



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Разложения a, b, c на простые множители

Пусть в разложении на простые множители числа a : двойка имеет степень d_1 , тройка - d_2 , пятёрка - d_3 ; в разложении числа b : двойка - β_1 , тройка - β_2 , пятёрка - β_3 ; в разложении числа c : двойка - δ_1 , тройка - δ_2 , пятёрка - δ_3 . Т.е:

$$a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot p, \text{ где } p \in \mathbb{N}, p \neq 2, 3, 5$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot q, \text{ где } q \in \mathbb{N}, q \neq 2, 3, 5$$

$$c = 2^{\delta_1} \cdot 3^{\delta_2} \cdot 5^{\delta_3} \cdot w, \text{ где } w \in \mathbb{N}, w \neq 2, 3, 5$$

$$a \cdot b = 2^{d_1 + \beta_1} \cdot 3^{d_2 + \beta_2} \cdot 5^{d_3 + \beta_3} \cdot p \cdot q = (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}) / (p \cdot q \cdot 2, 3, 5)$$

Значит,
$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 6 & (1) \\ d_2 + \beta_2 \geq 13 & (2) \\ d_3 + \beta_3 \geq 11 & (3) \end{cases}$$

$$b \cdot c = 2^{\beta_1 + \delta_1} \cdot 3^{\beta_2 + \delta_2} \cdot 5^{\beta_3 + \delta_3} \cdot q \cdot w = (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}) / (q \cdot w \cdot 2, 3, 5)$$

Значит,
$$\begin{cases} \beta_1 + \delta_1 \geq 14 & (4) \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 21 & (5) \\ \beta_3 + \delta_3 \geq 13 & (6) \end{cases}$$

$$a \cdot c = 2^{d_1 + \delta_1} \cdot 3^{d_2 + \delta_2} \cdot 5^{d_3 + \delta_3} \cdot p \cdot w = (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{18}) / (p \cdot w \cdot 2, 3, 5)$$

Значит,
$$\begin{cases} d_1 + \delta_1 \geq 16 & (7) \\ d_2 + \delta_2 \geq 25 & (8) \\ d_3 + \delta_3 \geq 28 & (9) \end{cases}$$

(1), (4) и (7):

$$\begin{cases} p + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 14 \\ d_1 + \beta_1 \geq 16 \end{cases}; \quad 2(d_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 36; \quad d_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 18$$

(2), (5) и (8):

$$\begin{cases} d_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 21 \\ d_2 + \delta_2 \geq 25 \end{cases}; \quad 2(d_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 59; \quad d_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 29 \frac{1}{2}$$

(3), (6) и (9):

$$\begin{cases} d_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \delta_3 \geq 13 \\ d_3 + \delta_3 \geq 28 \end{cases}; \quad 2(d_3 + \beta_3 + \delta_3) \geq 52; \quad d_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 26$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{d_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 3^{d_2 + \beta_2 + \delta_2} \cdot 5^{d_3 + \beta_3 + \delta_3} \cdot p \cdot q \cdot w \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

Миним. значение $(d_1 + \beta_1 + \delta_1) = 18$; $(d_2 + \beta_2 + \delta_2) = 30$ ($d_2, \beta_2, \delta_2 \in \mathbb{Z}$, сумма $\in \mathbb{Z}$)
~~Миним. значение $(d_3 + \beta_3 + \delta_3) = 26$~~
 Тогда минимальное значение $a \cdot b \cdot c$ равно $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример: $a = 2^9 \cdot 3 \cdot 5$ минимальное значение
Т.к. $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26 \\ 2\alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{cases}$ то $\sqrt{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 28$ ($\beta_3 \in \mathbb{Z}, \beta_3 \geq 0$)

Пример: $a = 2^8 \cdot 3$
 $b = 2^2 \cdot 3^5$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17}$

Тогда минимально возможное значение $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$
 $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 = 2^2 \cdot 3^5$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{19}$

$$\begin{array}{l} a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \\ a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} \\ b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{19} \\ a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vdots \\ (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}) \\ \vdots \\ (2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{19}) \\ \vdots \\ (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}) \end{array}$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

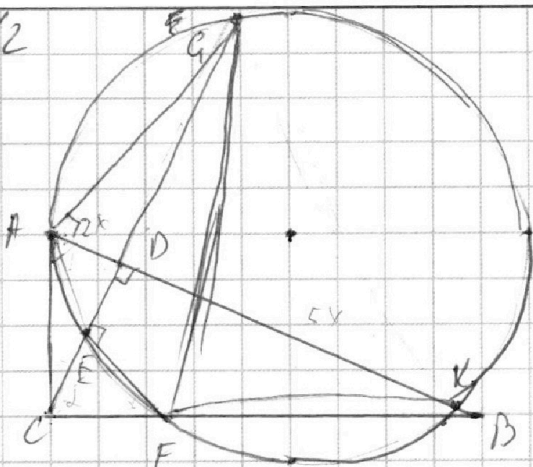
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2



$$1. AB:BD = 1,4$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4; \frac{AD+DB}{BD} = 1,4$$

$$\frac{AD}{BD} + 1 = 1,4$$

$$\frac{AD}{BD} = 0,4 = \frac{2}{5}$$

Пусть $AD = 2x; BD = 5x$

Тогда $AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{14}x$

$BC = \sqrt{BD \cdot AB} = \sqrt{35}x$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB$$

$$AC \cdot BC = CD \cdot AB$$

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x \cdot \sqrt{35}x}{7x} = 7x$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5}x = \sqrt{10}x$$

2. Т.к. $AB \parallel EF$, то $\angle EDB = \angle CEF = 90^\circ$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2} \sqrt{10}x \cdot 2x = \sqrt{10}x^2$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF$$

3. $\triangle CEF \sim \triangle CNB$ (по двум углам).

1) $\angle C = \angle C$

2) $\angle CEF = \angle CNB = 90^\circ$

значит $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD} = k$, где k - коэффициент подобия

Тогда $CE = \frac{EF}{k} = \frac{BD \cdot k}{k} = BD = 5x$; $EF = BD \cdot k = 5\sqrt{10}x^2 k^2$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \sqrt{10}x \cdot k \cdot EF = 5x \cdot k = \frac{5\sqrt{10}x^2 k^2}{2}$$

4. Д.и. $ED \cap \text{окр}(O, R) = G$; $GF \perp AC$; $FK = \text{радиус}(O, R)$; FK

5. Т.к. $\angle GEF = 90^\circ$, то GF - диаметр $\text{окр}(O, R)$

$$GF = 2R$$

$$AC^2 = CE \cdot GF$$

~~6. $\triangle ADC \sim \triangle CEF$ (по двум углам)~~

~~1) $\angle ADC = \angle CEF = 90^\circ$~~

~~2) $\angle DAC = 90^\circ - \angle ACD = \angle ECF$~~

~~Тогда $\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{EF} = \frac{AC}{CF}$~~

~~$\frac{2x}{\sqrt{10}xk} = \frac{\sqrt{10}x}{5x \cdot k} = \frac{\sqrt{14}x}{CF}$; $CF = \frac{5x \cdot \sqrt{14}xk}{\sqrt{10}x} = \sqrt{35}kx$~~

5. $\angle DAE = 90^\circ$; $EF \parallel AB$; $AKFE$ - впис., значит $AKFE$ - равнобедр. трапеция.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Рассмотрим окружности: $x \in [\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что $\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$

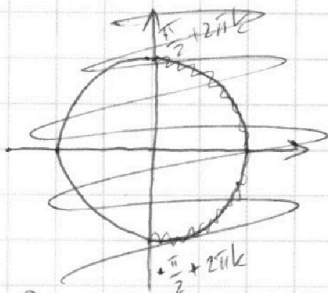
Тогда $10 \cdot \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi]$

Значит, $9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$



Рассмотрим окружности:

1) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: ~~так~~ $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$-\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ - **евл. реш.**

2) $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$

$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$\frac{7\pi}{6} \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ - **евл. реш.**

3) $x \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$: ~~так~~ $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$

$$10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$16\pi = 8x$$

$$x = 2\pi$$

$2\pi \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$ - **евл. реш.**

4) $x \in (\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = (x - 2\pi) - \frac{\pi}{2} = x - \frac{5\pi}{2}$

$$10(x - \frac{5\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6}$$

$\frac{17\pi}{6} \in (\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ - **евл. реш.**

5) $x \in (\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 4\pi) = \frac{9\pi}{2} - x$

$$10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$\frac{9\pi}{2} \in (\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$ - **евл. реш.**

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi;$
 $\frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

уравнение окруж. с центром

в $(0; 0)$ и радиусом 5

$$x^2 + (y+9)^2 = 2^2$$

уравнение окруж. с центром

в $(0; -9)$ и радиусом 2

$$\begin{matrix} D(y) & x \in [-5; 5] \\ E(y) & y \in [-5; 5] \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} D(y) & x \in [-2; 2] \\ E(y) & y \in [-7; -11] \end{matrix}$$

$$5x + 6ay - 6 = 0 \quad ; \quad ay = -\frac{5x}{6} + \frac{6}{6}$$

Если $a = 0$, то $x = 6/5$ (уравнение прямой \parallel Oy) - при умножении 6 получится при $x = 6/5$ все действ. значения

Если $a \neq 0$, то $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ (линейная функция) - а задает уравнение прямой. при умножении 6 на ay прямая смещается вверх или вниз (получается критичная величина в знаменателе)

ли. продолжение на другой стороне моста.

ли. продолжение решения на другой стороне моста.

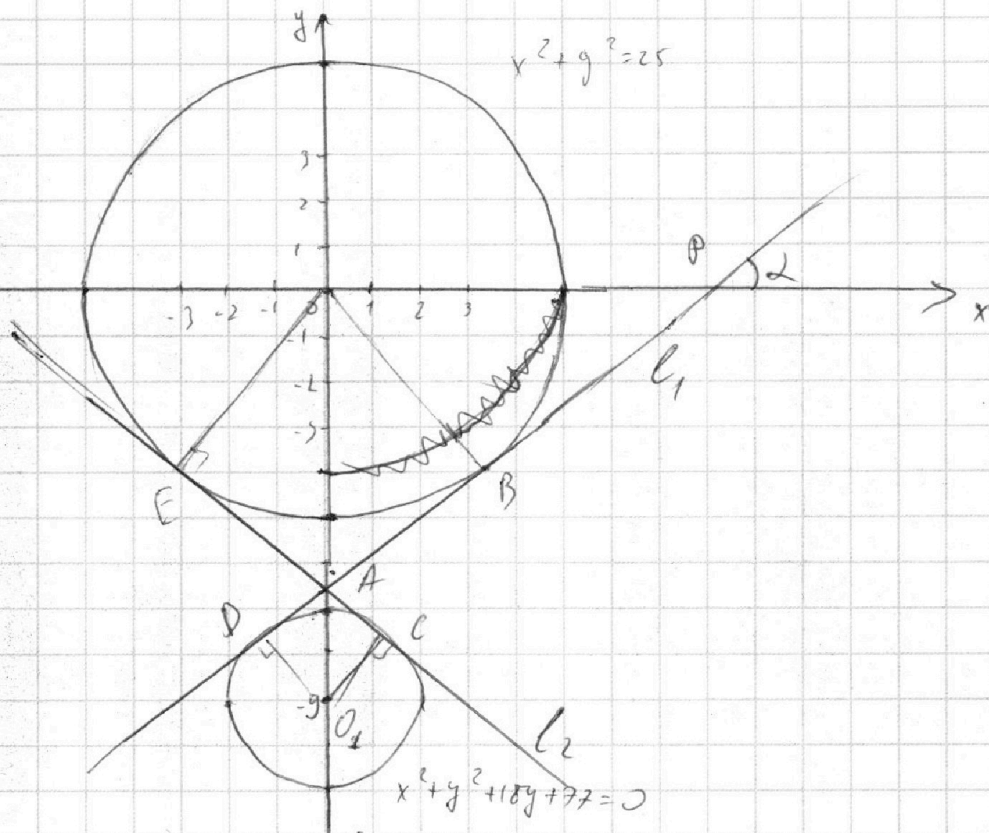
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решением системы явл. точки пересеч. прямой $5x + 6ay - b = 0$ и любой из оцр.

Заметим, что г.к. прямая $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$ может пере-
цатьсь вверх и вниз в счт укл. параметра b при фикс.
параметре a , то мы можем проверить существует
ли прямая с наклоном $\cot \alpha$ наклона $-\frac{5}{6a}$, которая
пересекает каждую оцр. дважды.

При $a = 0$ можно найти такой b , что система имеет
и решение, например $b = 0$

Обозначим l_1 и l_2 - общие внутр. касательные
(коэф. наклона $l_1 > 0$, коэф. наклона $l_2 < 0$)

Тогда можно заметить, что прямые с коэф. наклона
 \leq чем у l_1 , но \geq чем у l_2 не могут пересек.
обе оцр. дважды. т.е. при этих г коэф. наклона a не
подходят.

Найдем коэф. наклона l_1 и l_2 .

1. В г. Д.п. существуют $OB \perp l_1$ и $OE \perp l_2$; $O_1D \perp l_1$; $O_2C \perp l_2$
(O_2 - центр меньшей окружности); $l_1 \cap OX = P$

Продолжение на следующем листе

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (пролонгация)

2. ~~ОТРА~~ ~~ОТ~~ $\triangle OBA$ с $\angle O_1DA$ (на схеме указаны)

1) $\angle OBA = \angle O_1DA = 90^\circ$

2) $\angle O_1AD = \angle OAB$ - верши.

значит, $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OA} = \frac{5}{2}$; $OA = \frac{5}{2} OB$

$\frac{OA}{O_1A} = \frac{OB}{O_1D} = \frac{5}{2}$; $OA = \frac{5}{2} O_1A$

3. $O_1A + OA = O_1O_1 = 9$

$\frac{5}{2} O_1A = 9$

$O_1A = \frac{18}{5}$

4. $\sin \angle O_1AD = \frac{O_1D}{O_1A} = \frac{2 \cdot 7}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

Тогда $\cos \angle O_1AD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle O_1AD} = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{18}}{9} = \frac{3\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

5. $\angle OAP = \angle O_1AD$ - верши.

$\angle OPA = 90^\circ - \angle OAP$ (сумма острых углов пр. тр.)

$\angle = \angle OPA$ (\angle -см. на ~~рис~~ графике)

$\angle = \angle OPA = 90^\circ - \angle OAP$

Тогда $\cos \angle = \cos(90^\circ - \angle OAP) = \sin \angle OAP = \sin \angle O_1AD = \frac{7}{9}$

$\sin \angle = \sin(90^\circ - \angle OAP) = \cos \angle OAP = \cos \angle O_1AD = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Котг. наклона $l_1 = \tan \angle = \frac{\sin \angle}{\cos \angle} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$

В силу симметрии котг. наклона $l_2 = -\frac{7\sqrt{2}}{3}$

Тогда $\frac{5x}{6a} \in \left[-\frac{3\sqrt{2}}{7}, \frac{3\sqrt{2}}{7}\right]$ - не явл. реш.

$$\begin{cases} -\frac{5x}{6a} \geq -\frac{3\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5x}{6a} \leq \frac{3\sqrt{2}}{7} \end{cases} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) \quad \begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases}$$

1) $a > 0$: $\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases} \cdot a \quad \begin{cases} 1 \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} a \\ 1 \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} a \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq \frac{35}{18\sqrt{2}} \\ a \geq -\frac{35}{18\sqrt{2}} \end{cases}$

2) $a < 0$: $\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases} \cdot a \quad \begin{cases} 1 \geq \frac{18\sqrt{2}}{35} a \\ 1 \leq -\frac{18\sqrt{2}}{35} a \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq \frac{35}{18\sqrt{2}} \\ a \leq -\frac{35}{18\sqrt{2}} \end{cases}$

Т.к. при $a \in (-\infty; -\frac{35}{18\sqrt{2}}) \cup (\frac{35}{18\sqrt{2}}; +\infty)$ система не имеет решений

при $a \in (-\frac{35}{18\sqrt{2}}; \frac{35}{18\sqrt{2}})$ или $a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{36}; \frac{35\sqrt{2}}{36})$ Ответ: $a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{36}; \frac{35\sqrt{2}}{36})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



НС.

ОДЗ: $x > 0$ $(x \in (0; 1) \cup (1; +\infty))$
 $x \neq 1$ $y \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$
 $0,5y > 0$

$$\begin{cases} \log^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{11} - 5 \\ \log_{0,5y}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y}^3 (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log_x 11} = \log_x^3 11^{-2} - 5 \Leftrightarrow \log^4 x - \frac{6}{\log_x 11} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\Leftrightarrow \log^4 x - \frac{6}{\log_x 11} + \frac{2}{3} \log_x 11 + 5 = 0 \Leftrightarrow \log^4 x - \frac{16}{3 \log_x 11} + 5 = 0$$

$$\log_{0,5y}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y}^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\Rightarrow \log_{0,5y}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = -\frac{13}{3 \log_{0,125y} 11} - 5$$

$$\Leftrightarrow \log_{0,5y}^4 (0,5y) + \frac{16}{3 \log_{0,5y} 11} - 5 = 0$$

$$\begin{cases} \log^4 x - \frac{16}{3 \log_x 11} + 5 = 0 & | \cdot \log_x 11 \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{0,5y}^4 (0,5y) + \frac{16}{3 \log_{0,5y} 11} + 5 = 0 & | \cdot \log_{0,5y} 11 \neq 0, \text{ т.к. } y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log^5 x - \frac{16}{3} + 5 \log_x 11 = 0 \\ \log_{0,5y}^5 (0,5y) + \frac{16}{3} + 5 \log_{0,5y} 11 = 0 \end{cases}$$

$$\log^5 x - \frac{16}{3} + 5 \log_x 11 = 0$$

$$\log_{0,5y}^5 (0,5y) + \frac{16}{3} + 5 \log_{0,5y} 11 = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0 \\ b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0 \end{cases} \quad \text{пусть } f(t) = t^5 + 5t \quad D(f) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0 \\ b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0 \end{cases}$$

Заметим что $f(t)$ — нечетная: $f(-t) = -t^5 - 5t = -f(t)$

т.к. $f(a) = \frac{16}{3}$ и $f(b) = -\frac{16}{3}$ то $a = -b$

Обратная замена: $\log_x 11 = -\log_{0,5y} 11$

$\log_x 11 = \log_{\frac{1}{x}} 11$ $D(f) p > 0$ — возрастающая

значит $x = \frac{1}{y}$ и $y \neq 0$ (ОДЗ)

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

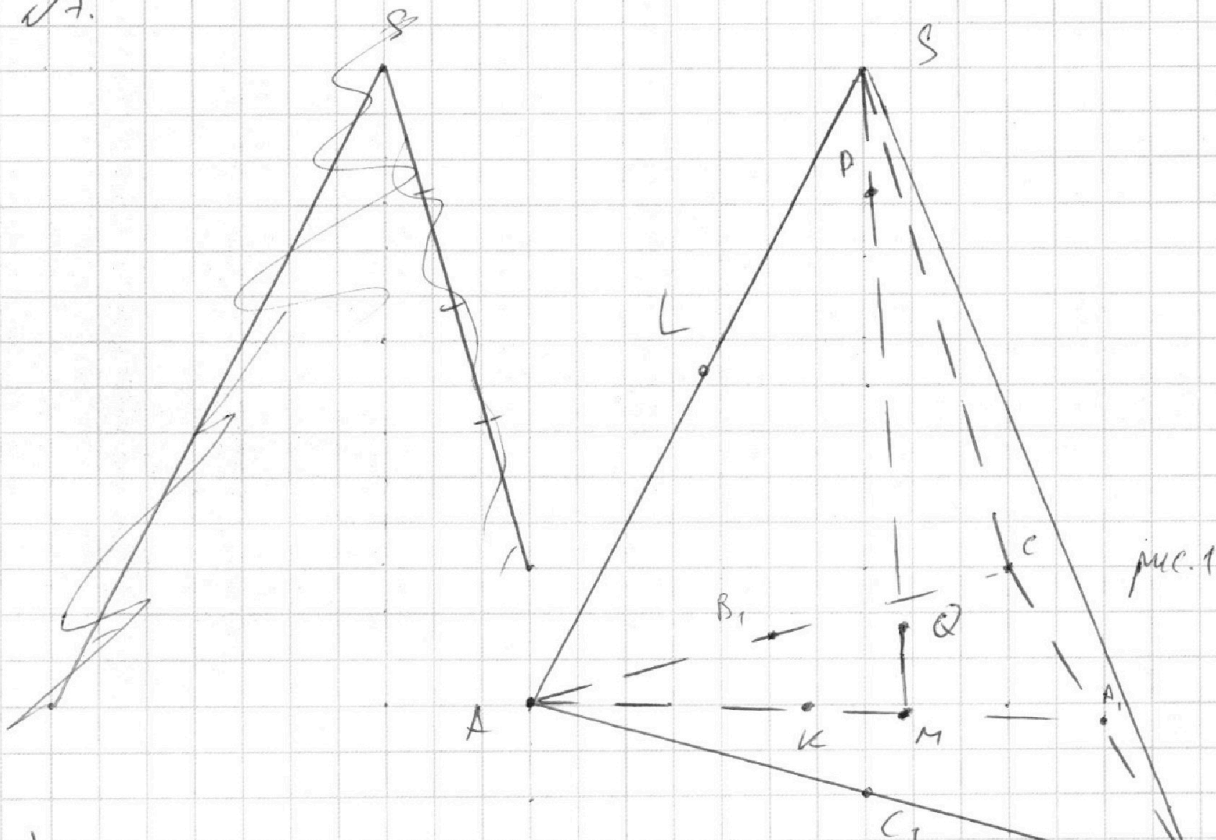
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

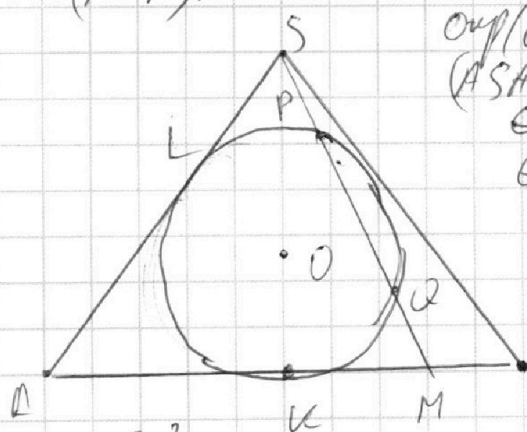


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

У7.



а) По условию L, K, Q, P - лежат на сфере Ω
 Т.к. $L, K, Q, P \in (AMS)$ и сечение сферы Ω
 окружностью плоскостью (AMS) - окружность, то $LPQK$ -
 вписанный четырехугольник
 (ASM) .



Окр. (O, R) на рис 2 - сечение сферы плоск.
 (ASA_1)

Сечены точки S: $SP \cdot SQ = SP \cdot (SP + PQ)$

Сечены точки

$SL^2 = SP \cdot SQ$; $MK^2 = MQ \cdot MP$

(SL, MK - касая. к окр.; SQ, MP - сек.)

Т.к. $SP \cdot SQ = MQ \cdot (SP + PQ) = MQ \cdot (MQ + PQ + PQ) = MQ \cdot MP$, то сечены точки

A, S и M равны, и, след., $SL^2 = MK^2$
 $SL = MK$.

Т.к. AL и AK - касая. к окружности точки к окр., то
 $AL = AK$. $AL + SL = AK + KM \rightarrow AS = AM = 20$

Т.к. M делит медиану BS соотн. 2:1, то $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(ABC):

Проверим высоту AM к BC .

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC$$

$$AM = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$$

Введем прямоугольную систему координат.

xAy : A — начало, BC — ось y .

$\angle H = 90^\circ$

$AA_1^2 = AH^2 + A_1M^2$ (гипот.)

$$A_1M^2 = AA_1^2 - AH^2 = 900 - 324 = 576 = 24^2$$

$AM = 24$; $HC = AC - A_1C = AM - \frac{1}{2} BC = 24 - 10 = 14$

Тогда $A(18; 0)$; $C(0; 14)$; $B(0; 34)$

$B_1(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2})$; $B_1(9; 2)$

$C_1(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2})$; $C_1(7; 17)$

$$CC_1 = \sqrt{(x_{C_1} - x_C)^2 + (y_{C_1} - y_C)^2} = \sqrt{81 + 91} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$BB_1 = \sqrt{(x_{B_1} - x_B)^2 + (y_{B_1} - y_B)^2} = \sqrt{81 + 929} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 90 \cdot 10 \cdot 9 = 8100$

Ответ: а) 8100

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

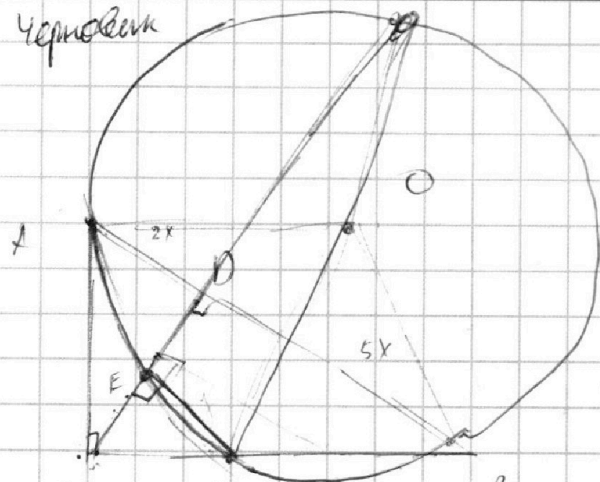
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$EF \parallel AB$
 $AB:BD = 1,4$

$\frac{AD}{BD} = 0,4 = \frac{2}{5}$

$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}}$

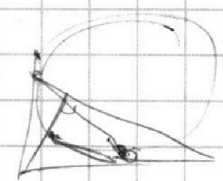
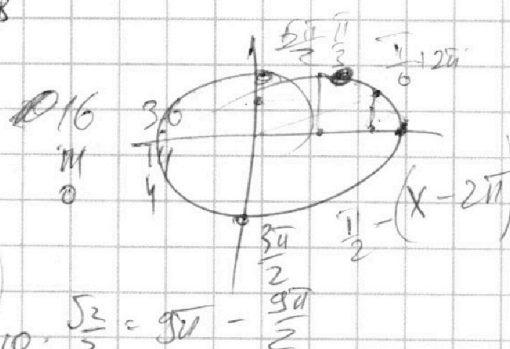
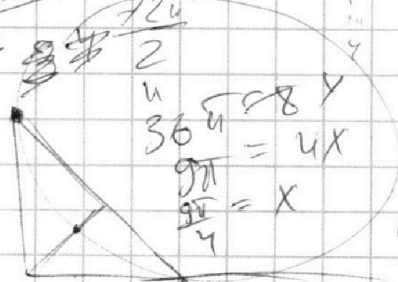
$S_{\Delta CEF}$

$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h$
 $S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF$

$\Delta CEF \sim \Delta CPB$

$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD}$

$90^\circ - 10x = 90^\circ - 2x$
 $8x = 80^\circ$
 $x = 10^\circ$

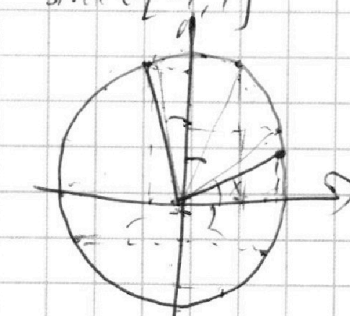


$10 \arccos(-1) = 90^\circ + 10^\circ$
 $10 \cdot 180^\circ = 10^\circ$

$10 \arccos(\sin x) = 90^\circ - 2x$

$\sin x \in [-1, 1]$

$\arccos(\sin x)$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

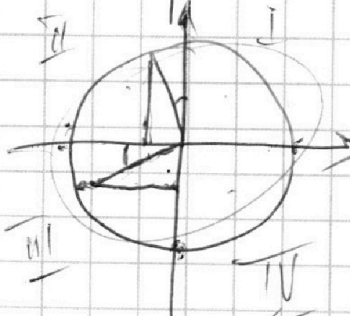


$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$ $x \in [\frac{\pi}{2}; 0]$

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$ $x \in \text{II}$

$\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$ $x \in \text{III}$



$x \in \text{I}$ или IV

$10(\frac{\pi}{2} - x) = 90^\circ - 2x$

$5\pi - 10x = 90^\circ - 2x$

$-40 = 8x$
 $x = -\frac{5}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

№1 a, b, c

$$\begin{aligned} ab &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned}$$

мин

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \\ b &= 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \\ c &= 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\geq 6 \\ \alpha_2 + \beta_2 &\geq 13 \\ \alpha_3 + \beta_3 &\geq 11 \\ \alpha_1 + \gamma_1 &\geq 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\geq 6 \\ \alpha_1 + \gamma_1 &\geq 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 &\geq 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) &\geq 36 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &\geq 18 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 18 \\ 4 \quad 2 \quad 12 \end{aligned}$$

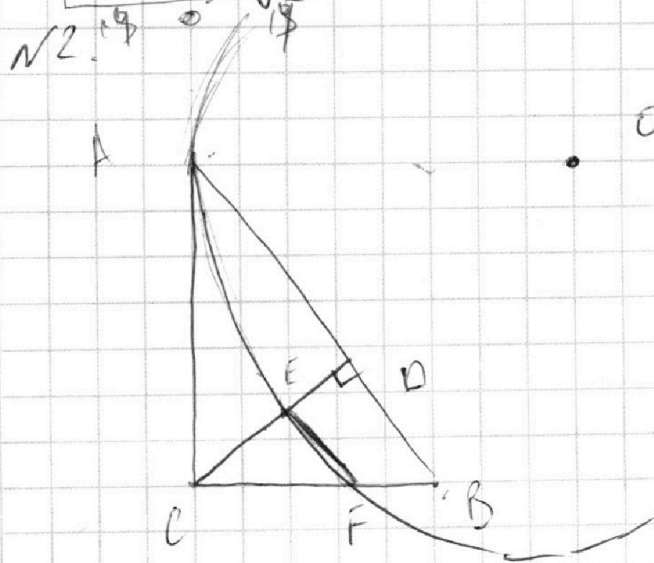
$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 &\geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 &\geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 &\geq 21 \\ 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) &\geq 59 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &\geq 29 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 30 \\ 8 \quad 5 \quad 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \beta_3 &\geq 11 \\ \alpha_3 + \gamma_3 &\geq 28 \\ \beta_3 + \gamma_3 &\geq 13 \\ 2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) &\geq 52 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &\geq 26 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 26 \\ 19 \quad 0 \quad 7 \end{aligned}$$

$$\min abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{AD}{BD} &= \frac{AD + DB}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 = \\ &= 1,4 \\ \frac{AD}{BD} &= 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

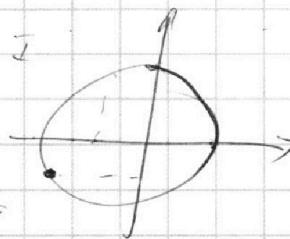
✓ 5

$$10 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 9\pi - 2x \quad \text{II, IV}$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$



$$10 \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) = 9\pi - 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$10 \cdot \frac{2\pi}{3} = 7\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{20\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

✓ 5

$$\log_x^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_x^4 (\log_x x) + \log_{\log_x x} 11 = \log_{\log_x 3} (11^{-13}) - 5$$

001

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0 < \log_x x < 1 \\ 0 < \log_x 11 < 1 \end{cases}$$

$$x \in (0, 1) \cup (1, 2)$$

$$y \in (0, 2) \cup (2, +\infty) \quad \frac{2}{3a} - \frac{6}{a} = \frac{2-18}{3a}$$

$$\log_x^4 x - \frac{6}{\log_x x} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_x^4 x - \frac{6}{\log_x x} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{16}{3a} \\ \frac{3+15}{36} &= \frac{16}{36} \end{aligned}$$

$$\log_x^4 (\log_x x) + \frac{1}{\log_x (\log_x x)} = -\frac{13}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_x^4 (\log_x x) + \frac{1}{\log_x (\log_x x)} = -\frac{13}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_x x = a, \quad \log_x (\log_x x) = b \quad ; \quad a, b \neq 0$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \\ b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \\ b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$$

$$a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0$$

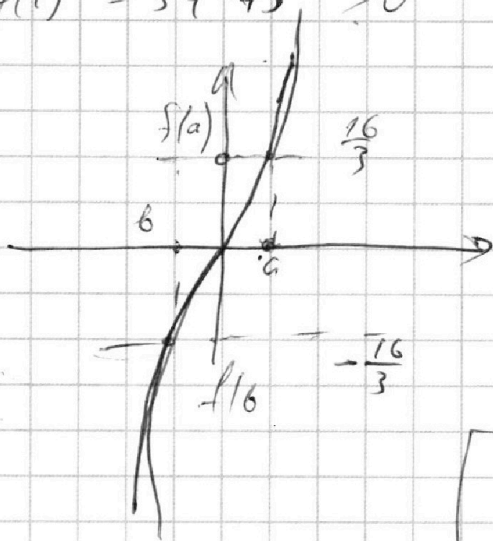
$$b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0$$

$$f(t) = t^5 + 5t$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$f(-t) = -t^5 - 5t = -f(t) \text{ — кер.}$$

$$f'(t) = 5t^4 + 5 > 0 \text{ — возраст.}$$



$$a^5 + 5a = -b^5 - 5b$$

$$a^5 + b^5 + 5(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - ab^3 + a^2b^2 - ab^4 + b^4 + 5) = 0$$

$$a^5 + b^5 - (a+b)(a^4 + 0^3b^4 + \dots)$$

$$\left[\begin{array}{l} a = -b \\ a^4 + a^2b^2 + b^4 + 5 = a^3b + ab^3 = ab(a^2 + b^2) \end{array} \right]$$

$$a = -b$$

$$\log_a x = -\log_a(0,5y)$$

$$\log_a x = \log_a(0,5y)^{-1}$$

$$x = \frac{1}{0,5y}$$

$$x = \frac{2}{y}$$

$$xy = 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

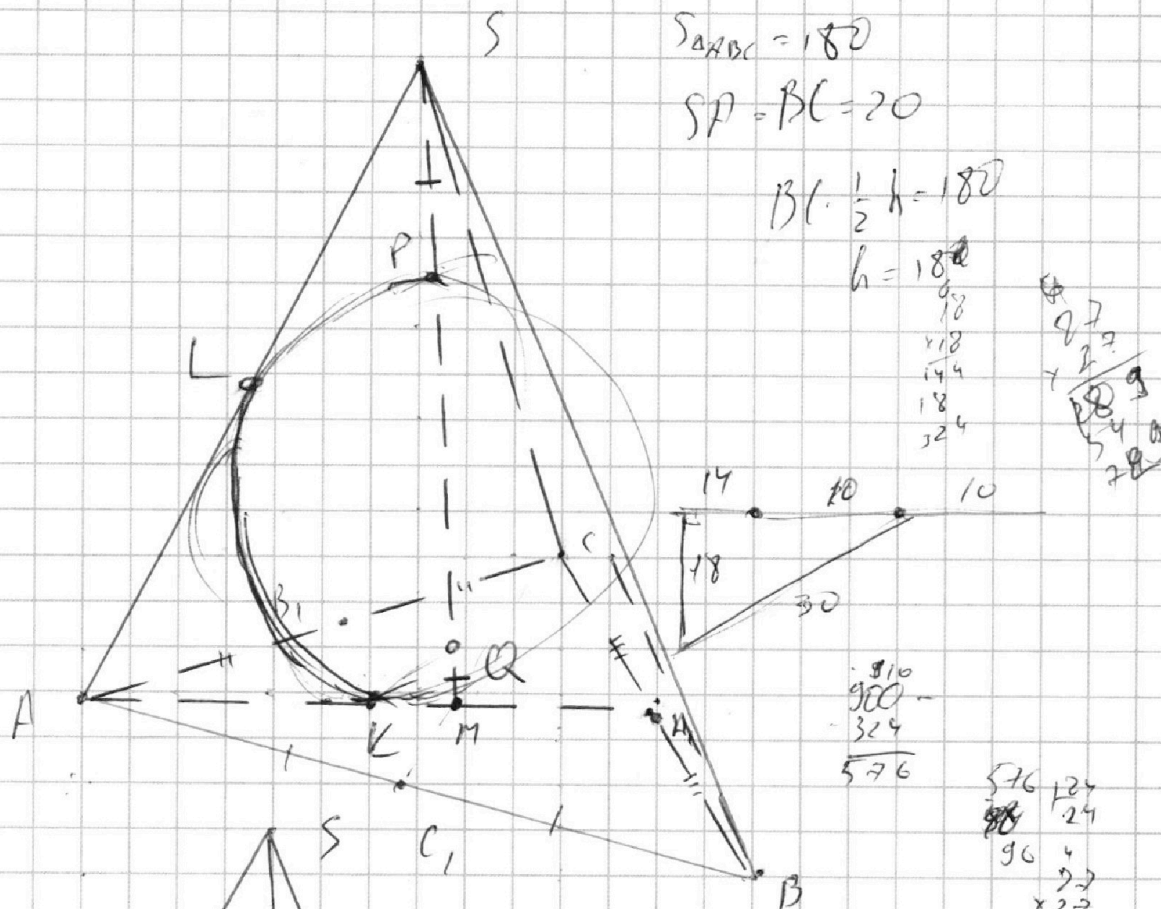
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 черновик

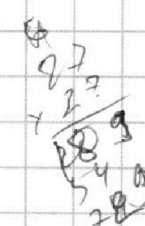


$$S_{ABC} = 180$$

$$SP = BC = 20$$

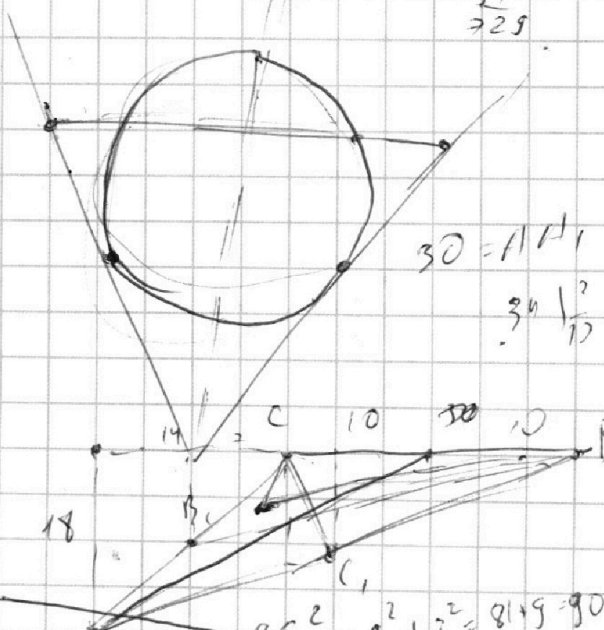
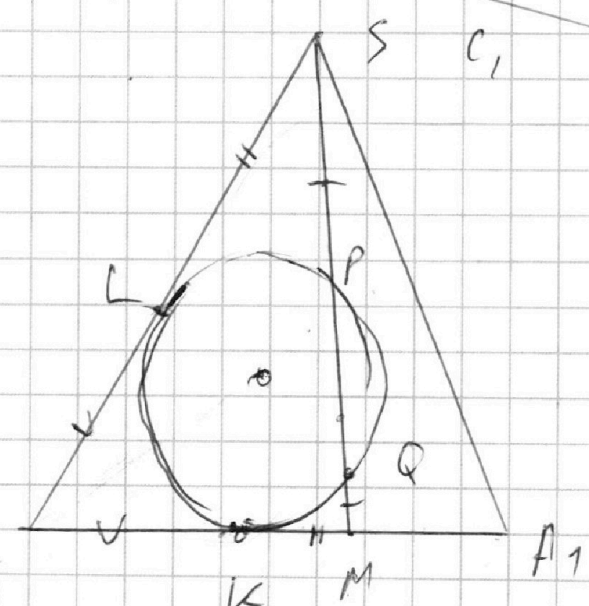
$$BC \cdot \frac{1}{2} h = 180$$

$$h = 180 \cdot 2 / 20 = 18$$



$$\begin{array}{r} 90 \\ 900 \\ - 324 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ 124 \\ \hline 96 \\ 96 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 229 \end{array}$$



$$AS = AM = 20 \quad ; \quad AA_1 = 30$$

$$BB_1^2 = 9^2 + 27^2 = 229 + 81 = 310$$

$$BB_1 = 9\sqrt{10}$$

$$BB_1 \cdot AA_1 \cdot CC_1 = 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 30 = 270 \cdot 30 = 8100$$

$$CC_1^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$$

$$CC_1 = 3\sqrt{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

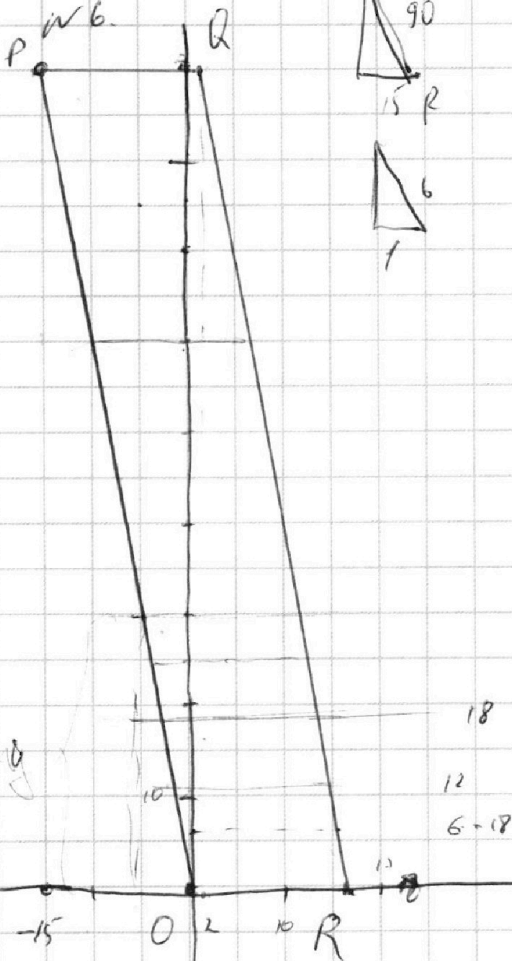
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.



$A, B \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

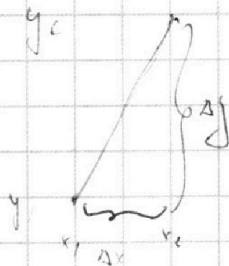
$6\Delta x + \Delta y = 48$

$\Delta x_{max} = 32$

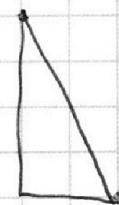
$\Delta y_{max} = 90$

$\Delta x_{min} = -32$

$\Delta y_{min} = -90$



$\Delta y = -24$
 $\Delta x = 12$



$6\Delta x + \Delta y = 48$

$\Delta y = -90 \rightarrow \begin{bmatrix} 24-10-12, 0 \\ 6, 12, 18, 24 \\ 2, 1, 1, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 51, 90 \\ 15 \end{bmatrix}$

$\Delta y = a$

$16 - 10 \rightarrow 18$
 $75 - 10 \rightarrow 17$

$\Delta y = 90 \rightarrow \Delta x$

$\frac{102 \pm 90}{6}$

$91 - 16 = 75$

$\Delta y = a$

$\Delta x_{min} = 17 + \frac{44}{6}$

$\Delta x_{min} = -17 + \frac{44}{6}$

$\Delta y = 48$
 $\Delta x \in [-25; 25]$

$-102 \leq 6\Delta x + \Delta y \leq 102 + 2a$

$48 \leq 102 + 2a$

$-54 \leq 2a \quad -27 \leq a$

$a \in [27; 102 - a] \leq 6\Delta x + \Delta y \leq 102 + a$

$\begin{cases} 48 \in 102 + a \\ -102 - a \leq 48 \end{cases}$

$6\Delta x - 48 \leq 2 \begin{cases} a > 54 \\ a \geq -150 \end{cases}$

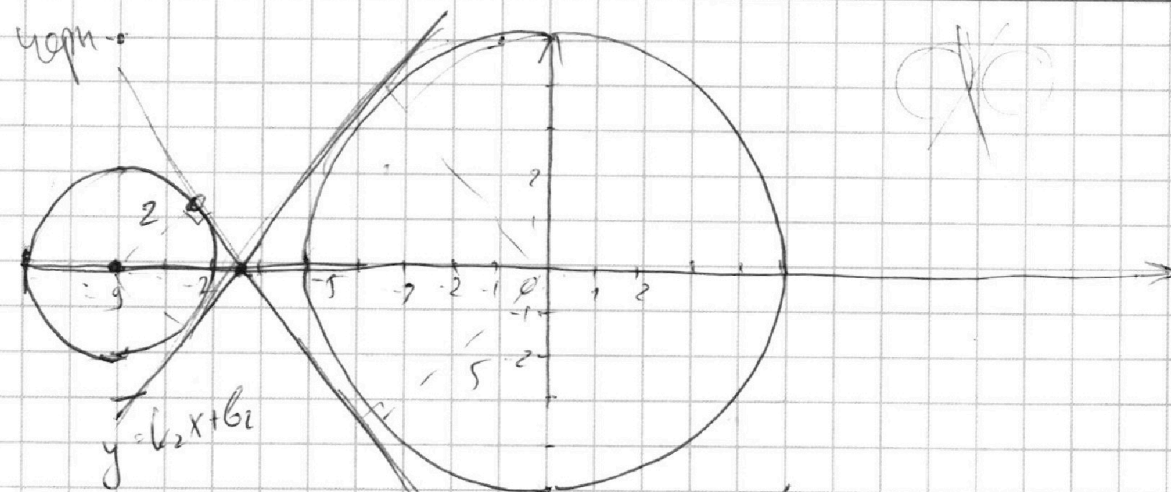
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$6ay = -5x + 6$$
$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$$

параметр a задается условием

касательная $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ или иначе a не может иметь
такой b , это 4 реш.

$$d + \frac{d}{2} \cdot 5 = 9$$

$$\frac{7}{2}d = 9$$
$$d = \frac{18}{7}$$

$$\frac{18}{7}$$

$$\frac{18}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

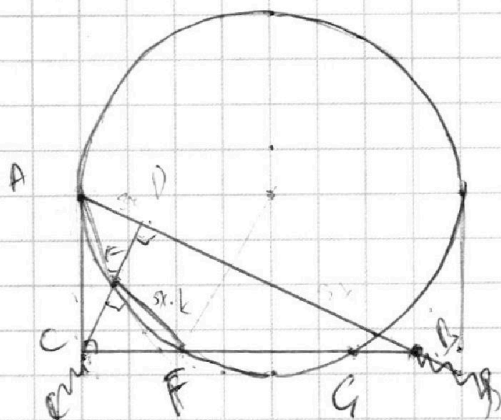
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Черновик.



$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$14x^2 = AC^2$$

$$\sqrt{14}x = AC$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

$$35x^2 = BC^2$$

$$BC = \sqrt{35}x$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} h \cdot 2x$$

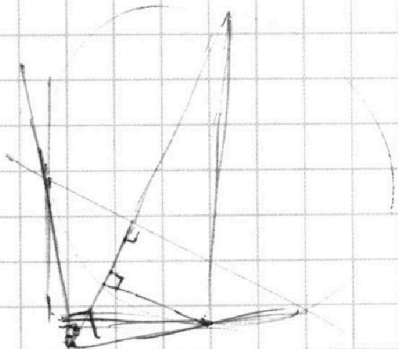
$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} h \cdot 5x$$

$$k^2 = \frac{CF}{CB} = \frac{CF}{\sqrt{35}x}$$

$$AC^2 = CF \cdot CG$$

$$BC = \sqrt{35}x$$

$$CF = k\sqrt{35}x$$



$$y^2 + 29y + 21 = 4$$

№4

$$5x + 6xy - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$