



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Разложения a, b, c на простые множители

Пусть в разложении на простые множители числа a : двойка имеет степень d_1 , тройка - d_2 , пятёрка - d_3 ; в разложении числа b : двойка - β_1 , тройка - β_2 , пятёрка - β_3 ; в разложении числа c : двойка - δ_1 , тройка - δ_2 , пятёрка - δ_3 . Т.е:

$$a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot p, \text{ где } p \in \mathbb{N}, p \neq 2, 3, 5$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot q, \text{ где } q \in \mathbb{N}, q \neq 2, 3, 5$$

$$c = 2^{\delta_1} \cdot 3^{\delta_2} \cdot 5^{\delta_3} \cdot w, \text{ где } w \in \mathbb{N}, w \neq 2, 3, 5$$

$$a \cdot b = 2^{d_1 + \beta_1} \cdot 3^{d_2 + \beta_2} \cdot 5^{d_3 + \beta_3} \cdot p \cdot q = (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}) / (p \cdot q \cdot 2, 3, 5)$$

Значит, $\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 6 & (1) \\ d_2 + \beta_2 \geq 13 & (2) \\ d_3 + \beta_3 \geq 11 & (3) \end{cases}$

$$b \cdot c = 2^{\beta_1 + \delta_1} \cdot 3^{\beta_2 + \delta_2} \cdot 5^{\beta_3 + \delta_3} \cdot q \cdot w = (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}) / (q \cdot w \cdot 2, 3, 5)$$

Значит, $\begin{cases} \beta_1 + \delta_1 \geq 14 & (4) \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 21 & (5) \\ \beta_3 + \delta_3 \geq 13 & (6) \end{cases}$

$$a \cdot c = 2^{d_1 + \delta_1} \cdot 3^{d_2 + \delta_2} \cdot 5^{d_3 + \delta_3} \cdot p \cdot w = (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{18}) / (p \cdot w \cdot 2, 3, 5)$$

Значит, $\begin{cases} d_1 + \delta_1 \geq 16 & (7) \\ d_2 + \delta_2 \geq 25 & (8) \\ d_3 + \delta_3 \geq 28 & (9) \end{cases}$

(1), (4) и (7):

$$\begin{cases} p + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 14 \\ d_1 + \beta_1 \geq 16 \end{cases}; \quad 2(d_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 36; \quad d_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 18$$

(2), (5) и (8):

$$\begin{cases} d_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 21 \\ d_2 + \delta_2 \geq 25 \end{cases}; \quad 2(d_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 59; \quad d_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 29 \frac{1}{2}$$

(3), (6) и (9):

$$\begin{cases} d_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \delta_3 \geq 13 \\ d_3 + \delta_3 \geq 28 \end{cases}; \quad 2(d_3 + \beta_3 + \delta_3) \geq 57; \quad d_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 28$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{d_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 3^{d_2 + \beta_2 + \delta_2} \cdot 5^{d_3 + \beta_3 + \delta_3} \cdot p \cdot q \cdot w \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

Миним. значение $(d_1 + \beta_1 + \delta_1) = 18$; $(d_2 + \beta_2 + \delta_2) = 30$ ($d_2, \beta_2, \delta_2 \in \mathbb{Z}$, сумма $\in \mathbb{Z}$)
~~Миним. значение $(d_3 + \beta_3 + \delta_3) = 28$~~
 Тогда минимальное значение $a \cdot b \cdot c$ равно $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример: $a = 2^9 \cdot 3 \cdot 5$ минимальное значение
Т.к. $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26 \\ 2\alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{cases}$ то $\sqrt{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 28$ ($\beta_3 \in \mathbb{Z}, \beta_3 \geq 0$)

Пример: $a = 2^8 \cdot 3$
 $b = 2^2 \cdot 3^5$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17}$

Тогда минимально возможное значение $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$
 $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 = 2^2 \cdot 3^5$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{19}$

$$\begin{array}{l} a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \\ a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} \\ b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{19} \\ a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vdots \\ (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}) \\ \vdots \\ (2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{19}) \\ \vdots \\ (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}) \end{array}$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

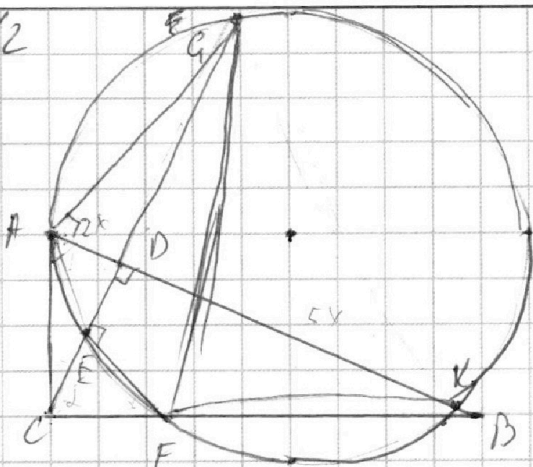
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2



$$1. AB:BD = 1,4$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4; \frac{AD+DB}{BD} = 1,4$$

$$\frac{AD}{BD} + 1 = 1,4$$

$$\frac{AD}{BD} = 0,4 = \frac{2}{5}$$

Пусть $AD = 2x; BD = 5x$

Тогда $AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{14}x$

$BC = \sqrt{BD \cdot AB} = \sqrt{35}x$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB$$

$$AC \cdot BC = CD \cdot AB$$

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x \cdot \sqrt{35}x}{7x} = 7x$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5} x = \sqrt{10} x$$

2. Т.к. $AB \parallel EF$, то $\angle EDB = \angle CEF = 90^\circ$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2} \sqrt{10} x \cdot 2x = \sqrt{10} x^2$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF$$

3. $\triangle CEF \sim \triangle CNB$ (по двум углам).

1) $\angle C = \angle C$

2) $\angle CEF = \angle CNB = 90^\circ$

значит $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD} = k$, где k - коэффициент подобия

Тогда $CE = \frac{EF}{k} = \frac{BD \cdot k}{k} = BD = 5x$; $EF = BD \cdot k = 5x \cdot k$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \sqrt{10} x \cdot k = \frac{1}{2} \sqrt{10} x^2 k^2$$

4. Д.и. $ED \cap \text{окр}(O, R) = G$; $GF \perp AC$; $EF \perp BK = \text{AB} \cap \text{окр}(O, R)$; FK

5. Т.к. $\angle GEF = 90^\circ$, то GF - диаметр $\text{окр}(O, R)$

$$GF = 2R$$

$$AC^2 = CE \cdot GF$$

~~6. $\triangle ADC \sim \triangle CEF$ (по двум углам)~~

~~1) $\angle ADC = \angle CEF = 90^\circ$~~

~~2) $\angle DAC = 90^\circ - \angle ACD = \angle ECF$~~

~~Тогда $\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{EF} = \frac{AC}{CF}$~~

~~$\frac{2x}{\sqrt{10}xk} = \frac{\sqrt{10}x}{5x \cdot k} = \frac{\sqrt{14}x}{CF}$; $CF = \frac{5x \cdot \sqrt{14}xk}{\sqrt{10}x} = \sqrt{35}kx$~~

5. ~~$\angle DAE = 90^\circ$~~ 5. $EF \parallel AB$; $AKFE$ - впис., значит $AKFE$ - равнобедр. трапеция.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Рассмотрим окружи: $x \in [\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что $\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$

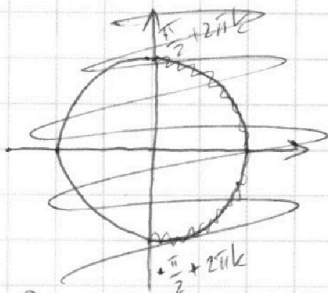
Тогда $10 \cdot \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi]$

Значит, $9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$



Рассмотрим окружи:

1) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: ~~так~~ $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$-\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ - евл. рещ.

2) $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$

$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$\frac{7\pi}{6} \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ - евл. рещ.

3) $x \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$: ~~$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$~~

$$10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$16\pi = 8x$$

$$x = 2\pi$$

$2\pi \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$ - евл. рещ.

4) $x \in (\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = (x - 2\pi) - \frac{\pi}{2} = x - \frac{5\pi}{2}$

$$10(x - \frac{5\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6}$$

$\frac{17\pi}{6} \in (\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ - евл. рещ.

5) $x \in (\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 4\pi) = \frac{9\pi}{2} - x$

$$10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$\frac{9\pi}{2} \in (\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$ - евл. рещ.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

уравнение окруж. с центром
в $(0; 0)$ и радиусом 5

уравнение окруж. с центром
в $(0; -9)$ и радиусом 2

$$\begin{matrix} D(y) & x \in [-5; 5] \\ E(y) & y \in [-5; 5] \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} D(y) & x \in [-2; 2] \\ E(y) & y \in [-7; -11] \end{matrix}$$

$$5x + 6ay - 6 = 0 \quad ; \quad ay = -\frac{5x}{6} + \frac{6}{6}$$

Если $a = 0$, то $x = 6/5$ (уравнение прямой \parallel Oy) - при умножении
вместе все делится
процесс

Если $a \neq 0$, то $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ (линейная функция) - а
задает уравнение прямой. при умножении в
уравнение получается вверх или вниз (может критичная
все делится процесс)

ли. график на другой стороне листа.

ли. продолжение решения на другой стороне
листа.

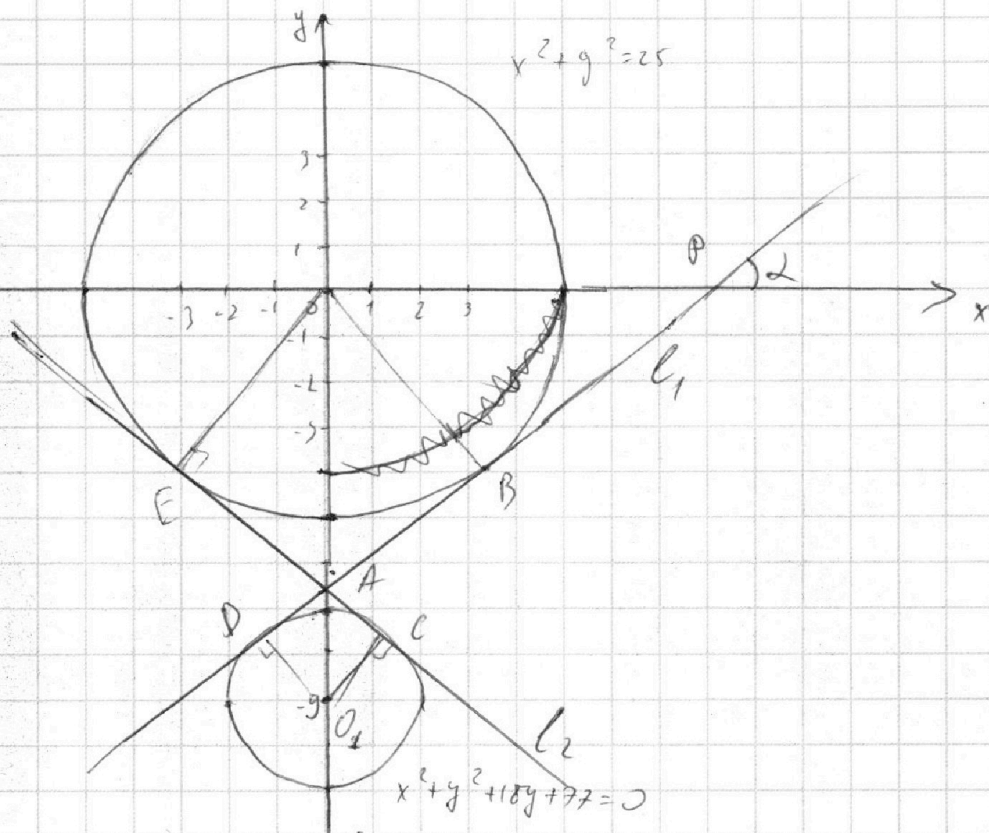
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решением системы явл. точки пересеч. прямой $5x + 6ay - b = 0$ и любой из оцр.

Заметим, что г.к. прямая $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$ может пере-
цезатьсь вверх и вниз в счт укл. параметра b при фикс.
параметре a , то мы можем проверить существует
ли прямая с наклоном $\cot \alpha$ наклона $-\frac{5}{6a}$, которая
пересекает каждую оцр. дважды.

При $a = 0$ можно найти такой b , что система имеет
и решение, например $b = 0$

Обозначим l_1 и l_2 - общие внутр. касательные
(коэф. наклона $l_1 > 0$, коэф. наклона $l_2 < 0$)

Тогда можно заметить, что прямые с коэф. наклона
 \leq чем у l_1 , но \geq чем у l_2 не могут пересек.
обе оцр. дважды. т.е. при этих г.к. коэф. наклона a не
подходят.

Найдем коэф. наклона l_1 и l_2 .

1. В г.к. оцр. существуют $OB \perp l_1$ и $OE \perp l_2$; $O_1D \perp l_1$; $O_1C \perp l_2$
(O_1 - центр меньшей оцр.жности); $l_1 \cap OX = P$

Продолжение на следующем листе

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (пролонгация)

2. ~~ОТРА~~ ~~ОТ~~ $\triangle OBA$ с $\angle O_1DA$ (на схеме указаны)

1) $\angle OBA = \angle O_1DA = 90^\circ$

2) $\angle O_1AD = \angle OAB$ - верши.

значит, $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OA} = \frac{5}{2}$; $OA = \frac{5}{2} OB$

$\frac{OA}{O_1A} = \frac{OB}{O_1D} = \frac{5}{2}$; $OA = \frac{5}{2} O_1A$

3. $O_1A + OA = O_1O_1 = 9$

$\frac{5}{2} O_1A = 9$

$O_1A = \frac{18}{7}$

4. $\sin \angle O_1AD = \frac{O_1D}{O_1A} = \frac{2 \cdot 7}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

Тогда $\cos \angle O_1AD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle O_1AD} = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{32}}{9} = \frac{3\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

5. $\angle OAP = \angle O_1AD$ - верши.

$\angle OPA = 90^\circ - \angle OAP$ (сумма острых углов пр. тр.)

$\angle = \angle OPA$ (\angle -см. на ~~рис~~ графике)

$\angle = \angle OPA = 90^\circ - \angle OAP$

Тогда $\cos \angle = \cos(90^\circ - \angle OAP) = \sin \angle OAP = \sin \angle O_1AD = \frac{7}{9}$

$\sin \angle = \sin(90^\circ - \angle OAP) = \cos \angle OAP = \cos \angle O_1AD = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Котгр. наклона $l_1 = \tan \angle = \frac{\sin \angle}{\cos \angle} = \frac{\frac{\sqrt{2} \cdot 9}{3 \cdot 7}}{\frac{7}{9}} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$

В силу симметрии котгр. наклона $l_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{7}$

Тогда $a \in [-\frac{3\sqrt{2}}{7}, \frac{3\sqrt{2}}{7}]$ - не все реш.

$\begin{cases} -\frac{5x}{6a} \geq -\frac{3\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5x}{6a} \leq \frac{3\sqrt{2}}{7} \end{cases} \cdot (-\frac{6}{5}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases}$

1) $a > 0$: $\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases} \cdot a \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} a \\ 1 \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq \frac{35}{18\sqrt{2}} \\ a \geq -\frac{35}{18\sqrt{2}} \end{cases}$

2) $a < 0$: $\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases} \cdot a \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq \frac{18\sqrt{2}}{35} a \\ 1 \leq -\frac{18\sqrt{2}}{35} a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq \frac{35}{18\sqrt{2}} \\ a \leq -\frac{35}{18\sqrt{2}} \end{cases}$

Т.к. при $a \in (-\infty; -\frac{35}{18\sqrt{2}}] \cup [\frac{35}{18\sqrt{2}}; +\infty)$ система не имеет решений.

при $a \in (-\frac{35}{18\sqrt{2}}; \frac{35}{18\sqrt{2}})$ или $a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{36}; \frac{35\sqrt{2}}{36})$ Ответ: $a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{36}; \frac{35\sqrt{2}}{36})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



НС.

ОДЗ: $x > 0$ $(x \in (0; 1) \cup (1; \infty))$
 $x \neq 1$ $(y \in (0; 2) \cup (2; \infty))$
 $(0,5y > 0)$

$$\begin{cases} \log^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{11} - 5 \\ \log_{0,5y}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y}^3 (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log_x 11} = \log_x^3 11^{-2} - 5 \Leftrightarrow \log^4 x - \frac{6}{\log_x 11} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\Leftrightarrow \log^4 x - \frac{6}{\log_x 11} + \frac{2}{3} \log_x 11 + 5 = 0 \Leftrightarrow \log^4 x - \frac{16}{3 \log_x 11} + 5 = 0$$

$$\log_{0,5y}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y}^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\Rightarrow \log_{0,5y}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = -\frac{13}{3 \log_{0,125y} 11} - 5$$

$$\Leftrightarrow \log_{0,5y}^4 (0,5y) + \frac{16}{3 \log_{0,5y} 11} - 5 = 0$$

$$\begin{cases} \log^4 x - \frac{16}{3 \log_x 11} + 5 = 0 & | \cdot \log_x 11 \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{0,5y}^4 (0,5y) + \frac{16}{3 \log_{0,5y} 11} + 5 = 0 & | \cdot \log_{0,5y} 11 \neq 0, \text{ т.к. } y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log^5 x - \frac{16}{3} + 5 \log_x 11 = 0 \\ \log_{0,5y}^5 (0,5y) + \frac{16}{3} + 5 \log_{0,5y} 11 = 0 \end{cases}$$

пусть $\log_x 11 = a, \log_{0,5y} 11 = b \quad (a, b \neq 0)$

$$\begin{cases} a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0 \\ b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0 \end{cases} \quad \text{пусть } f(t) = t^5 + 5t \quad D(f) \in \mathbb{R}$$

Заметим что $f(t)$ — нечетная: $f(-t) = -t^5 - 5t = -f(t)$

т.к. $f(a) = \frac{16}{3}$ и $f(b) = -\frac{16}{3}$ то $a = -b$

Обратная замена: $\log_x 11 = -\log_{0,5y} 11$

$\log_x 11 = \log_{\frac{1}{0,5y}} 11$ $D(p) p > 0$ — $\log_{\frac{1}{p}}$ — старое

значит $x = \frac{1}{y}$ $1 \cdot y \neq 0$ (по ОДЗ)
 $xy = 1$

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

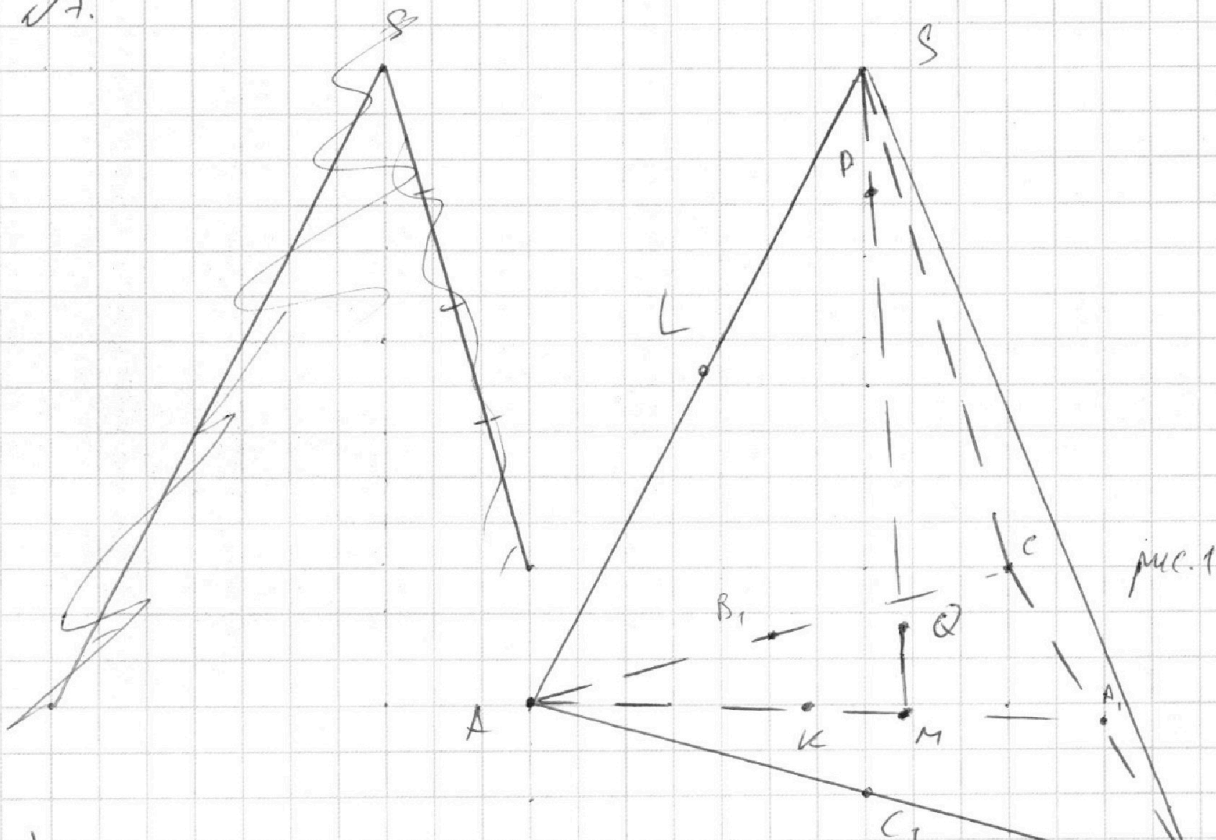
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

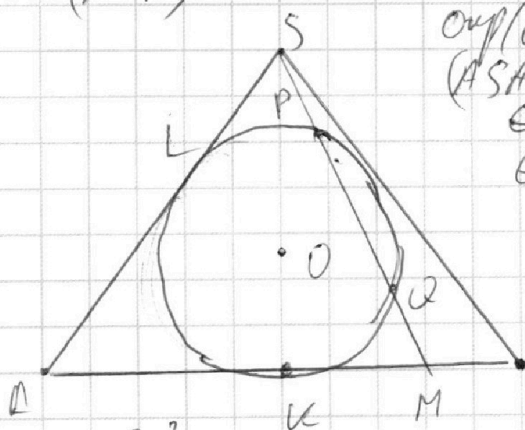
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

У7.



а) По условию L, K, Q, P - лежат на сфере Ω
 Т.к. $L, K, Q, P \in (AMS)$ и сечение сферы Ω
~~сферической~~ плоскостью (AMS) - окружность, то $LPQK$ -
 вписанный четырехугольник
 (ASM).



Окр. $(O; R)$ на рис 2 - сечение сферы плоск.
 (ASA_1)

Сечением точки S: $SP \cdot SQ = SP \cdot (SP + PQ)$

Сечением точки

$SL^2 = SP \cdot SQ$; $MK^2 = MQ \cdot MP$

(SL, MK - касая. к окр.; SQ, MP - сек.)

Т.к. $SP \cdot SQ = MQ \cdot (SP + PQ) = MQ \cdot (MQ + PQ + PQ) = MQ \cdot MP$, то сечением точек

A, S и M равны, и, след., $SL^2 = MK^2$
 $SL = MK$.

Т.к. AL и AK - касая. из одной точки к окр., то $AL = AK$.
 $AL + SL = AK + KM \rightarrow AS = AM = 20$

Т.к. M делит медиану B соотн. $2:1$, то $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(ABC):

Проверим высоту AH
к BC .

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$AH = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$$

Введем прямоугол. систему коорд.

$xy: AEMx, BEMy$

$\Delta AA_1H: \angle H = 90^\circ$

$$AA_1^2 = AH^2 + A_1H^2 \text{ (т. Пиф.)}$$

$$A_1H^2 = AA_1^2 - AH^2 = 900 - 324 = 576 =$$

$$= 24^2; AH = 24; HC = A_1H - A_1C = A_1H - \frac{1}{2} BC = 24 - 10 = 14$$

Тогда $A(18; 0); C(0; 14); B(0; 34)$

$$B_1 \left(\frac{x_B + x_C + y_A + y_B}{2} \right); B_1(9; 2)$$

$$C_1 \left(\frac{x_B + x_A + y_A + y_C}{2} \right); C_1(9; 17)$$

$$CC_1 = \sqrt{(x_{C_1} - x_C)^2 + (y_{C_1} - y_C)^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$BB_1 = \sqrt{(x_{B_1} - x_B)^2 + (y_{B_1} - y_B)^2} = \sqrt{81 + 929} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 90 \cdot 10 \cdot 9 =$
 $= 8100$

Ответ: а) 8100

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

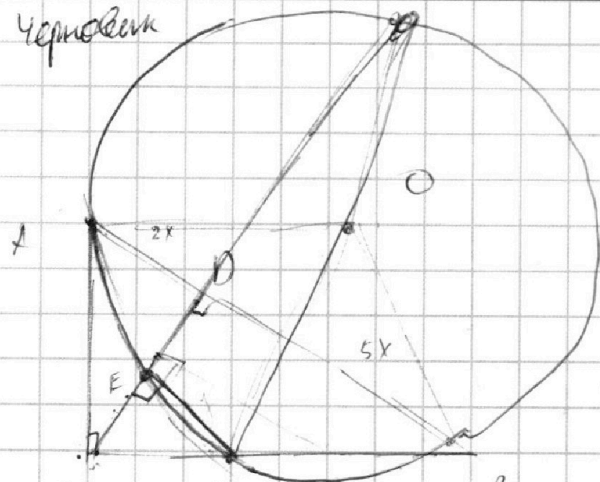
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

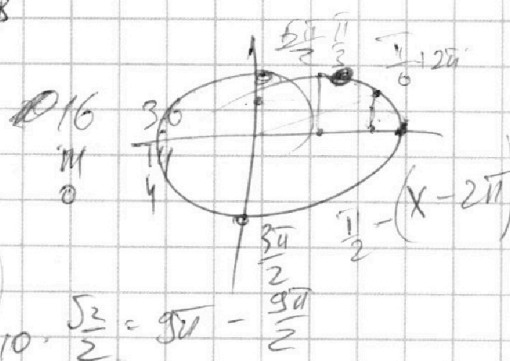


$EF \parallel AB$
 $AB:BD = 1,4$
 $\frac{AD}{BD} = 0,4 = \frac{2}{5}$

$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}}$
 $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h$
 $S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF$

$\Delta CEF \sim \Delta CPB$
 $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD}$

$90^\circ - 10x = 90^\circ - 2x$
 $8x = 10x$
 $36^\circ = 4x$
 $9^\circ = x$



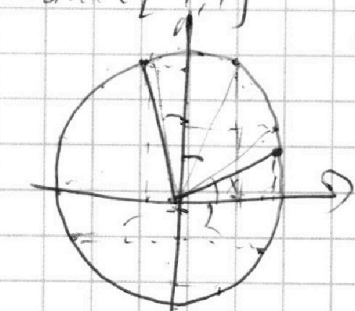
$10 \arccos(-1) = 9\pi + \pi$
 $10\pi = 10\pi$

IV

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\sin x \in [-1, 1]$

$\arccos(\sin x)$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$ $x \in [\frac{\pi}{2}; 0]$

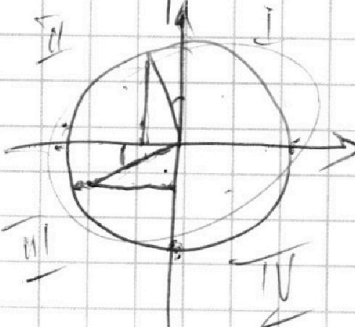
$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$ $x \in \text{II}$

$\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$ $x \in \text{III}$

$x \in \text{I}$ или IV

$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$
 $5\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$-4\pi = 8x$
 $x = -\frac{\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

№1 a, b, c

$$\begin{aligned} ab &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned}$$

мин

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \\ b &= 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \\ c &= 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\geq 6 \\ \alpha_2 + \beta_2 &\geq 13 \\ \alpha_3 + \beta_3 &\geq 11 \\ \alpha_1 + \gamma_1 &\geq 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\geq 6 \\ \alpha_1 + \gamma_1 &\geq 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 &\geq 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) &\geq 36 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &\geq 18 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 18 \\ 4 \quad 2 \quad 12 \end{aligned}$$

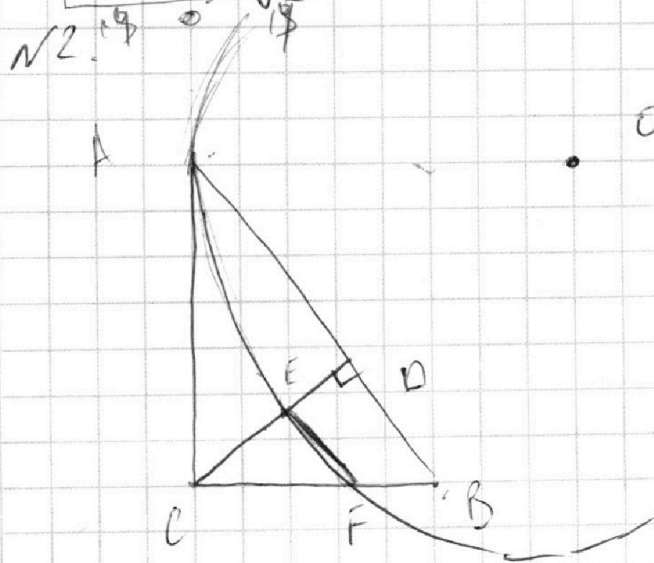
$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 &\geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 &\geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 &\geq 21 \\ 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) &\geq 59 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &\geq 29.5 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 30 \\ 8 \quad 5 \quad 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \beta_3 &\geq 11 \\ \alpha_3 + \gamma_3 &\geq 28 \\ \beta_3 + \gamma_3 &\geq 13 \\ 2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) &\geq 52 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &\geq 26 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 26 \\ 19 \quad 0 \quad 7 \end{aligned}$$

$$\min abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{AD}{BD} &= \frac{AD + DB}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 = \\ &= 1.4 \\ \frac{AD}{BD} &= 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

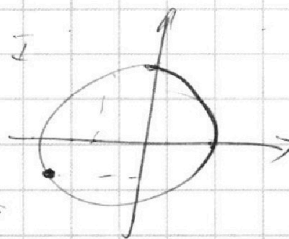
✓ 5

$$10 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 9\pi - 2x \quad \text{II, IV}$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$



$$10 \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) = 9\pi - 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$10 \cdot \frac{2\pi}{3} = 7\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{20\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

✓ 5

$$\log_x^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_x^4 (\log_x x) + \log_{\log_x} 11 = \log_{\log_x 121} 3 (11^{-13}) - 5$$

001

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0,5y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \end{cases}$$

$$x \in (0,1) \cup (1,2)$$

$$y \in (0,2) \cup (2,4) \quad \frac{2}{3a} - \frac{6}{a} = \frac{2-18}{3a}$$

$$\log_x^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\frac{2-18}{3a} = -\frac{16}{3a}$$

$$\frac{3+15}{3b} = \frac{16}{3b}$$

$$\log_x^4 (\log_x y) + \frac{1}{\log_x (\log_x y)} = -\frac{13}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_x^4 (\log_x y) + \frac{1}{\log_x (\log_x y)} = -\frac{13}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_x x = a, \quad \log_x (\log_x y) = b \quad ; \quad a, b \neq 0$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \\ b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{16}{3b} - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{1}{b} + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$$

$$a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0$$

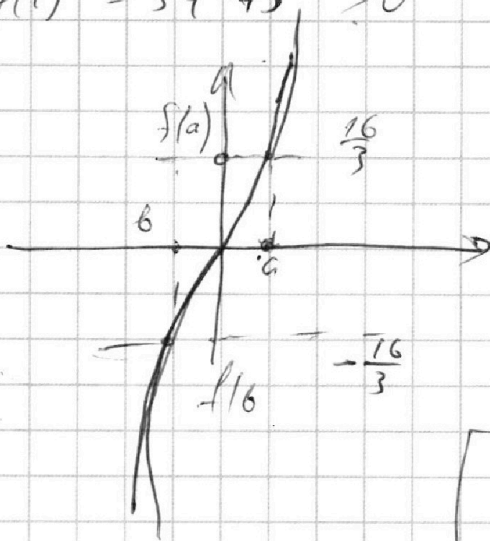
$$b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0$$

$$f(t) = t^5 + 5t$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$f(-t) = -t^5 - 5t = -f(t) \text{ — кер.}$$

$$f'(t) = 5t^4 + 5 > 0 \text{ — возраст.}$$



$$a^5 + 5a = -b^5 - 5b$$

$$a^5 + b^5 + 5(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - ab^3 + a^2b^2 - ab^4 + b^4 + 5) = 0$$

$$a^5 + b^5 - (a+b)(a^4 + 0^3b^4 + \dots)$$

$$\left[\begin{array}{l} a = -b \\ a^4 + a^2b^2 + b^4 + 5 = a^3b + ab^3 = ab(a^2 + b^2) \end{array} \right]$$

$$a = -b$$

$$\log_a x = -\log_a(0,5y)$$

$$\log_a x = \log_a(0,5y)^{-1}$$

$$x = \frac{1}{0,5y}$$

$$x = \frac{2}{y}$$

$$xy = 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

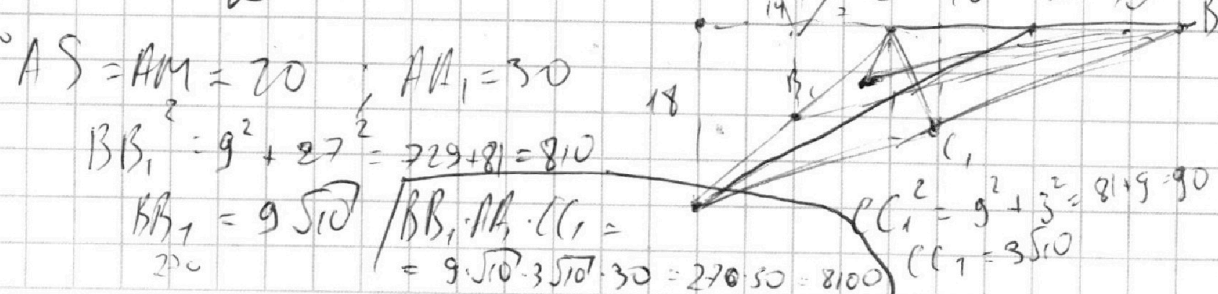
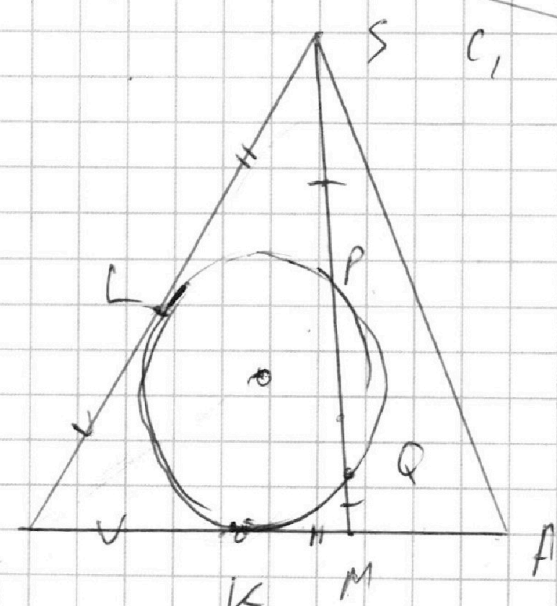
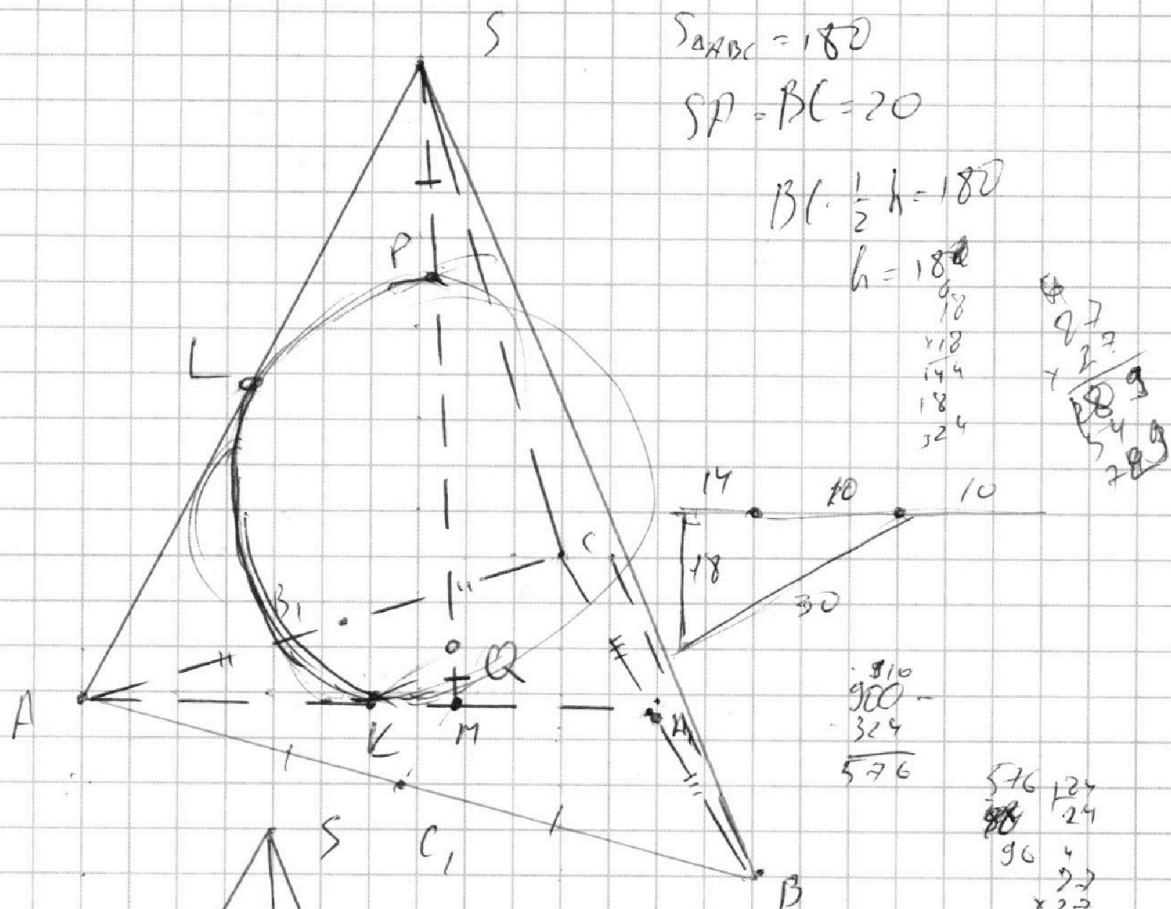
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 черновик



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

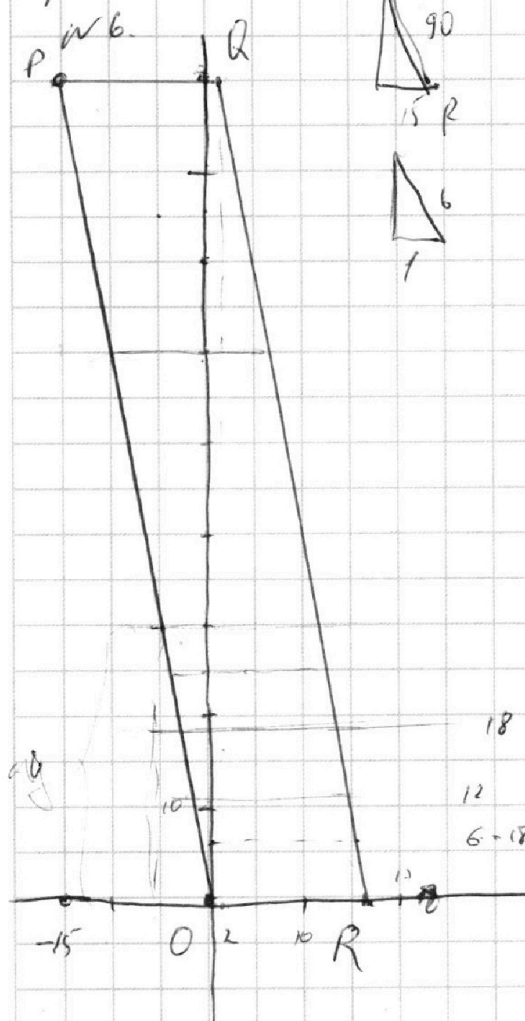
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.



$$A, B \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

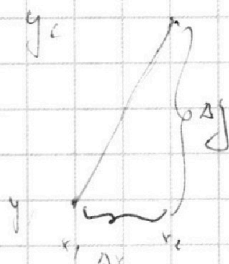
$$6\Delta x + \Delta y = 48$$

$$\Delta x_{\max} = 32$$

$$\Delta y_{\max} = 90$$

$$\Delta x_{\min} = -32$$

$$\Delta y_{\min} = -90$$



$$\Delta y = -24$$

$$\Delta x = 12$$



B

$$6\Delta x + \Delta y = 48$$

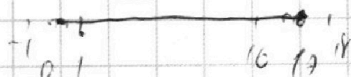
$$\Delta y = -90 \quad \left[\begin{array}{ccc} 24 & 12 & 18 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} 90 \\ 15 \end{array}$$

$$\Delta y = -90 \rightarrow \Delta x$$

$$\frac{102 \pm 90}{6}$$

$$\Delta y = a$$

$$\boxed{16 - \text{no } 18, 75 - \text{no } 17}$$



$$91 - 16 = 75$$

$$\Delta y = a$$

$$\Delta x_{\min} = 17 + \frac{44}{6}$$

$$\Delta x_{\min} = -17 + \frac{44}{6}$$

$$a \in [17a - 102 - a, 102 + a]$$

$$\begin{cases} 48 \in 102 + a \\ -102 - a \leq 48 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta y = 48 \\ \Delta x \in [-25, 25] \\ -102 \leq 6\Delta x + \Delta y \leq 102 + 2a \\ 48 \leq 102 + 2a \\ -54 \leq 2a \end{aligned}$$

$$6\Delta x - 48 \leq 2 \begin{cases} a > 54 \\ a \geq -150 \end{cases}$$



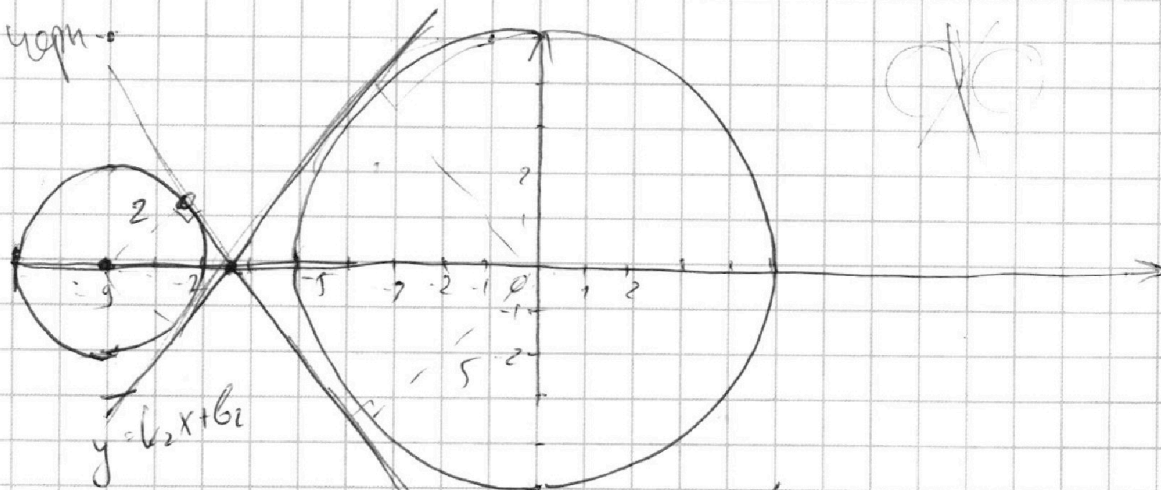
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$6ay = -5x + 6$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$$

$$y = k_1x + b_1$$

параметр a задается произвольным

Произвольный $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ или проще a не будет иметь такой b , это 4 реш.

$$d + \frac{d}{2} \cdot 5 = 9$$

$$\frac{7}{2}d = 9$$

$$d = \frac{18}{7}$$

$\frac{1}{2}d + d = 9$
 $\frac{3}{2}d = 9$
 $d = 6$

$\frac{1}{2}d + d = 9$
 $\frac{3}{2}d = 9$
 $d = 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

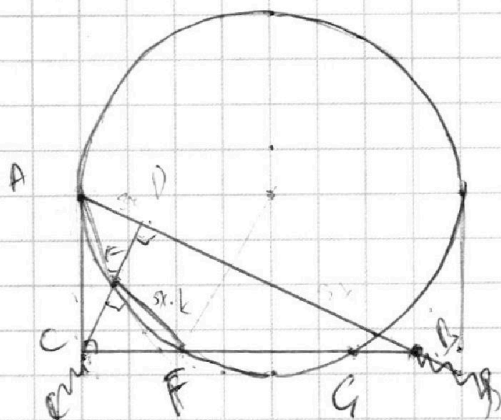
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Черновик.



$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$14x^2 = AC^2$$

$$\sqrt{14}x = AC$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

$$35x^2 = BC^2$$

$$BC = \sqrt{35}x$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} h \cdot 2x$$

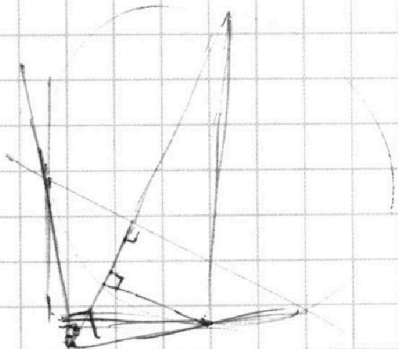
$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} h' \cdot 5x$$

$$k^2 = \frac{CF}{CB} = \frac{CF}{\sqrt{35}x}$$

$$AC^2 = CF \cdot CG$$

$$BC = \sqrt{35}x$$

$$CF = k\sqrt{35}x$$



$$y^2 + 29y + 21 = 4$$

№4

$$5x + 6xy - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$