МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$$\begin{cases} ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{cases}$$

min (abc), когда отсутствуют другие простые мн-ли отличные от 2, 3, 5.

$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$, т.к. a, b, c – натур, то abc – натур., тогда

$abc \geq \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$

$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot \sqrt{3} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{5}$

$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Пусть $a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, $ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$b \geq 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma}$

$ac \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$, $c \geq 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma}$

$bc \geq 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma} \cdot 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma}$

$bc \geq 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\gamma}$

чтобы abc – быть min, bc – должно быть min, т.е. $bc = 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\gamma}$,

однако $bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, т.е.

$2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\gamma} \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$,

откуда т.к. α, β, γ – целые, то $\alpha = 7$, $\beta = 7$, $\gamma = 13$:

$$\begin{cases} a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \\ b = 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma} \\ c = 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma} \end{cases}$$

$abc = 2^{28-\alpha} \cdot 3^{28-\beta} \cdot 5^{40-\gamma} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

т.к. abc не может быть ~~больше~~ меньше (доказано мной выше) также ~~abc~~ существует, т.к. есть пример

ОТВЕТ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

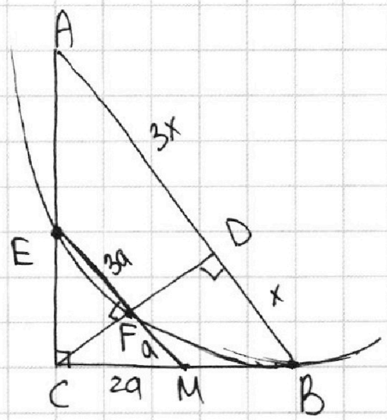
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3:1$. $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$ – ?



Решение:

т.к. $AB \perp CD$, $AB \parallel EF$, то $EF \perp CD$. Пусть $AD = 3x$, $DB = x$, тогда т.к. $\triangle ABC$ – прямоуг., а CD – высота к гипотенузе, то $CD^2 = AD \cdot DB = 3x \cdot x$, $CD = \sqrt{3}x$.

Продлим EF до пересечения с BC. $EF \cap CB =$ т. M
Тогда по Т Фалеса: $\frac{EF}{AD} = \frac{FM}{DB}$, $\frac{FM}{EF} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{3}$,
если $FM = a$, то $EF = 3a$, аналогично т.к. $\triangle ECM$ – прямоуг. а CF – высота провед. к гипот., то $CF^2 = EF \cdot FM = 3a \cdot a$, $CF = \sqrt{3}a$.
По Т Пифагора для $\triangle CFM$: $CM = \sqrt{CF^2 + FM^2}$,
$CM = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.
EM – секущая к окр-сти, MB – касат, зн.
$MB^2 = MF \cdot ME = a \cdot 4a$, $MB = 2a$.
Таким образом, $MB = CM$, а зн.
EM – ср. линия, т.е. $CE = EA$ и
$\frac{EM}{AB} = \frac{1}{2}$; $\frac{4a}{4x} = \frac{1}{2}$, $\frac{a}{x} = \frac{1}{2}$, => $\frac{x}{a} = 2$

$S_{\triangle ABC} = CD \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 4x \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x^2$

$S_{\triangle CFE} = CF \cdot FE \cdot \frac{1}{2} = 3a \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3}$

ОТВЕТ: 16 : 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 (продолжение)

$-3\pi \le \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \le 2\pi \quad | \cdot 3$

$-9\pi \le \pi + 5\pi k \le 6\pi \quad | -\pi$

$-10\pi \le 5\pi k \le 5\pi \quad | : 5\pi$

$-2 \le k \le 1$

$k=-2,\ k=-1,\ k=0,\ k=1$

$-3\pi \le -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n \le 2\pi \quad | \cdot 2$

$-6\pi \le -\pi + 5\pi n \le 4\pi \quad | +\pi$

$-5\pi \le 5\pi n \le 5\pi \quad | : 5\pi$

$-1 \le n \le 1$

$n=-1,\ n=0,\ n=1$

Тогда имеем 7 корней: (некоторые совпадают)

$k=-2: \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi$

$k=-1: \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi$

$k=0: \quad x = \frac{\pi}{3}$

$k=1: \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$

совпали

$n=-1: \quad x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -3\pi$

совпали

$n=0: \quad x = -\frac{\pi}{2}$

$n=1: \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 2\pi$

ОТВЕТ: $-3\pi;\ -\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3};\ 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(\cos x) \le \frac{\pi}{2} \quad \Big| \cdot 5$$

$$-\frac{5}{2}\pi \le 5\arcsin(\cos x) \le \frac{5}{2}\pi$$

$$-\frac{5}{2}\pi \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5}{2}\pi \quad \Big| -\frac{\pi}{2}$$

$$-3\pi \le x \le 2\pi$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.,$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \cdot 10 \\ \cdot 10 \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{l} 5\pi - 10x = 2x + \pi + 20\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ 5\pi \underbrace{- 10x + 2x}_{-8x} + \pi = 10\pi + 20\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.,$$

$$\left[\begin{array}{l} 12x = 4\pi - 20\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ 8x = -4\pi - 20\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right., \quad \begin{array}{l} :12 \\ :8 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$-3\pi \le x \le 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

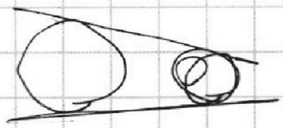
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[\begin{array}{ll} b = 6a & (1) \\ b = \frac{6}{5}a & (2) \end{array}\right.$$

(1)
$36a^2 - a^2 = 4$
$35a^2 = 4$
$a = \pm \frac{2}{\sqrt{35}}$

(2) $\frac{36}{25}a^2 - a^2 = 4$
$\frac{11}{25}a^2 = 4$, $a^2 = \frac{4 \cdot 25}{11}$, $a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}$

и есть нужные нам кас
две другие общие кас.:



Таким образом, из выше сказанных рассуждений, нам подходит a:

$\cancel{\pm\frac{2}{\sqrt{35}}}$ $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}} ; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

ОТВЕТ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}} ; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение

~~Исследуем радикальную ось этих общих окружностей.~~

Исследуем общие касательные этих окр-стей (находящиеся между их центрами, показаны на рисунке).
Если крутить (1) касательную против часовой стрелке, то прямые пересекают ~~окр~~ каждую окружность по 2 раза, а зн имеем 4 реш., т.е. такие а подходят (крутим до совпадения с Ox). Если крутить (2) по часовой стрелке до пересечения с Ox, то также имеем 4 решения, а зн. такие а подходят.
Если же крутить в противоположные стороны до ~~совпа~~ момента, когда прямые станут ||-ны Oy, не имеем пересечений с окр-стями вовсе, более того, даже если двигать такие прямые вправо или влево, то имеем не более 2 реш., т.к пересеч. будет лишь с одной из окружностей, т.е. при любом b такие прямые не подойдут.

Найдем a и b при которых ~~пр~~ прямая будет общей кас. описанной выше:

$$x^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b\right)^2 - 9 = 0$$

D относ. x должен быть равен 0, тогда будет 1 реш., а т.е. касание

И одновременно с этим

$$(x-6)^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b\right)^2 - 4 = 0$$

Аналогично D относит. x должен быть равен 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x^2+\frac{a^2}{4}x^2-\frac{3}{\cancel{2}}b\cdot\frac{a}{2}x\cdot\cancel{2}+\frac{9}{4}b^2-9=0$$

$$x^2\left(1+\frac{a^2}{4}\right)-\frac{3ba}{2}x+\frac{9}{4}b^2-9=0$$

$$D=\frac{9b^2a^2}{4}-4\cdot\left(\frac{9}{4}b^2-9\right)\left(1+\frac{a^2}{4}\right)=0$$

$$\frac{9b^2a^2}{4}-4\left(\frac{9\cdot b^2\cdot a^2}{4\cdot 4}+\frac{9}{4}b^2-9-\frac{9a^2}{4}\right)=0$$

$$-9b^2+36+9a^2=0,\quad a^2-b^2=-4,\quad b^2-a^2=4$$

$$x^2-12x+32+\frac{a^2}{4}x^2-\frac{3}{2}b\cdot\frac{a}{\cancel{2}}x\cancel{2}+\frac{9}{4}b^2=0$$

$$x^2\left(1+\frac{a^2}{4}\right)-x\cdot\left(12+\frac{3ba}{2}\right)+\frac{9}{4}b^2+32=0$$

$$D=\left(12+\frac{3ba}{2}\right)^2-4\cdot\left(1+\frac{a^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}b^2+32\right)=$$

$$=\frac{9b^2a^2}{4}+12\cdot\frac{3ba}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}+144-4\cdot\left(\frac{9}{4}b^2+\frac{9\cdot a^2\cdot b^2}{4\cdot 4}+\right.$$

$$\left.+32+8a^2\right)=\cancel{\frac{9b^2a^2}{4}}+36ab+144-9b^2-\cancel{\frac{9\cdot a^2\cdot b^2}{4}}$$

$$-128-32a^2=-9b^2+36ab-32a^2+16=0$$

$$\begin{cases}9a^2-9b^2+36=0\\-32a^2-9b^2+36ab+16=0\end{cases}\begin{vmatrix}\cdot 4\\ \cdot 9\end{vmatrix},\quad \begin{cases}36a^2-36b^2+144=0\\-288a^2-81b^2+144+324ab=0\end{cases}-$$

$$36a^2+288a^2-324ab-36b^2+81b^2=0$$

$$324a^2-324ab+45b^2=0\quad |:9$$

$$36a^2-36ab+5b^2=0$$

$$\cancel{36\left(a-\frac{5}{9}b\right)\left(a-\frac{4}{9}b\right)}$$

$$36\left(a-\frac{5}{6}b\right)\left(a-\frac{b}{6}\right)=0$$

$$(6a-5b)(6a-b)=0$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l}a=\frac{b}{6}\ (1)\\ a=\frac{5}{6}b\ (2)\end{array}\right.}$$

$$\cancel{(1)\ b^2-\frac{b^2}{36}=4}$$

$$\cancel{\frac{35}{36}b^2=4}$$

$$\cancel{b^2=\frac{4\cdot 36}{35}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 a - ? найдется b, что система ур-ий имеет 4 реш.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases},$$

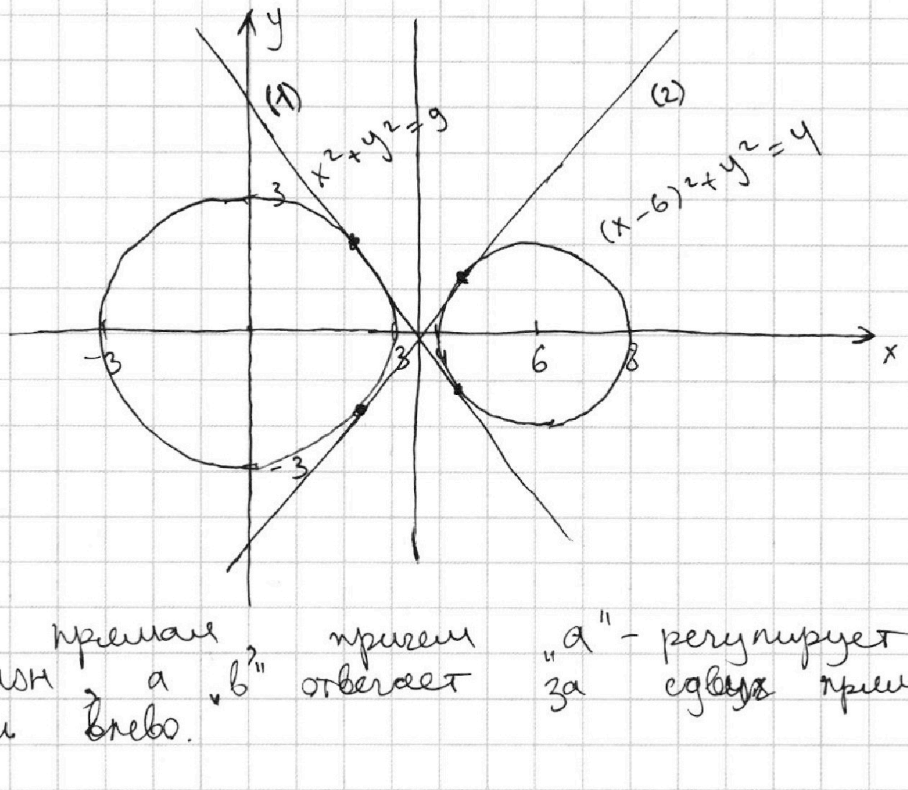
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \ (1) \end{array}\right. \end{cases},\qquad \begin{cases} y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \ (c) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \ (a) \\ (x-6)^2+y^2=4 \ (b) \end{array}\right. \end{cases}$$

(1) $x^2-12x+36+y^2=36-32$
$(x-6)^2+y^2=4$

(a) окр-сть с центром $(0;0)$ и радиусом 3

(b) окружность с центром $(6;0)$ и радиусом 2

Изобразим систему на к.п.:



(c) это прямая, причем „a" - регулирует ее наклон, а „b" отвечает за сдвиг прямой вправо и влево.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ОГРАНИЧЕНИЯ:
$x > 0$
$y > 0$
$x \neq 1$
$y \neq \frac{1}{5}$

№5

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$$

Пусть $\log_3 x = a$, тогда имеем:

$$a^4 + 6\cdot\frac{1}{a} = 2{,}5\cdot\frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + 3{,}5\cdot\frac{1}{a} + 8 = 0 \quad |\cdot a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$a^5 + 8a + 3{,}5 = 0$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot\log_{5y} 3 - 8$$

Пусть $\log_3 5y = b$, тогда

$$b^4 + 2\cdot\frac{1}{b} = \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{b} - 8$$

$$b^4 - 3{,}5\cdot\frac{1}{b} + 8 = 0 \quad |\cdot b \neq 0, \text{ т.к. } y \neq \frac{1}{5}$$

$$b^5 + 8b - 3{,}5 = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 8a + 3{,}5 = 0 \\ b^5 + 8b - 3{,}5 = 0 \end{cases} +$$

$$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0$$

$$(a+b)(\underbrace{a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4}_{\text{~~единств.~~ ~~реш.~~} 0 \text{ для } a \text{ и } b}) + 8(a+b) = 0$$

Откуда имеем $a + b = 0$, вернемся к замене

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5yx = \log_3 1$$

$$5yx = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{5}$

№6 продолжение

сл	Ox	Oy
1.	11	0
2.	10	3
3.	9	6
4.	8	9
5.	7	12
6.	6	15
7.	5	18
8.	4	21
9.	3	24
10.	2	27
11.	1	30
12.	0	33

посчитаем для каждого случая вариантов:

~~1сл~~:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 / стороны параллелограмма задаются прямыми:

$y=0$, $y=42$, ~~$y=-\frac{x}{6}$, $y=-\frac{x}{6}$~~

$y=-3x$, $y=-3x+60$,

значит количество пар целых координат в нем

$(1+4+7+\dots+42)\cdot 2+42+42=$

$=\frac{1+42}{2}\cdot 14 + 42\cdot 2 =$

$=7\cdot 43+42\cdot 2=42\cdot 7+42\cdot 2+7=$

$=42\cdot 9+7=385$

~~Значит первую пару выбираем 385 способами, а оставшуюся~~

Условие $3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$

$3(x_2-x_1)+y_2-y_1=33$

Можно интерпретировать, что координаты пар образуют отрезок, который как гипотенуза прямоуг △-ка с катетами параллельными осям. Откуда утроенный катет 11-ный Ox в сумме с катетом 11-ным Oy должен давать 33. Тогда катет 11-ный Oy должен $\vdots$ 3 (точнее его длина)

либо такой отрезок лежит на на одной из оси

Тогда имеем варианты сторон

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

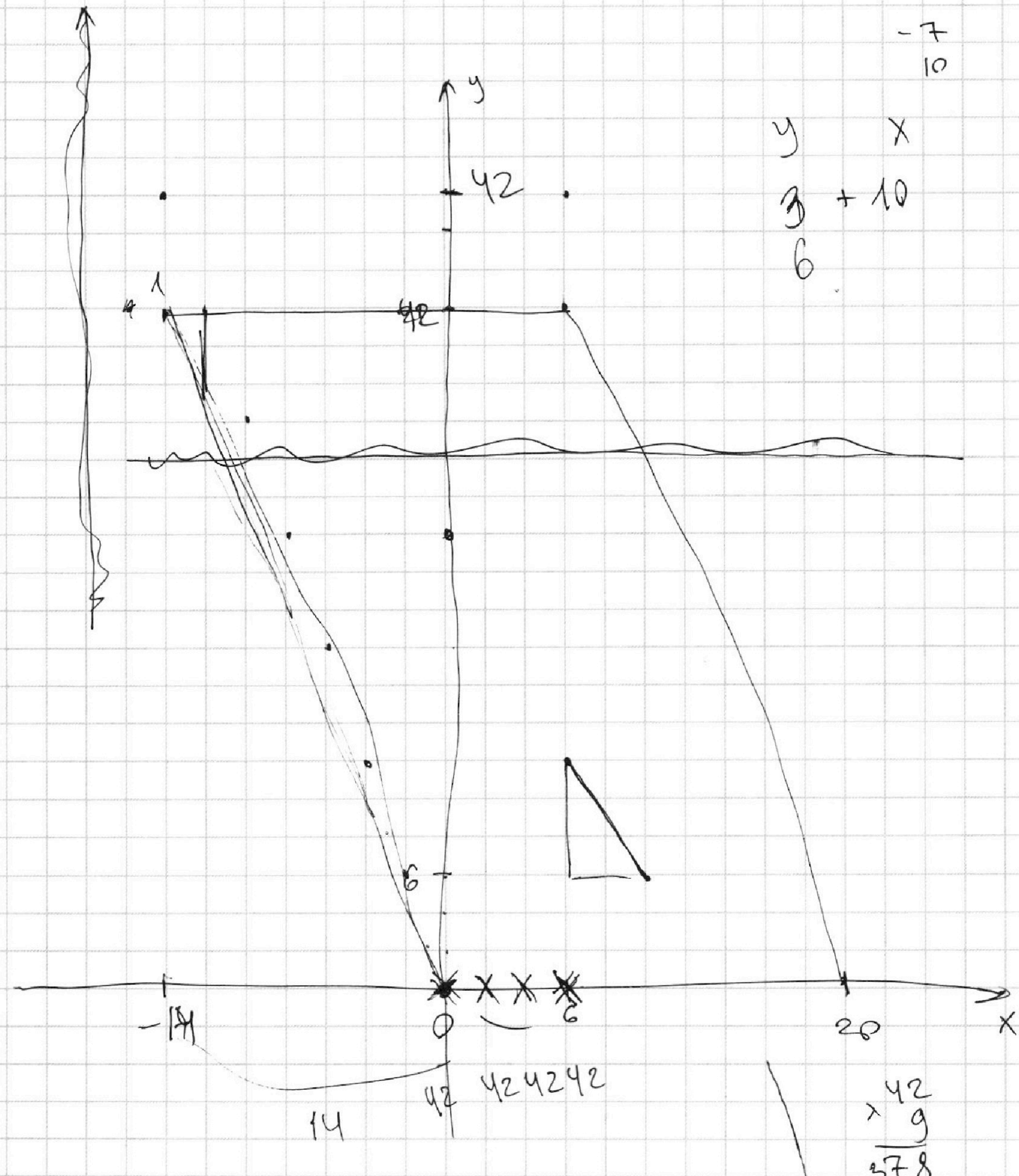
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

-7
10

y x
3 + 10
6



$\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r} \times\ 42 \\ 9 \\ \hline +\ 378 \\ 7 \\ \hline 385 \end{array}$$

$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$

42

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc \vdots 2^{14} 3^{13} \cdot 5^{13}$,
$ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$abc \vdots \underbrace{5^{30} \cdot 3^{18} \cdot 2^{19}}_{ac} \cdot b$

1 - ? - бред

$\underbrace{19+9}_{28}+14 = \boxed{42}$

$a^2 b^2 c^2 \vdots$

21

$19 + \underbrace{9-7}_{21}$

$36a^2 - 6ab - 30ab + 5b^2$

$a^5 + b^5$

$a^5 + b^5$
$-\ a^5 + ba^4$
$b^5 - ba^4$
$b^5 + b^4a$
$-ba^4 - b^4a$

$a+b$
a^4
$+b^4$

$(a+b)^5$
$(a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)(a+b)$

$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5xy = 0$
$a + b$
$\log_3 5xy = \log_3 1$
$xy = \frac{1}{5}$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 \quad)$

$= a^5 + b^5$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^5 \cancel{-a^4b} \cancel{+a^3b^2} \cancel{-a^2b^3} \cancel{+ab^4} + ba^4 \cancel{-a^3b^2} \cancel{+a^2b^3}$
$\cancel{-ab^4} + b^5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

Черновик

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(\cos x) \le \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5}{2}\pi \le 5\arcsin(\cos x) \le \frac{5\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$

$-3\pi \le x \le 2\pi$

Пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

тогда $5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$

$\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right)$

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\frac{3b \pm 2b}{b}$

$\frac{6b \pm 4b}{12} = 3b\pm$

$D = 36b^2 - 36 \cdot 4 \cdot 5b^2 = 16$

$36b^2(36-20)$

$\boxed{16b^2}$

$\frac{36b \pm 4b \cdot 6}{72} = \frac{9b \pm b}{18}$

$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

2^2, 2^5, 3^5, $2 \cdot 4{,}5$, $0{,}5 \cdot 6{,}5$

$81 - 36 = 45$

4) $\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + (x-6)^2 = 4 \end{array}\right.$ две окр-сти радиусом 3 и 2

иначе $y^2 + x^2 - 12x + 36 = 4$

$y^2 + (x-6)^2 = 4$

$324 \mid 36$, 9, 27, 54

4 реш.

$ax + 2y - 3b = 0$

$2y = -ax + 3b$

$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$ для каждого b равно 4 реш.

отвечает за сдвиги вверх вниз

крутит

НАЙДЁТСЯ ЗНАЧЕНИЕ b

$32 \cdot 9 = 288$

$288 + 36 = 324$

$81 \cdot 4 = 324$

$36 \cdot 9 = 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1

$ab \vdots 2^{9} 3^{10} 5^{10}$

$bc \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$ — разл

$ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} 5^{30}$

$\min(abc)$ — ?

a, c — нечет

нужно a, c — чет ~~извлечь корень~~ ← плохая идея

привести пример или нет?

$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$

$b = 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma}$

$c = 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma}$

$\beta = 7$

2 10

$28 - 2\alpha = 14$ $\gamma = 5$

$\alpha = 7$

$(9-\alpha + 19-\alpha) = 14$

$(10-\beta + 18-\beta) = 13$

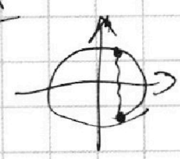
$(10-\gamma + 30-\gamma) = 13$

28
-13
15

~~оценка~~ ~~нахождение~~ Тройки

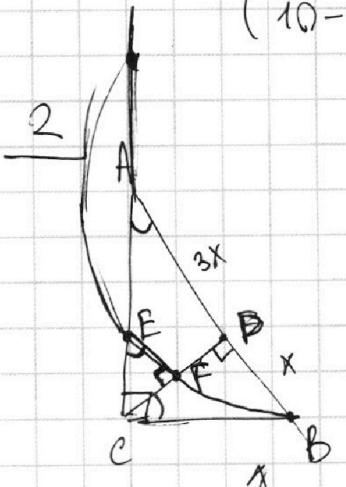
$\beta =$

$2\gamma = 27$, $\gamma = 13$



2

$AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$ — ?



$S_{\triangle ABC} = AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$

$S_{\triangle CEF} = CF \cdot EF \cdot \frac{1}{2}$

$\triangle CEF \sim \triangle BAC$ $\frac{EF}{AC} = \frac{EC}{AB} = \frac{CF}{CB}$

~~Ясно~~. $CD^2 = x \cdot 3x$

$CD = \sqrt{3}\,x$, ~~Ясно~~. $CD = \frac{AC \cdot CB}{AB}$

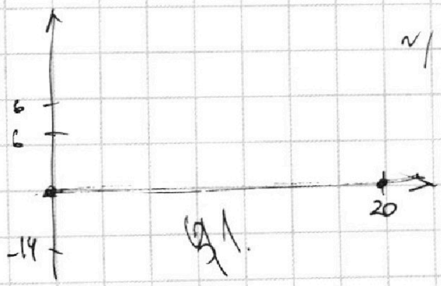
AB — т. кас

степень точки?

$AC \cdot CB = CD \cdot AB$

$AC \cdot CB = \sqrt{3}\,x \cdot 4x = 4\sqrt{3}\,x^2$

1, 2, 3,



~~ДИ~~ 9 1.

$\frac{2}{1,5}$ $\frac{7}{3}$

$\frac{29}{12}$ $\frac{5}{3}$

arcsin(sin

3x x

arcsin(cos x)

α

sin

$\sin\alpha = \cos x$

$\sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})$

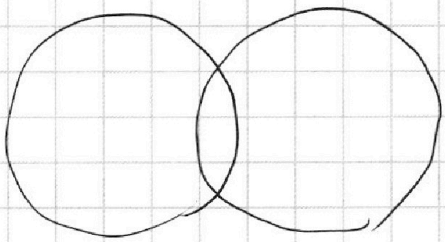
$\frac{5}{2}$

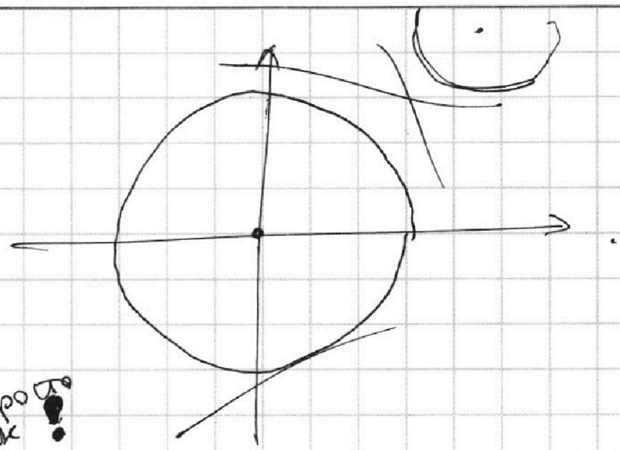
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик





5

$xy - ?$ — не просто так!

ОГРАНИЧ:

$x > 0$

$x \neq 1$

$243 = 3\cdot \underbrace{81}_{3^4}$ $= 3^5$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + 6\cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot \underbrace{\log_x 3}_{\frac{1}{\log_3 x}} - 8$

$t^4 + \frac{6}{t} = \underbrace{\frac{5}{2}}_{2,5}\frac{1}{t} - 8$

$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy$

$t^4 + \frac{7}{2}\frac{1}{t} + 8 = 0$

$t^5 + 8t + 3{,}5 = 0$

$\log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

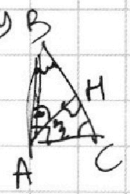
$\log_3^4 (5y) + 2\cdot \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot \underbrace{\log_{5y} 3}_{\frac{1}{\log_3 5y}} - 8$

сложить!

$m^4 + \frac{2}{m} = \underbrace{\frac{11}{2}}_{5,5}\frac{1}{m} - 8$

$m^4 - 3{,}5\frac{1}{m} + 8 = 0 \quad |\cdot m$

$m^5 + 8m - 3{,}5 = 0$



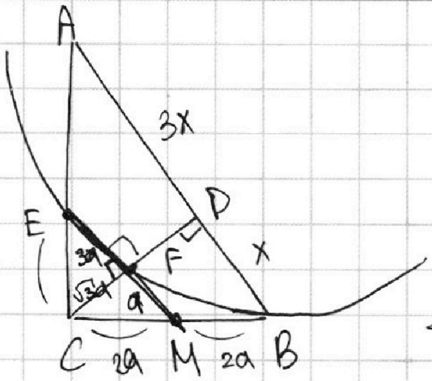
$\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH}$

$AH^2 = BH\cdot HC$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AB ∥ EF

$MB^2 = MF \cdot ME$

$MB^2 = a \cdot 4a$

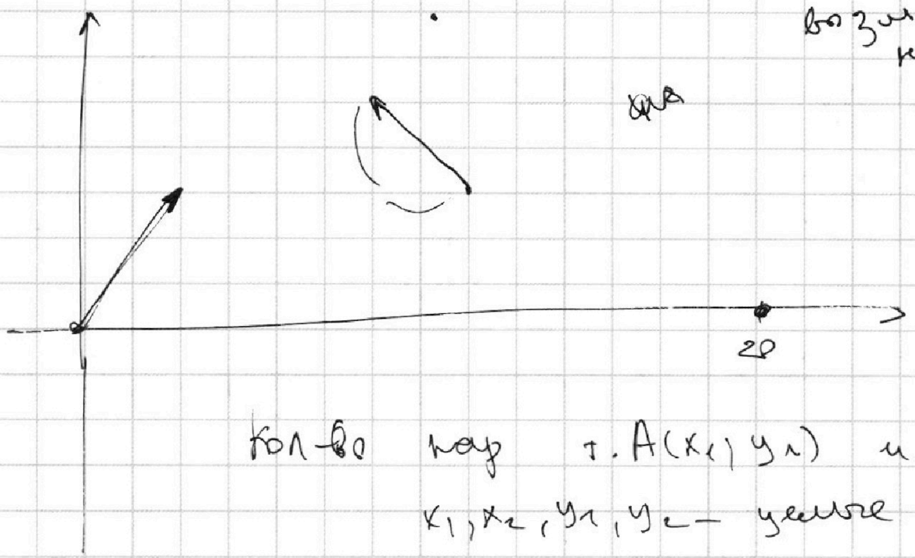
$MB = 2a$

$3a^2 + a^2 = 4a^2$

2a!

средняя линия!

возможно на границе



Кол-во пар т. $A(x_1; y_1)$ и т. $B(x_2; y_2)$

x_1, x_2, y_1, y_2 — целые

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

⋮ 3

модуль вектора

сумма координат вектора → 33

сумма ст-н прямоуг Δ-ка,

так что в сумме 33

1 и 32

2 и

выбираем точку → к ней пару.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ