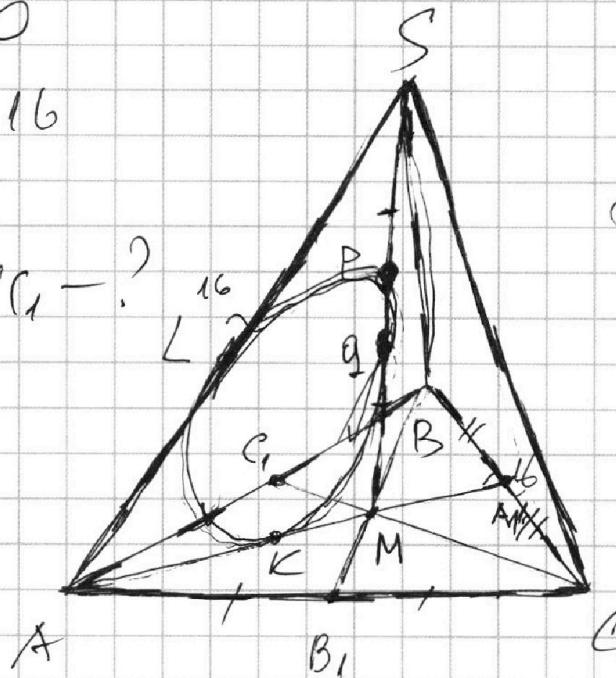
$$SA = BC = 16$$

 $\approx S$ 

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$SN = 4$$

$$R = 5$$

 $\triangle ASM$ :

$$SP = MQ \Rightarrow SQ = PM$$

$$\Rightarrow SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot PM = KM^2$$

$$\Rightarrow SL = KM$$

$$AL = AK$$

(об. тоо ~~некам~~ из момч.)

$$\Rightarrow AS = AM = 16$$

~~ЗАМЕЧАНИЕ~~

$$\Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24.$$

$$\text{где } AH \perp BC; AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 100}{16} = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow A_1H = \sqrt{24^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \sqrt{1152 - 625} = \frac{\sqrt{527}}{2}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow CH = A_1C + A_1H = \frac{\sqrt{524}}{2} + \cancel{8}$$

$\frac{1}{2} BC$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{625}{4} + \frac{524}{4} + 64 + 8\sqrt{527}} =$$

=



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_5 2x + 5 = \log_5 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3$$

$$3 \log_5^4(2x) - \cancel{3 \log_5 2x} \\ - 9 - 4 + 3 \log_5 2x = 0$$

$$3 \log_5^4(2x) + 3 \log_5 2x - 13 = 0$$

$$\log_5^4(2x) (\log_5 2x + 1) = - \log_5^4(9) / \log_5(4+1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

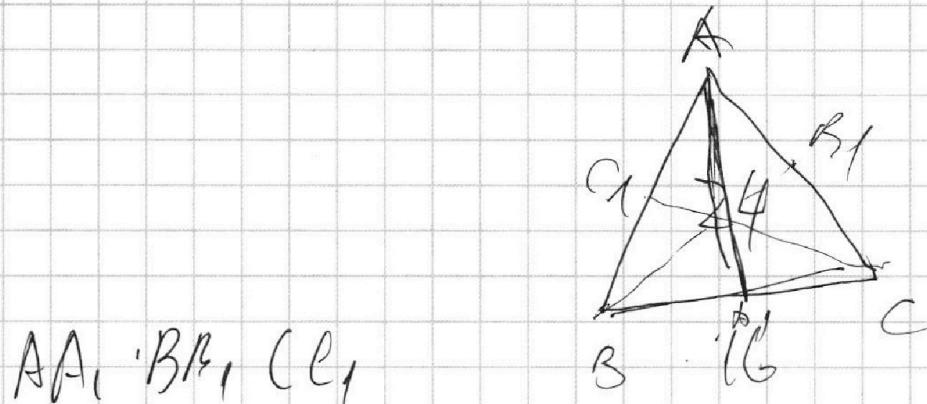
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 9x + 11 \\ 3x^5 \\ \hline 3x^4 \\ 3x^3 \\ - 3x^2 + 9x \\ \hline 3x^2 - 3x \end{array}$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_2x + 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\begin{array}{r} x^5 + 3x - 4 \\ \hline t^4 + t^3 + t^2 + t + 4 = 0 \end{array}$$

$$t^2 + t + 1 + \frac{1}{t} + \frac{4}{t^2} = 0$$

$$t + \frac{1}{t} = x$$

$$x^2 = t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}$$

$$\begin{array}{r} x^5 + 3x - 4 \\ x^5 - x^4 \\ \hline x^4 + x^3 + x^2 \\ x^4 + x^3 \\ - x^3 \\ \hline x^2 + 3x \\ x^2 - x \\ \hline 4x - 4 \end{array}$$

$$4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = 0$$

Все корни вещественны.

$$12t^2 + 6t + 2 = 0 \leftarrow k/4.$$

$\rightarrow$  упр. 1 упр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

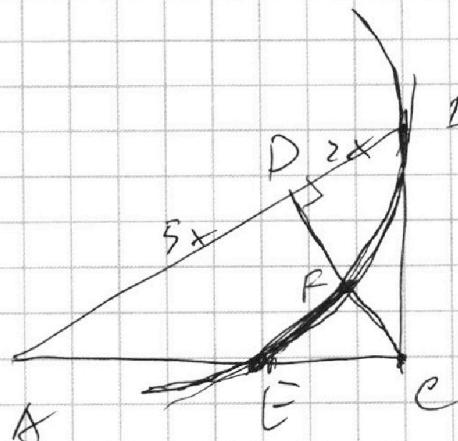
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1      2      3      4      5      6      7

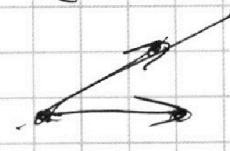
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CE = AB \cdot \frac{CF}{BC} = AB \cdot \frac{AE \cdot BE}{AB \cdot BC} = AE$$

$$AE = CE$$



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$ax + 6y + c = 0$$

$$6 = \sqrt{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{1a + 2b}{\sqrt{r}}$$

$$0 =$$

$$\phi/\theta$$



$$y = x$$

$\{a, b\}$  - исср.  
пересеч.

$$\{(1-x_1); (2-y_1)\}$$

$$\{x_1-x_2; y_1-y_2\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

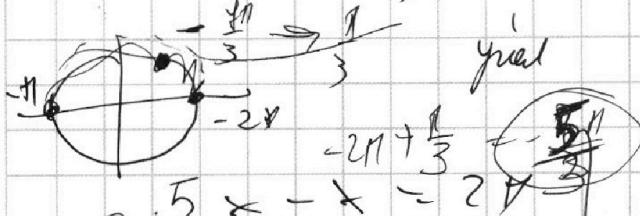
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

$$\arccos(\cos x) = \cancel{x}$$

$$x \in$$



$$4x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$5\pi = \pi - \pi$$

$$\arccos(\cos \frac{4\pi}{3}) = \arccos(-\frac{1}{2})$$

$$x \neq 2\pi$$

$$-\frac{1}{2} \quad \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$10x + 20\pi - 2x = 9\pi$$

$$8x = -16\pi$$

$$x = -\frac{2\pi}{1}\cancel{\pi}$$

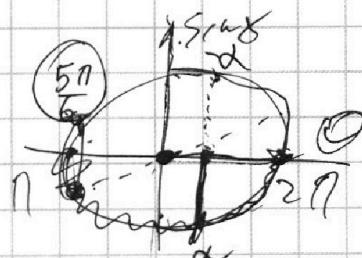
$$10x + \cancel{20\pi} = \pi - 2\cancel{x} \quad \frac{1152}{625} \quad \pi - 2x > 0$$

$$x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$100 - 100x^2 = \pi^2 + 4x^2 = 4\pi x$$

$$\frac{24}{64} \quad \frac{1}{4}$$

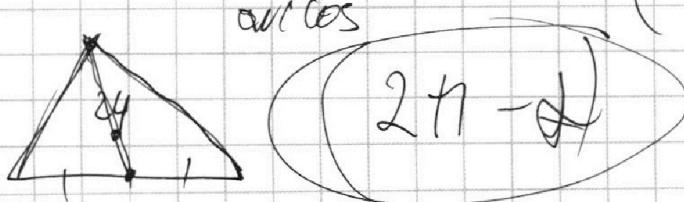
$$\arccos(\cos x) = 2 \cdot \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \frac{3\pi}{2} \rightarrow \cancel{4\pi}$$



$$\checkmark$$

$$\frac{4\pi}{6} \rightarrow \frac{2\pi}{3}$$

$$(x + \pi) \quad \frac{11}{2} \quad \frac{546}{1152} - \frac{8}{1152} \quad \frac{625}{527}$$



$$10 \arccos(\cos x) - 2x = 4\pi$$

16

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9, 6, C

a<sup>b</sup>

$$: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$b \cdot c : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$$

$$a \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

$$\Rightarrow b = 2^{8-x} \cdot 3^{14-y} \cdot 5^{12-z}$$

$$a = \frac{2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{b}$$

$$1152$$

$$128$$

$$1280$$

$$\begin{array}{r} 1280 \\ 1280 \\ \hline 0 \end{array}$$
  
$$370 + 8\sqrt{524}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$(a+b+c=24)$$

$$12+14=26$$

$$\begin{array}{l} a : 5^{12} \\ c : 5^{14} \end{array}$$

$$14+a=c$$

$$14=a+b$$

$$20=b+c$$

$$22=a+c$$

$$\begin{array}{r} 1152 \\ 256 \\ \hline 1408 \end{array}$$
  
$$\begin{array}{r} 1408 \\ 12 \\ \hline 20 \end{array}$$
  
$$20$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ 4 \\ \hline 26 \end{array}$$
  
$$b$$