



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.



- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{N1} \quad ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, \quad bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, \quad ac : 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac \geq 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right).$$

min (abc), когда  
отсутствуют другие  
простые множители  
отличные от 2, 3, 5.

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}, \quad \text{т.к. } abc - \text{ натур.,}\\ \text{т.к. } abc - \text{ натур., т.к.}$$

$$abc \geq \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot \sqrt{3^7} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{5^7}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Рассмотрим  $a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ ,  $ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$   
 $ac \geq 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ ,  $b \geq 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma}$   
 $c \geq 2^{13-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma}$

$$bc \geq 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma} \cdot 2^{13-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma}$$

$$bc \geq 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\gamma}$$

abc - максимум  $bc$  - минимум  $abc$  минимум  $min$ ,  
 т.е.  $bc = 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\gamma}$   
 означает  $bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ , т.е.

$$2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\gamma} \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

стюдия т.к.  $\alpha, \beta, \gamma$  - целые, то  
 $\alpha = 7, \beta = 7, \gamma = 13$ :  $\left\{ \begin{array}{l} a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \\ b = 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma} \\ c = 2^{13-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma} \end{array} \right.$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

так как abc не может быть больше (доказательство  
 меньшее) также abc существует, т.к.  
 есть пример

$$\text{ОТВЕТ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

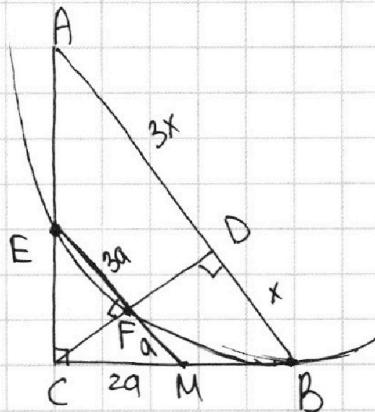
**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2 |

$$AB \parallel EF, AD : DB = 3 : 1. \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} - ?$$

Решение:



т.к.  $AB \perp CD$ ,  $AB \parallel EF$ , т.о  
 $EF \perp CD$ . Пусть  $AD = 3x$ ,  $DB = x$ ,  
тогда т.к.  $\triangle ABC$  - прямоугл.,  
а  $CD$  - бисектриса к шипотегле,  
т.о  $CD^2 = AD \cdot DB = 3x \cdot x$ ,  $CD = \sqrt{3}x$ .

~~Поскольку~~

Продолжим  $EF$  до пересечения с  $BC$ .  $EF \perp CB = T.M$   
тогда по Т Панка:  $\frac{EF}{AD} = \frac{FM}{DB}$ ,  $\frac{FM}{EF} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{3}$ ,

если  $FM = a$ , т.о  $EF = 3a$ , аналогично т.к.

$\triangle ECM$  - прямоугл., а  $CF$  - бисектриса прямог. к шипот.,  
т.о  $CF^2 = EF \cdot FM = 3a \cdot a$ ,  $CF = \sqrt{3}a$ .

По Т Пифагора  $CM = \sqrt{CF^2 + FM^2}$ ,  
 $CM = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$ .

$EM$  - симметрическая к окр-стм,  $MB$  - высота, 3н.

$$MB^2 = MF \cdot ME = a \cdot 4a, MB = 2a.$$

Таким образом, ~~также~~  $MB = CM$ , а 3н.

$EM$  - ср. линия, т.к.  $CE = EA$

$$\frac{EM}{AB} = \frac{1}{2}; \frac{a}{4x} = \frac{1}{2}, \frac{a}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{a} = 2$$

$$S_{\triangle ABC} = CD \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 4x \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{\triangle CFE} = CF \cdot FE \cdot \frac{1}{2} = 3a \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

ОТВЕТ: ~~16 : 3~~ 16 : 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### N 3 (продолжение)

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 2\pi \quad | \cdot 3 \quad -9\pi \leq \pi + 5\pi k \leq 6\pi \quad | -\pi \quad -6\pi \leq -\pi + 5\pi h \leq 4\pi \quad | +\pi$$

$$-10\pi \leq 5\pi k \leq 5\pi \quad | : 5\pi$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

$$k = -2, -1, 0, 1$$

$$-3\pi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi h \leq 2\pi \quad | \cdot 2$$

$$-6\pi \leq 5\pi h \leq 5\pi \quad | : 5\pi$$

$$-1 \leq h \leq 1$$

$$n = -1, 0, 1$$

Тогда имеем 7 корней: (некоторые совпадают)

$$k = -2: \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi$$

$$k = -1: \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi$$

$$k = 0: \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1: \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$$

$$h = -1: \quad x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -3\pi$$

$$h = 0: \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$h = 1: \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 2\pi$$

ОТВЕТ:  $-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} ,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2} \quad | \cdot 5$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \quad | - \frac{\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$5\pi - 10x = 2x + \pi + 20\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$5\pi - 10x + 2x + \pi = 10\pi + 20\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$12x = 4\pi - 20\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad | : 12$$

$$8x = -4\pi - 20\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad | : 8$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

as

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b = 6a & (1) \\ b = \frac{6}{5}a & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{36}{25}a^2 - a^2 = 4$$

$$\frac{11}{25}a^2 = 4, \quad a^2 = \frac{4 \cdot 25}{11}$$

и есть нужные наши кас

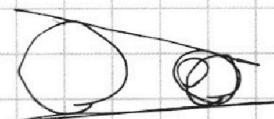
(1)

$$36a^2 - a^2 = 4$$

$$35a^2 = 4$$

$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{35}}$$

$$a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}$$



Таким образом, из выше сказанных  
рассуждений, нам получает  $a$ :

~~$$\left( -\frac{10}{\sqrt{11}} ; \pm \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$$~~

ОТВЕТ:  $\left( -\frac{10}{\sqrt{11}} ; \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИЕсли отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!NЧ продолжение)~~исследуем общие касательные этих окр-стей  
(находящиеся между их центрами,  
написаны на рисунке).~~

Исследуем общие касательные этих окр-стей  
(находящиеся между их центрами,  
написаны на рисунке),

Если крутить (1) касательную против часовой  
стрелки, то кривая пересекает ~~окр~~ касательную  
окруженность в 2 раза, а з.ч. имеем 4 разн.,  
т.е. такие  $a$  изображают (крутим до совпадения  
 $\angle \alpha$ ). Если крутить (2) по часовой стрелке  
до пересечения с  $\angle \alpha$ , то такие  $a$  изображают 4  
различные, а з.ч. такие  $a$  изображают.

Если же крутить в противоположные  
стороны до ~~одного~~ момента, когда прямые  
станут  $\perp$  друг другу, то, не имеем пересечения  
с окр-стями более, более того, если если  
двигать такие прямые вправо или влево,  
то имеем не более 2 разн., т.к. пересеч.

Будет лишь с одной из окружностей,  
т.е. при любом  $b$  такие прямые  
не изображут.

Найдем  $a$  и  $b$  при которых ~~есть~~  
прямые будут общей кас. синхронизаций бессене:

$$x^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}\beta\right)^2 - 9 = 0$$

Д откос.  $x$  должны быть равен 0,  
тогда будет 1 разн., а т.е. касание

и одновременно с этим

$$(x-6)^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}\beta\right)^2 - 4 = 0$$

Аналогично д откос.  $x$  должны быть равен 0

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3}{2}b \cdot \frac{a}{2}x \cdot x^1 + \frac{9}{4}b^2 - g = 0$$

$$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - \frac{3ba}{2}x + \frac{9}{4}b^2 - g = 0$$

$$\Delta = \frac{9b^2a^2}{4} - 4 \cdot ( \frac{9}{4}b^2 - g ) ( 1 + \frac{a^2}{4} ) = 0$$

$$\frac{9b^2a^2}{4} - 4 \left( \frac{9 \cdot b^2 \cdot a^2}{4 \cdot 4} + \frac{9}{4}b^2 - g - \frac{9a^2}{4} \right) = 0$$

$$-9b^2 + 36 + 9a^2 = 0, \quad a^2 - b^2 = -4, \quad b^2 - a^2 = 4$$

$$x^2 - 12x + 32 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3}{2}b \cdot \frac{a}{2}x \cdot x^1 + \frac{9}{4}b^2 = 0$$

$$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - x \cdot (12 + \frac{3ba}{2}) + \frac{9}{4}b^2 + 32 = 0$$

$$\Delta = (12 + \frac{3ba}{2})^2 - 4 \cdot (1 + \frac{a^2}{4}) \cdot (\frac{9}{4}b^2 + 32) =$$

$$= \frac{9b^2a^2}{4} + (12 \cdot \frac{3ba}{2} \cdot x^1 + 144 - 4 \cdot ( \frac{9}{4}b^2 + \frac{9 \cdot a^2 \cdot b^2}{4 \cdot 4} + \\ + 32 + 8a^2 ) = \frac{9b^2a^2}{4} + 36ab + 144 - 9b^2 - \frac{9 \cdot a^2 \cdot b^2}{4} \\ - 128 - 32a^2 = -9b^2 + 36ab - 32a^2 + 16 = 0$$

$$\begin{cases} 9a^2 - 9b^2 + 36 = 0 \\ -32a^2 - 9b^2 + 36ab + 16 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 9a^2 - 9b^2 + 36 = 0 \\ -32a^2 - 81b^2 + 144 = 0 \end{cases}$$

$$36a^2 + 288a^2 - 324ab - 36b^2 + 81b^2 = 0 \quad || \cdot 9$$

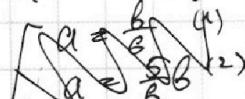
$$324a^2 - 324ab + 45b^2 = 0$$

$$36a^2 - 36ab + 5b^2 = 0$$

$$36(a - \frac{5}{6}b)(a - \frac{1}{6}b) = 0$$

$$36(a - \frac{5}{6}b)(6a - b) = 0$$

$$(6a - 5b)(6a - b) = 0$$



$$\begin{aligned} & 6a - 5b \\ & 6a - b \\ & \frac{35}{36}b^2 = \frac{4}{36}b^2 \\ & b^2 = \frac{4}{35}b^2 \end{aligned}$$





- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4 а-? находитася б, что ур-е имеет ч реш.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

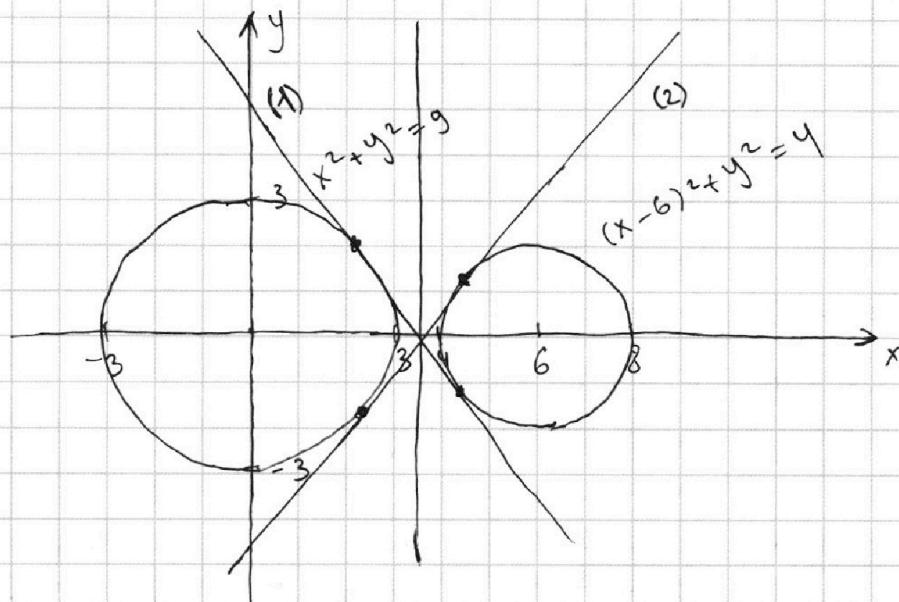
$$(1) \quad x^2 - 12x + 36 + y^2 = 36 - 32 \\ (x+6)^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \quad (c) \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (a) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (b) \end{cases}$$

(a) окр-ст с центром  
(0;0) и радиусом 3

(b) окружность с  
центром (6;0) и  
радиусом 2

Изобразим систему на к.н.:



(c) Это прямая ее наклон  $a$ , а  $b$  отвечает за сдвиг прямой вправо и влево.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

ограничения:

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x \neq 1$$

$$y \neq \frac{1}{x}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

Пусть  $\log_3 x = a$ , тогда имеем:

$$a^4 + 8 \cdot \frac{1}{a} = 2,5 \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + 3,5 \cdot \frac{1}{a} + 8 = 0 \quad | \cdot a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$a^5 + 8a + 3,5 = 0$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 = \log_{2sy^2} (3^5) - 8$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \log_{sy} 3 - 8$$

Пусть  $\log_3 sy = b$ , тогда

$$b^4 + 2 \cdot \frac{1}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8$$

$$b^4 - 3,5 \cdot \frac{1}{b} + 8 = 0 \quad | \cdot b \neq 0, \text{ т.к. } y \neq \frac{1}{5}$$

$$b^5 + 8b - 3,5 = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 8a + 3,5 = 0 \\ b^5 + 8b - 3,5 = 0 \end{cases}$$

$$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0$$

Откуда имеем  
к замене

$$a+b=0 \quad \text{бернемас}$$

$$\log_3 x + \log_3 sy = 0$$

$$\log_3 sy = \log_3 1$$

$$sy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

ОТВЕТ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6 право письме

Сл	Ox	Oy
1.	11	0
2.	10	3
3.	9	6
4.	8	9
5.	7	12
6.	6	15
7.	5	18
8.	4	21
9.	3	24
10.	2	27
11.	1	30
12.	0	33

исчитаем где  
каждое число  
вариантов:

хорошо



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6

стороки параллелирована  
задаются тройками:

$$y=0, \quad y=42, \quad y=\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}, \quad y=\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

$$y=-3x, \quad y=-3x+60,$$

значит количество верхних координат в  
ней

$$\begin{aligned} (1+4+7+\dots+42) \cdot 2 + 42 + 42 = \\ = \cancel{(1+4+7+\dots+42)} \cdot 14 + 42 \cdot 2 = \\ = 7 \cdot 43 + 42 \cdot 2 = 42 \cdot 7 + 42 \cdot 2 + \cancel{42} \cdot 7 = \\ = \cancel{42} \cdot 9 + 7 = 385 \end{aligned}$$

~~Знаят первые пары входят 385  
составляют, а оставшуюся~~

Условие  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$   
 $3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$

Можно интерпретировать, что координаты  
~~пар~~ образуют отрезок, который  
 как гипотенуза прямого угла с катетами  
 параллельными катетам. Откуда утрагиний  
 катет 11-ный  $Ox$  в будущем с  
 катетом 11-ным  $Oy$  должны давать  
 33. Такое катет 11-ный  $Oy$   
 должны  $\therefore 3$  (также это гипотенуза)

либо ~~также~~ также отрезок имеет форму  
 параболы из оси

Также имеем параллель стороны



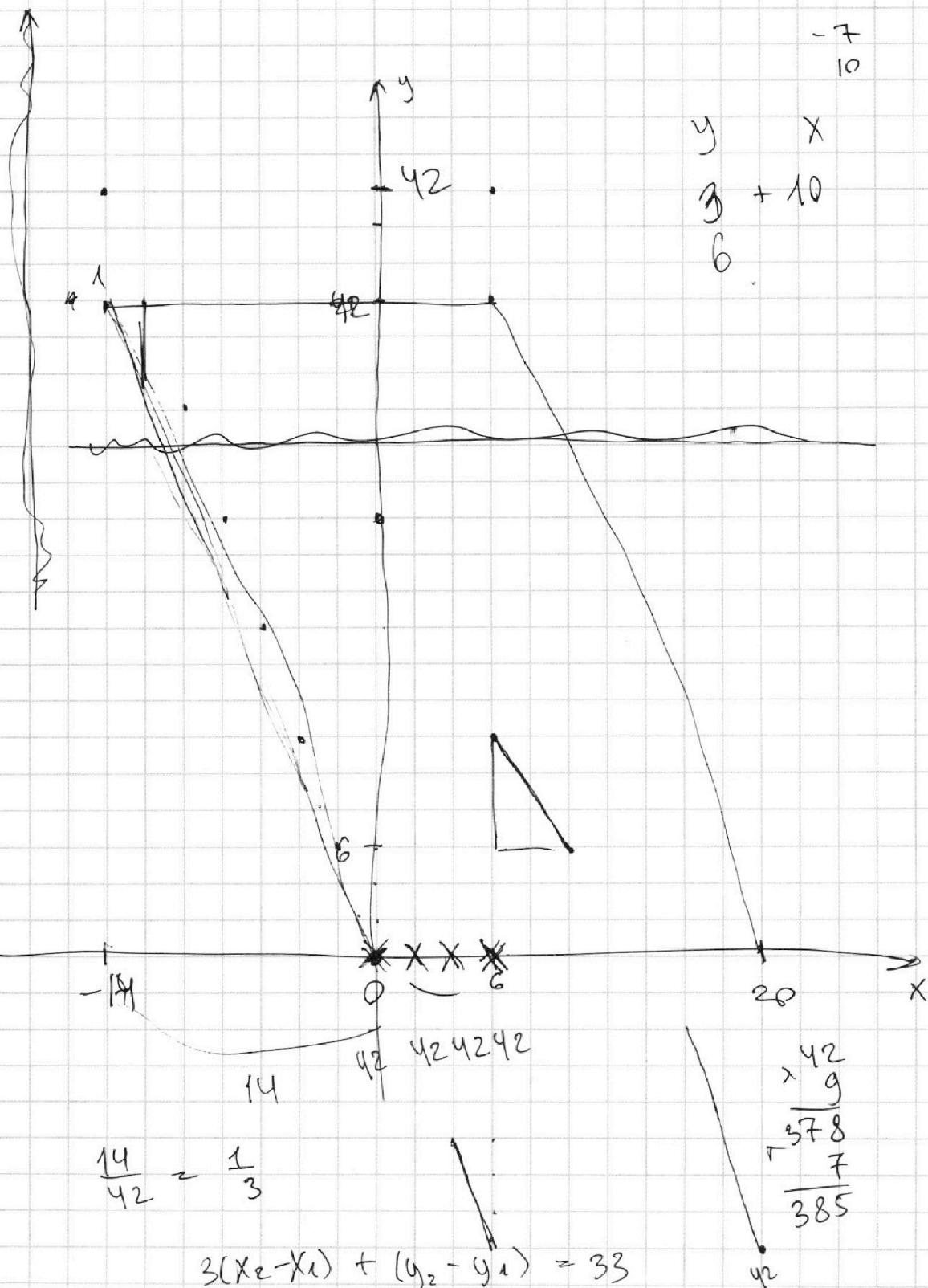
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$
$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$
$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$abc : \underbrace{5^{30} \cdot 3^{18} \cdot 2^{19}}_{ac} \cdot b$$
$$1 - ? - \text{бред}$$

$$a^2 b^2 c^2 :$$
$$\underbrace{19+9+14}_{28} = \boxed{42}$$

$$\underbrace{19+9-7}_{21}$$

$$36a^2 - \cancel{8ab} - \cancel{3ab} + 5b^2$$

21

$$a^5 + b^5$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \\ - a^5 + b a^4 \\ \hline b^5 - b a^4 \\ - b a^4 \\ b^5 + b^4 a \\ - b a^4 - b^4 a \end{array}$$

$$\begin{cases} a+b \\ a^4 - \cancel{b a^4} \\ + b^4 \end{cases}$$

$$(a+b)^5$$
$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)(a+b)$$

$$\log_3 a + \log_3 b < \log_3 5xy = 0$$
$$\log_3 5xy < \log_3 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \approx a^5 + b^5$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$
$$a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + b^5 - a^3b^2 + a^2b^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) 5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arccos(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arccos(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

Черновик

$$\underline{36+26}$$

$$62$$

$$-\frac{5\pi}{2}$$

$$\underline{66+46}$$

$$12$$

$$2\pi$$

$$-\pi$$

$$x$$

$$2\pi$$

$$-3\pi$$

$$2\pi$$

$$x$$

$$-3\pi$$

$$2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$ab : 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma} \quad mn(abc) - ?$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad - \text{разб}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$$

$$b = 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma}$$

$$c = 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma}$$

$$(9-\alpha + 19-\alpha) = 14$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ -13 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$(10-\beta + 18-\beta) = 13$$

$$(10-\gamma + 30-\gamma) = 13$$

$$\begin{array}{l} \beta = \\ 2\gamma = 27, \quad \gamma = 13 \end{array}$$

$$28 - 2\alpha = 14$$

$$\alpha = 7$$

$$\gamma = 5$$

$$\begin{array}{l} \alpha, \gamma - \text{текст} \\ \text{первое } \alpha, \gamma - \text{нет} \\ \text{второе } \alpha, \gamma - \text{нет} \\ \downarrow \text{привести пример} \\ \beta = 13 \end{array}$$

$$\text{нет?}$$



2

$$AB \parallel EF, \quad AD : DB = 3 : 1$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} - ?$$

$$S_{\triangle ABC} = AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{\triangle CEF} = CF \cdot EF \cdot \frac{1}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle BAC \quad \frac{EF}{AC} = \frac{EC}{AB} = \frac{CF}{CB}$$

$$\text{по } \angle C \text{ - т.нас}$$

$$CD^2 = X \cdot 3X$$

$$CD = \sqrt{3}X$$

$$\text{по } \angle C \text{ - т.нас}$$

$$CD = \frac{AC \cdot CB}{AB}$$

$$AC \cdot CB = CD \cdot AB$$

$$AC \cdot CB = \sqrt{3}X \cdot 4X = 4\sqrt{3}X^2$$

$$\begin{array}{c} \approx 1 \\ \approx 2 \\ \approx 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \arcsin(\cos x) \\ 3X \\ \arcsin(\cos x) \end{array}$$

степень 2?

т.нас  
горизонта?

н. 3

н. 2

н. 1

н. 1

н. 1

20

$$\begin{array}{c} \approx 2 \\ \approx 3 \\ \approx 4 \\ \approx 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \\ \sin x = \cos x \\ \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

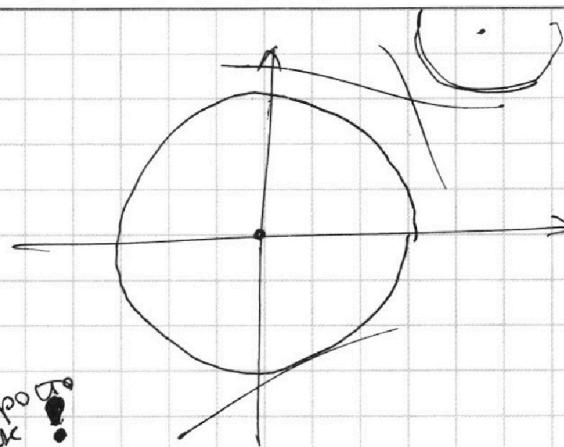
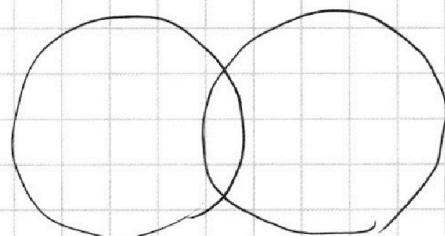


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновика



5)

$xy - ?$  не так нрд !

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\log_x 3}{\log_3 x} - 8$$

$$243 = 3 \cdot \underbrace{81}_{3^4}$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \underbrace{\frac{5}{2}}_{2,5} \cdot \frac{1}{t} - 8$$

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy$$

$$t^4 + \cancel{\frac{6}{t}} \cancel{\frac{1}{t}} + 8 = 0$$

$$t^5 + 8t + 3,5 = 0$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \cdot \frac{1}{\log_3 sy} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \frac{\log_{sy} 3}{\log_3 sy} - 8$$

аналогично!

$$m^4 + \frac{2}{m} = \cancel{\frac{11}{2}} \frac{1}{m} - 8$$

$$m^4 - 3,5 \frac{1}{m} + 8 = 0 \quad | \cdot m$$

$$m^5 + 8m - 3,5 = 0$$

$$\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH}$$

$$\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH}$$

$$AH^2 = BH \cdot HC$$



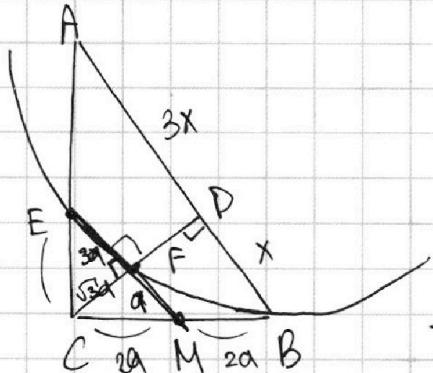
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF$$

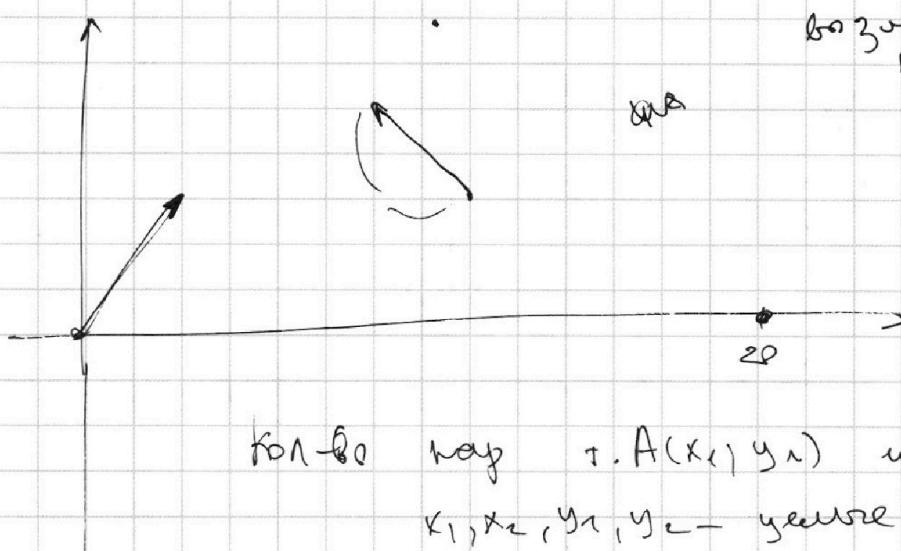
$$\begin{aligned} MB^2 &= MF \rightarrow ME \\ MB^2 &= a \cdot ya \\ MB &= 2a \end{aligned}$$

$$3g^2 + a^2 = 4a^2$$

Спектр

→ 2a!  
Metam

for 3 years  
per acre



for the way  $\tau \cdot A(x_1; y_1) \cup \tau \cdot B(x_2; y_2)$

$x_1, x_2, y_1, y_2$  — координаты

$$3x_2 - 3x_1 + \underbrace{y_2 - y_1}_{\vdots 3} = 33$$

tan  $\approx$  opposite

unrest

emperor

monotone  $\rightarrow$  бескрайний  
 симметричный  $\rightarrow$  направленный  
бескрайний

1 u 32

2 3

Cyathura et-  
Waldwisse  
S-rea.

bereits sehr tief  $\rightarrow$  x neu  
nach.

ways.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ

