МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

№1 $\quad a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \,\vdots\, 2^{9}3^{10}5^{10}$

$bc \,\vdots\, 2^{14}3^{13}5^{13}$

$ca \,\vdots\, 2^{19}3^{18}5^{30}$

$\Rightarrow (abc)^2 \,\vdots\, 2^{9+14+19}\cdot 3^{10+13+18}\cdot 5^{10+13+30}$

$(abc)^2 \,\vdots\, 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}$

(*) Для $x, p, \alpha \in \mathbb{N}$, если $x^2 \,\vdots\, p^{\alpha}$, то $x \,\vdots\, p^{\lceil \frac{\alpha}{2} \rceil}$, иначе если $\alpha = 2n+1$, а $\deg_p(x) \le n$, то $\deg_p(x^2) \le 2n < 2n+1$

$\Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{\lceil \frac{42}{2} \rceil}\cdot 3^{\lceil \frac{41}{2} \rceil}\cdot 5^{\lceil \frac{53}{2} \rceil} = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}$

Заметим, что $ac \,\vdots\, 5^{30} \Rightarrow abc \,\vdots\, 5^{30}$

$\Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30} \Rightarrow$ ~~abc~~ $abc \geq 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

Тогда пусть

$a = 2^{7}\cdot 3^{8}\cdot 5^{15}$

$b = 2^{2}\cdot 3^{3}\cdot 5^{0}$

$c = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{15}$

$a\cdot b\cdot c = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

$\boxed{\text{Ответ: } abc \geq 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}}$

(*) Здесь $\lceil \frac{\alpha}{2} \rceil$ – округление вверх до целого, $\deg_p(x)$ – степень вхождения числа p в x, $n \in \mathbb{N}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

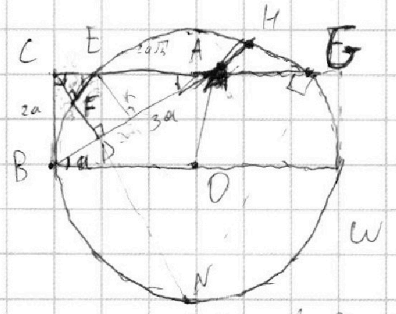
МФТИ

№ 2

Пусть ω - данная в условии окружность

CD проведена к гипотенузе

$\Rightarrow$ AB - гипотенуза



Дано:

$AB \parallel EF$

$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

OB касается BC в B $\Rightarrow OB \perp BC$

(O - центр окружности ω)

1) $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1} \Rightarrow$ Пусть $BD = a$; тогда $AD = 3a$

2) $\angle ACB = 90° \Rightarrow CD^2 = BD \cdot AD = a \cdot 3a$

$CD = a\sqrt{3}$

3) в $\triangle ACD$: $\angle ADC = 90° \Rightarrow$ т. Пифагора: $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 2a\sqrt{3}$

4) аналогично в $\triangle BCD$: $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 2a$

5) заметим, что в $\triangle ABC$ гипотенуза $AB = 4a$

катет $BC = 2a$

$\Rightarrow \angle BAC = 30° \Rightarrow \angle ABC = 60°$

6) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2\sqrt{3}$

7) $OB \perp BC \Rightarrow \angle OBC = 90°$; $\angle ABC = 60° \Rightarrow \angle ABO = \angle OBC - \angle ABC = 30°$

тогда $\angle BAC = \angle ABO = 30° \Rightarrow AC \parallel BO$

8) Продлим CA до повторного пересеч. с окружностью, получим G

BA до пересеч. с окружностью получим H

9) $EF \parallel BA \Rightarrow EF \parallel BH$; B, F, E, H лежат на одной окружн.

$\Rightarrow$ BFEH - равнобокая трапеция

$\Rightarrow$ если опустить высоту $EK \perp BH$, то $KH = BD = a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

10) $CB^2 = CE \cdot CG = (2a)^2 = 4a^2$ (степень точки C отн. ω ~~окружности~~)

$EA \cdot AG = BA \cdot AH$ (пересекающиеся хорды)

11) $EF \parallel AB \Rightarrow EF \parallel AD \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$

12) $EF \parallel AD \Rightarrow \angle CEF = \angle CAB = 30^\circ$
$\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$ $\Rightarrow \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{1}{2} CE$

13) Продлим CD до пересеч. с ω - получим N

тогда $CN \cdot CF = CE \cdot CG$

~~$CE \cdot CN = \frac{1}{2} CF \cdot CG$~~

$\frac{1}{2} CE \cdot CN = CE \cdot CG$

$\frac{1}{2} CN = CG$

14) в $\triangle CNG$: $\angle NCG = 60^\circ$

$CN = 2 \cdot CG \Rightarrow NG^2 = CG^2 + NC^2 - 2\cos 60^\circ \cdot CG \cdot NC$

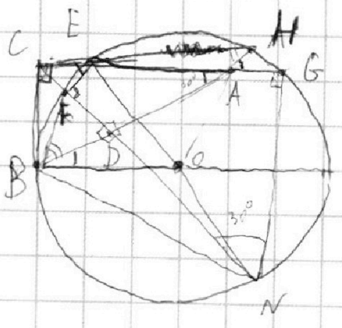
$NG^2 = CG^2 + 4CG^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot CG \cdot 2 \cdot CG =$

$= 5CG^2 - 2CG^2 = 3CG^2 =$

$\Rightarrow CN^2 = 4CG^2 = CG^2 + NG^2 \Rightarrow \angle CGN = 90^\circ$

$\angle EGN$

EN - диаметр ω



15) $S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FE$

Пусть $CF = b$; тогда $CE = 2b$

$FE = b\sqrt{3}$

$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b\sqrt{3} = b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{b^2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \cdot \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{2a}{b}\right)^2 = X^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

16) $CE \cdot CG = 4a^2$ (из 10))

$2b \cdot CG = 4a^2$

$CG = \frac{2a^2}{b}$; $CN = 2 \cdot CG = \frac{4a^2}{b}$

17) $\triangle ABC \sim \triangle CNG \Rightarrow \frac{BC}{CG} = \frac{AB}{CN} = \frac{2a}{\frac{2a^2}{b}} = \frac{b}{a}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CNG}} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{2}{x}\right)^2$

$\frac{S_{CEF}}{S_{CNG}} = \frac{\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{CNG}}{S_{ABC}}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{4}{x^4} = \left(\frac{2}{x^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{CN}{CE} = \frac{x^2}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$\arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow 5\arcsin(t) \in \left[-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$

$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$

$x \in [-3\pi; \pi]$

$$\arcsin(\cos x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & \text{если } x \in [0; \pi] \quad (1) \\ \frac{\pi}{2} + x, & \text{если } x \in [-\pi; 0] \quad (2) \\ \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi), & \text{если } x \in [-2\pi; -\pi] \quad (3) \\ \frac{\pi}{2} + (x + 2\pi), & \text{если } x \in [-3\pi; -2\pi] \quad (4) \end{cases}$$

(это следует из того, что $\arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и из (1))

(1): $x \in [0; \pi]$

$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$

~~$4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2x \Rightarrow x = \pi$~~ $\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \frac{4}{2}\pi = 6x$

$x = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3}$

(2) $x \in [-\pi; 0)$

$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5}{2}\pi + 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{4}{2}\pi = -4x \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3};\ x = -\frac{\pi}{2};\ x = -\frac{4}{3}\pi;\ x = -3\pi}$$

(3) $x \in [-2\pi; -\pi]$

$5\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\pi\right) - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{15}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = 6x$

$-\frac{16}{2}\pi = 6x \Rightarrow x = -\frac{16}{12}\pi = -\frac{4}{3}\pi$

(4) $x \in [-3\pi; -2\pi]$

$5\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$5 \cdot \frac{5}{2}\pi + 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{25}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = -4x$

$-4x = \frac{24}{2}\pi \Rightarrow x = -3\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 стр. 1

все a | $\exists b$, система имеет ровно 4 реш.

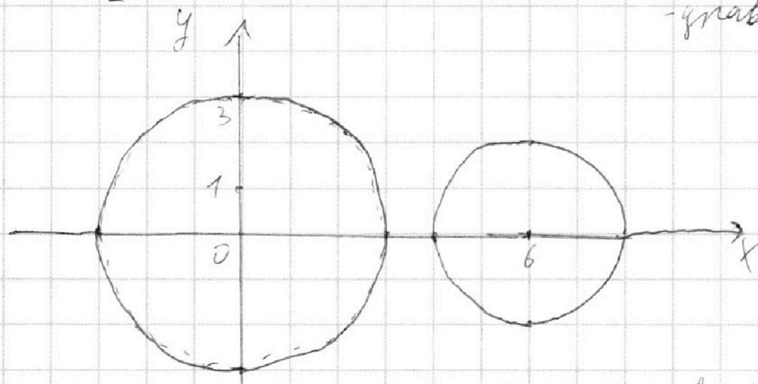
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (2) \end{cases}$$

(2): произведение $=0 \Leftrightarrow$ хотя бы 1 из множителей равен 0

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x^2-12x+36)+y^2=2^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{array}\right.$$

- уравнения двух окружностей



окружности не пересекаются, т.к. в первом уравнении $|x| \le 3$ $\Rightarrow -3 \le x \le 3$

во втором $|x-6| \le 2$

$-2 \le x-6 \le 2$

$4 \le x \le 8$

уравнение (1) - это прямая

1) если $a=0$: $0x+2y-3b=0$

$y=\frac{3}{2}b$ → горизонтальная прямая

очевидно, что у системы 4 решения при $b=0$

$\Rightarrow$ $a=0$ подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 стр. 2

2) если $a \neq 0$:

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \quad \to \text{прямая}$$

каждое $\frac{3}{2}b$ позволяет $\parallel$ переносить нашу прямую ~~[illegible]~~

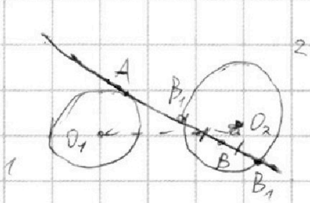
Тогда для какого-то $a_0 \neq 0$; b_0

Лемма: если прямая $y = -\frac{a_0}{2} + \frac{3}{2}b_0$ пересекает окружности хотя бы по трём точкам, то найдется b_1 такое, что прямая $y = -\frac{a_0}{2} + \frac{3}{2}b_1$ пересекает окружности по 4 точкам

$\triangle$ Док-во: если точек пересеч. хотя бы 4, то $b_1 = b_0$

если их ровно 3: прямая и окружность имеют не более 2 общих точек

$\Rightarrow$ такая прямая касается одной окружности и пересекает по 2 точкам другую:



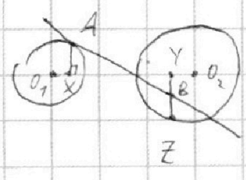
O_1O_2 - линия центров,

A - точка касания окр. 1 и прям.

B_1; B_2 - точки пересеч. окр. 2 и прям.

Тогда ~~в~~ пусть B - середина B_1B_2

опустим перпендикуляр из A на O_1O_2, (X) из B на O_1O_2 (Y) и продлим его ~~до~~ за точку B до пересечения с окр. 2 (Z)



пусть Δb → длина наименьшего из отрезков AX; BY, BZ

Тогда для $b_1 = b_0 + \frac{1}{10}\Delta b$

или $b_1 = b_0 - \frac{1}{10}\Delta b$

прямая сместится вверх или вниз на $\frac{3}{20}\Delta b < \Delta b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 стр. 3

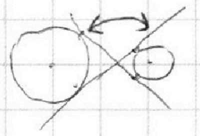
Док-во леммы (продолжение): при смещении прямой на $\pm\frac{3}{20}\Delta b$ пересечение прямой и окр. 2 всё еще 2 точки; пересеч. с O_1 — либо 2, либо 0 точек. ~~[illegible]~~ (если A выше X, то сдвинем на $-\frac{3}{20}\Delta b$, иначе на $+\frac{3}{20}\Delta b$)

Тогда пересеч. прямой $-\frac{a_0}{2}+\frac{3}{2}b_1$ — 2 точки

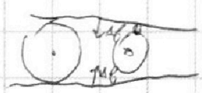
$\Rightarrow$ всего 4 точки пересеч. $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ существует искомое b

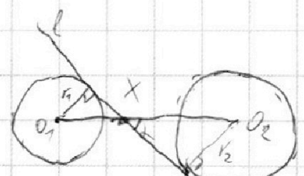
$\Rightarrow$ Подходят все такие a, что при касании с одной окружностью прямая пересекает другую

$\Rightarrow$ Не подходят те, у которых $\angle$ наклона либо совпадает с одной из внутр. касательных, либо лежит между ними:



(для внешних касательных действуем по алгоритму, описанному в лемме:





l - прямая
O_1, O_2 - центры окружн.
r_1, r_2 - радиусы соотв. окружн.
$X = l \cap O_1O_2$

если α - угол наклона, то $O_1X\cdot\sin\alpha = r_1$
$O_2X\cdot\sin\alpha = r_2$
$\Rightarrow (O_1X+O_2X)\cdot\sin\alpha = r_1+r_2$
$O_1O_2\cdot\sin\alpha = r_1+r_2$

$\sin\alpha = \frac{r_1+r_2}{O_1O_2}$ (с точностью до знака)

Тогда подставляя числа: $\sin\alpha = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 стр. 4

$tg\,\alpha_1 = \frac{5}{\sqrt{11}}$; $tg\,\alpha_2 = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

$\Rightarrow$ „неподходящие" $-\frac{a}{2} \in \left[\frac{5}{\sqrt{11}}; +\infty\right) \cup \left(-\infty; -\frac{5}{\sqrt{11}}\right]$

тогда: $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}\right] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$

4) Ответ: $\cancel{a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}\right)}$ $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 $\boxed{\text{Ответ: } \frac{1}{5}}$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$; $x \neq 1$

$y > 0$; $y \neq \frac{1}{5}$

Замена: $\log_3 x = a$; $a \neq 0$

$\log_3 5y = b$; $b \neq 0$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot \log_x 3 - 8 = \frac{5}{2a} - 8 & (1) \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot \log_{5y} 3 - 8 = \frac{11}{2b} - 8 & (2) \end{cases}$$

$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5y\cdot x = a+b$

$5xy = 3^{a+b}$

$xy = \frac{3^{a+b}}{5}$

$\Rightarrow$ все возможные xy задаются возможными $(a+b)$

(1) − (2): $a^4 - b^4 + \frac{6}{a} - \frac{2}{b} = \frac{5}{2a} - \frac{11}{2b}$

$(a^2+b^2)(a+b)(a-b) + \frac{6b-2a}{ab} = \frac{5b-11a}{2ab}$

$a^4 - b^4 = \frac{5b-11a}{2ab} - \frac{12b-4a}{2ab}$

$a^4 - b^4 = \frac{5b-11a-12b+4a}{2ab} = \frac{-7a-7b}{2ab} \Rightarrow a^4 - b^4 = \frac{-7}{2a} - \frac{7}{2b}$

$(a^2+b^2)(a+b)(a-b) = -\frac{7}{2ab}(a+b)$

$(a+b)\left((a^2+b^2)(a-b) + \frac{7}{2ab}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \Rightarrow xy = \frac{3^0}{5} = \frac{1}{5} \\ (a^2+b^2)(a-b) + \frac{7}{2ab} = 0 \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} a^4 + b^4 + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5}{2a} + \frac{11}{2b} - 16 \\ a^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8a \\ b^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8b \end{cases}$$

$$a^4 + b^4 + \frac{12}{2a} - \frac{5}{2a} + \frac{4}{2b} - \frac{11}{2b} + 16 = 0$$

$$a^4 + b^4 + \frac{7}{2a} - \frac{7}{2b} + 16 = 0$$

но $\quad a^4 - b^4 + \frac{7}{2a} + \frac{7}{2b} = 0$

$$\Rightarrow \quad 2a^4 + \frac{7}{a} + 16 = 0$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{7}{2a} + 8 = 0 \\ b^4 - \frac{7}{2b} + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^4 - \frac{7}{2b} = 0$$

$$b^4 = \frac{7}{2b}$$

$$2b^5 = 7 \Rightarrow b^5 = \frac{7}{2} \Rightarrow b = \sqrt[5]{\frac{7}{2}}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 7 + 16a = 0 \\ 2b^5 - 7 + 16b = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

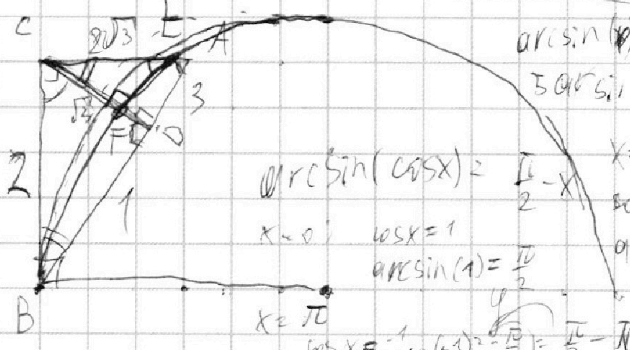
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

№ 2



$\arcsin(\varphi) \in [0; \pi]$

$5\arcsin(\varphi) \in [0; 5\pi]$

$AB \parallel EF \Rightarrow$ $x + \frac{\pi}{2} \in [0; 5\pi]$

$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$ $x \in [-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi]$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$x = 0$ $\cos x = 1$

$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CBF}} = ?$

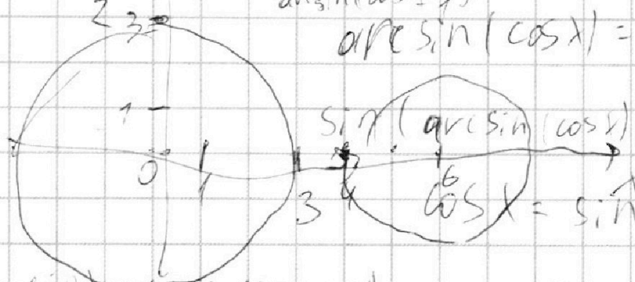
$\cos x = -1$ $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi$

$x = -\pi$ $\arcsin(\cos -\pi) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} = -\pi + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$



$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$

$\cos x = \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})$

$(x-6)^2 + y^2 = 2^2$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

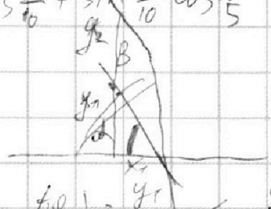
$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$

$\sin(0 + \frac{\pi}{2}) = \sin 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos 0 = 1$

$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}) = \sin\frac{x}{5} \cdot \cos\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{x}{5}$



$-\frac{a}{2} \in [x; +\infty)$

$-\frac{a}{2} \geq x$

$\frac{a}{2} \leq -x$ $a \leq -2x$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x} < \frac{y_2}{x} = \operatorname{tg}\beta$

$\arcsin(\cos x) = \varphi$

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\varphi$

$\cos x = \sin\varphi$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ $\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\varphi$

$\frac{\pi}{2} - x = \varphi$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow 2\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$