



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BSC в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$, $a, b, c : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$, $a, b, c : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$

н.о.ч. a, b, c

Пусть $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ - степени в каноническом разложении a ;
 $\beta_2, \beta_3, \beta_5$ - степени в каноническом разложении b ;
 $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ - степени в каноническом разложении c

из (1): $\alpha_2 + \beta_2 \geq 8$

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 14$

(2): $\beta_2 + \gamma_2 \geq 12$

$\beta_3 + \gamma_3 \geq 20$

(3): $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 14$

$\gamma_3 + \alpha_3 \geq 21$

$\alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 \geq \frac{34}{2} = 17$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 2 \cdot \frac{35}{2} = 35$ (т.к. $\sum \leq 40$)

напр.: $\beta_2 = 3, \alpha_2 = 5, \gamma_2 = 9$

напр.: $\alpha_3 = 8, \beta_3 = 6, \gamma_3 = 14$

из (1): $\alpha_5 + \beta_5 \geq 12$

(2): $\beta_5 + \gamma_5 \geq 17$

$\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 35$

(3): $\gamma_5 + \alpha_5 \geq 39$

возьмем $\alpha_5 = 19, \gamma_5 = 20$, тогда

$\alpha_5 + \beta_5 \geq 19$ и $\beta_5 + \gamma_5 \geq 20$ - ОК

~~Можно было бы...~~

$a, b, c \geq 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} = 2^{17} \cdot 3^{35} \cdot 5^{39}$

Пример: $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$

$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$

$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{35} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

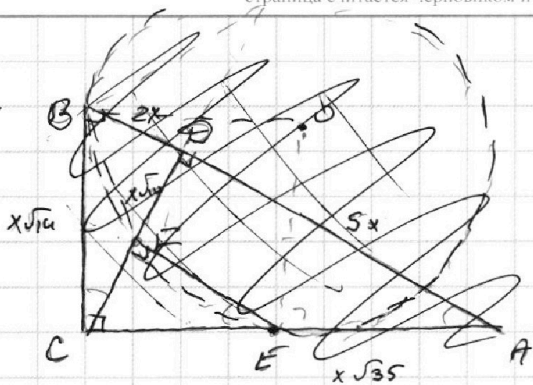
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



Пусть $AD = 5x$, тогда $BD = 2x$
 CD по формуле высоты из прямого угла — $x\sqrt{6}$

т.е. $FE \parallel AD$ $\angle CFE = 30^\circ$

По т.т. Пифагора $BC = x\sqrt{6}$

$$AC = x\sqrt{5}$$

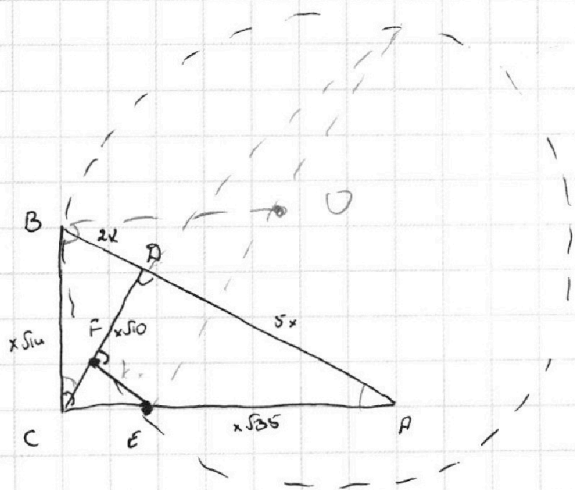
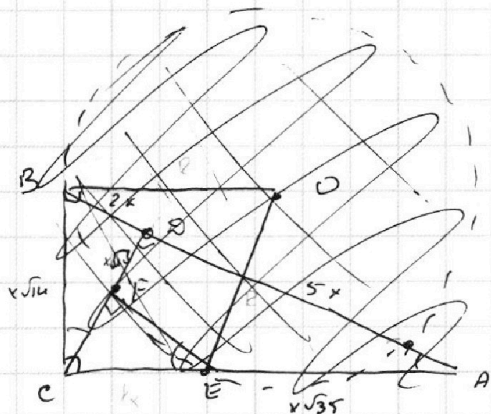
F лежит на окружности и $\angle EPD = 90^\circ \rightarrow$ $CFED$ опущ. на диаметр

$$S_{ABC} = \frac{7}{5} \cdot S_{AED} \text{ по высоте } \text{от } B \text{ площади}$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{AED}} = \left(\frac{FE}{5x}\right)^2 \rightarrow S_{AED} = S_{CFE} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$

$$S_{ABC} = \frac{7}{5} \cdot S_{CFE} \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

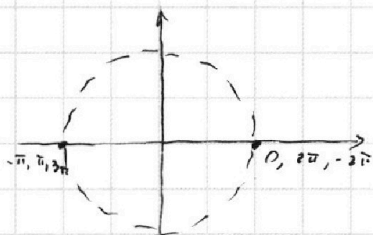
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 3. \quad 10 a_2 \sin(\cos x) &= \pi - 2x \\ 10 \left(\frac{\pi}{2} - a_2 \cos(\cos x) \right) &= \pi - 2x \\ 5\pi - 10 a_2 \cos(\cos x) &= \pi - 2x \\ 4\pi + 2x &= 10 a_2 \cos(\cos x) \\ 2\pi + x &= 5 a_2 \cos(\cos x) \\ 0 \leq \frac{2\pi + x}{5} \leq \pi & \quad 0 \leq \frac{a_2 \cos(\cos x)}{1} \leq \pi \end{aligned}$$

$$x \in [-2\pi; 3\pi]$$



$$x \in [0; \pi] : a_2 \cos(\cos x) = x$$

$$2\pi + x = 5x ; \quad 2\pi = 4x ; \quad x = \frac{\pi}{2} - 0k$$

$$x \in [\pi; 2\pi] : a_2 \cos(\cos x) = 2\pi - x$$

$$2\pi + x = 10\pi - 5x$$

$$8\pi = 6x ; \quad x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} - 0k$$

$$x \in [2\pi; 3\pi] : a_2 \cos(\cos(x)) = x - 2\pi$$

$$2\pi + x = 5x - 10\pi ;$$

$$12\pi = 4x ; \quad x = 3\pi - 0k$$

$$x \in [-\pi; 0] : a_2 \cos(\cos x) = -x ; \quad 2\pi + x = -5x ; \quad 2\pi = -6x ; \quad x = -\frac{\pi}{3} - 0k$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] : a_2 \cos(\cos x) = x + 2\pi ; \quad 2\pi + x = 5(x + 2\pi) ; \quad x = -2\pi - 0k$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi; -\frac{\pi}{3}; -2\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

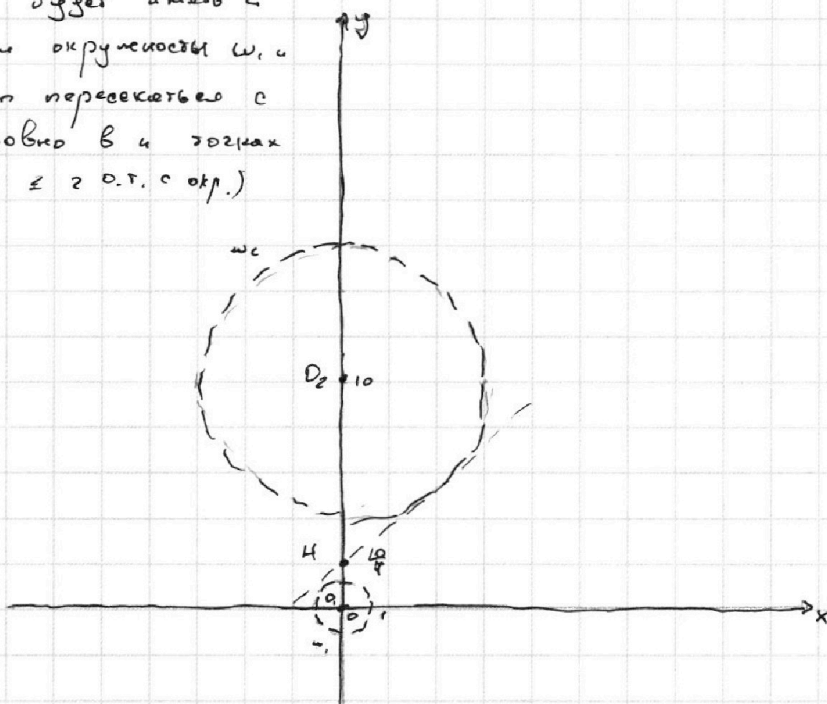


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2ay + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

В системе координат xOy (1) задает прямую, (2) - две окружности (ω_1 и ω_2)
 $\omega_1: x^2 + y^2 = 1$ - центр $O(0;0)$ $R=1$
 $\omega_2: x^2 + (y-10)^2 = 36$ - центр $O_2(0;10)$ $R=6$

система будет иметь 4 реш., если окружности ω_1 и ω_2 будут пересекаться с прямой ровно в 4 точках (у прямой ≤ 2 о.т. с окр.)



(1): $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$. Решим задачу для положительных a , получим также найденные a , но отрицательные (в силу симметрии картинки относительно Oz)
 Практически, $\frac{4b}{3}$ отвечает за паралл. перенос прямой (1) вдоль Oz . Заметим, что при достаточно больших a у прямой только будут 4 точки (общие) с окружностями. Найдем максимальное такое a , при котором будет не больше 3 о.т. с окружностями ω_1 и ω_2 . Проведем H - центр совместной окр-тей и через него общую касательную к крив. ω_1 . При $\frac{a}{3} > tg \angle O_2HO$ мы всегда сможем || перенести окружность ω_2 в центр совместной и будет 4 точки (при $\leq \frac{a}{3}$ будет не более 2-х общих точек ω_1 и ω_2 - видно графически)
 $O_1H: O_2H = 1:6$; $O_1H = x$; $O_2H = 6x$
 $O_1H + O_2H = 10$; $x + 6x = 10$; $x = \frac{10}{7}$
 \rightarrow координ. т. $H = \frac{10}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

y координат. т.к. $\frac{a}{3} - \frac{10}{4}$ прямая, проходящая через $(0; \frac{10}{4})$ -
имеет 2 общие точки с ω , (с ω_2 совпад.)

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1 \\ y &= kx + \frac{10}{4}\end{aligned}$$

$$x^2 + k^2 x^2 + \frac{20k}{4} x + \frac{100}{16} = 1$$

$$x^2(1+k^2) + \frac{20k}{4} x + \frac{51}{16} = 0$$

$$D = \frac{400k^2}{16} - 4 \left(\frac{51}{16} \right) \cdot (1+k^2) = 0$$

$$\frac{400k^2}{16} - \frac{204}{16} - \frac{204}{16} k^2 = 0$$

$$196k^2 = 204; \quad k^2 = \frac{51}{49} \quad k = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Так, при $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\omega_2 \in \omega$, где кот. (2) имеет 4 общие точки
при $\frac{a}{3} \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$ (2) имеет ≤ 2 общие точек $\forall \omega$.

(строго это обосновать можно так: // перенесем прямую
(2) в центр тяжести. При перемещении её вниз
общие точки могут быть только с ω , выше - только с ω_2)

Получ. а: $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}; \quad a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$ (вкл. также случаи на отрезке z касания)

Итак, ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



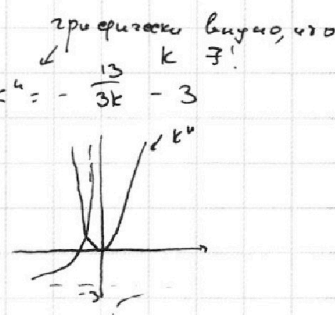
5. $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4 \log_{2x} 5}{3 \log_{2x} 5} - 3$; $OD3: x > 0; x \neq \frac{1}{2}$
 $y > 0; y \neq 1$
 $\log_5^4 y - 4 \log_y 5 = \frac{\log_{y^3} 5}{-\frac{1}{3} \log_y 5} - 3$;

$\log_5^4(2x) = \frac{13}{3} \log_{2x} 5 - 3 = \frac{13}{3 \log_5(2x)} - 3$
 возр. на \mathbb{D} убыв на \mathbb{D}

если решение и существует, то оно единственно.

Пусть $\log_5(2x) = t$; $3t^5 + 9t - 13 = 0$

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3} \log_5 5 - 3 = -\frac{13}{3 \log_5 y} - 3$, $k^4 = -\frac{13}{3k} - 3$
 Пусть $\log_5 y = k$ $3k^5 + 9k + 13 = 0$



$3t^5 + 9t - 13 = 0$
 $+ 3t^5 + 9t + 13 = 0$

$t^5 + k^5 + 3(t+k) = 0$; $(t+k)(t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3) = 0$

$t+k=0$ $t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3 = 0$

$\log_5 2xy = 0$
 $xy = \frac{1}{2}$

Относ. k и t , как доказано выше, могут иметь ровно 1 действительное решение, значит, в силу монотонного возрастания логарифма, существует только одно значение xy .

Проверим, что $xy = \frac{1}{2}$ - поук. $t = -k$; $\begin{matrix} f(t) \\ 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ -3t^5 - 9t + 13 = 0 \end{matrix}$

Если относ. t ур-е решено, то относ. k и $-t$ тоже

$f(t) = 3t^5 + 9t - 13 > 0 \rightarrow$ роль функции перешла на $(t; 2) - t_6$

найдем x^* -корень ~~3~~
 $\log_5 2x = x_0$ $x = \frac{1}{2}$ - не корень, т.к. $x_0 > 1$

$\log_5 2x = -\log_5 y$ (поук. корень x^* юго и найдем y^*)
 $x^* y^* = \frac{1}{2}$ поук. $- \log_5 y^* = \log_5 x^* + 1$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

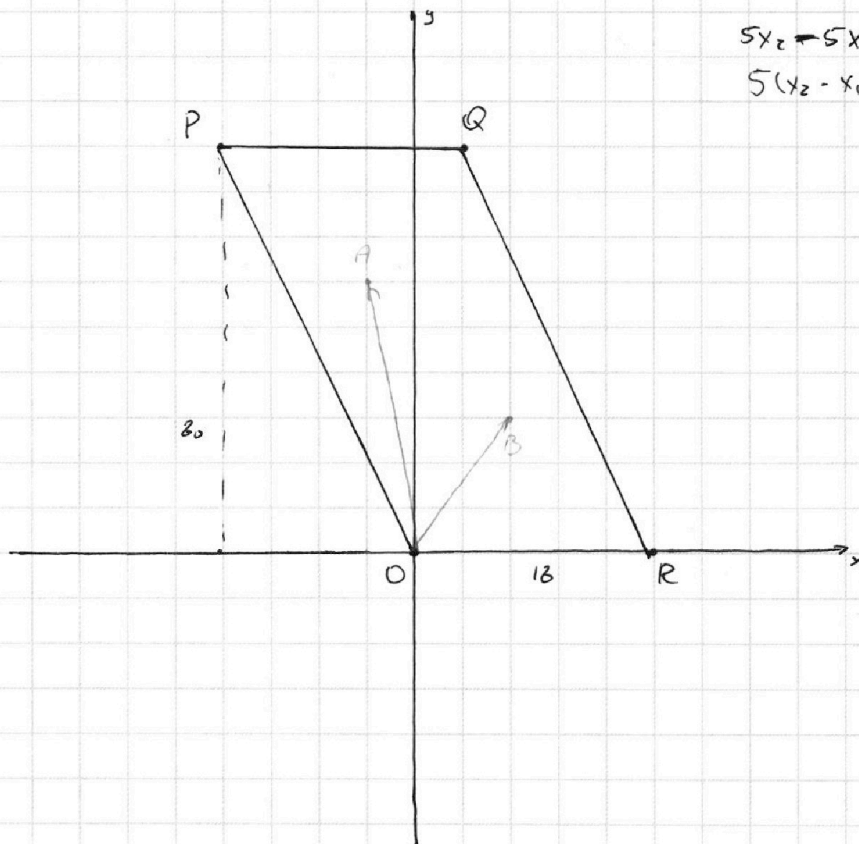
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$
$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$-60 \leq y_2 - y_1 \leq 60$$

$$x_2 - x_1 = \frac{45 - (y_2 - y_1)}{5}$$
$$-18 \leq x_2 - x_1 \leq 18$$

$$-90 \leq 45 - (y_2 - y_1) \leq 90$$
$$-135 \leq y_1 - y_2 \leq 45$$



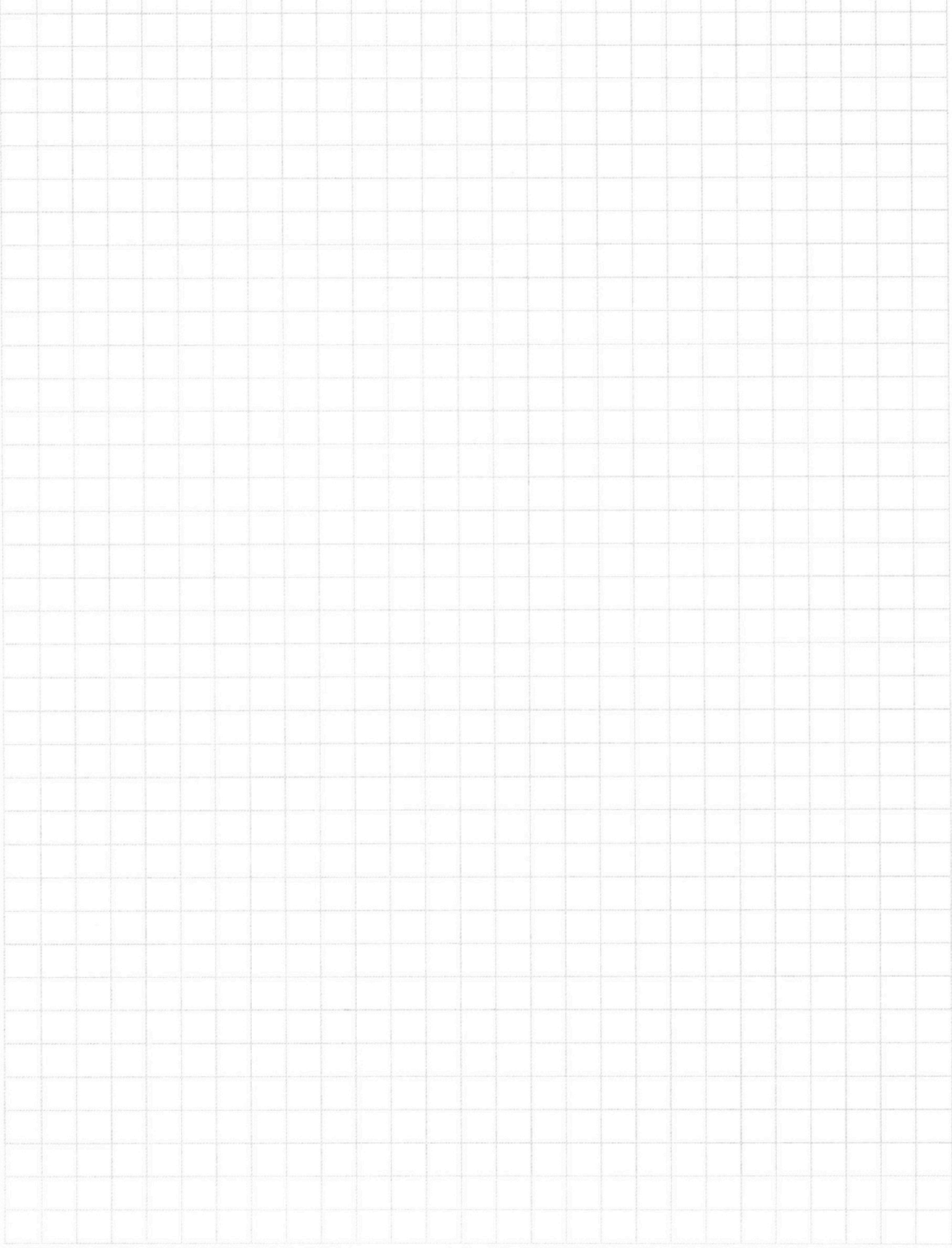
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





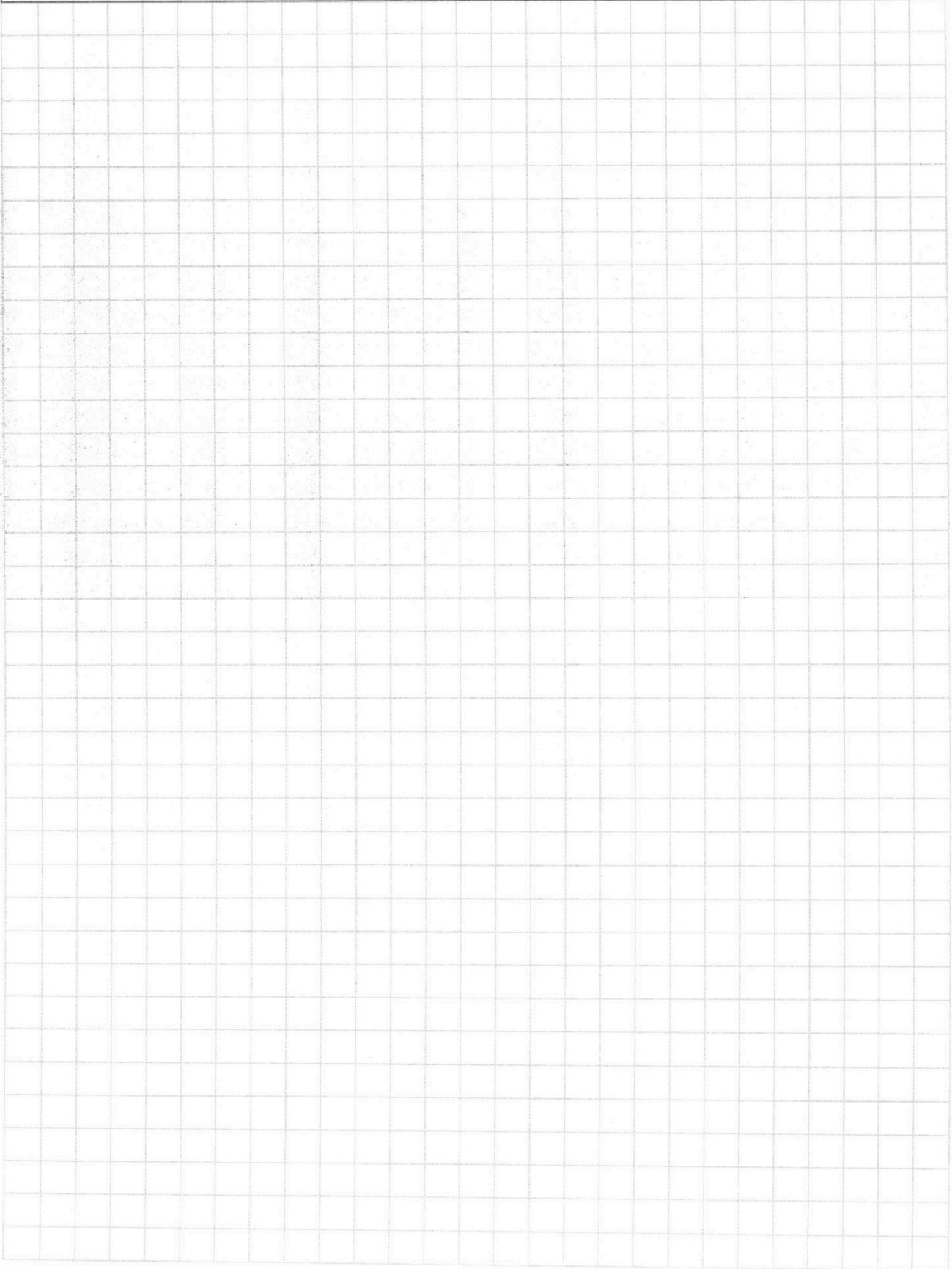
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





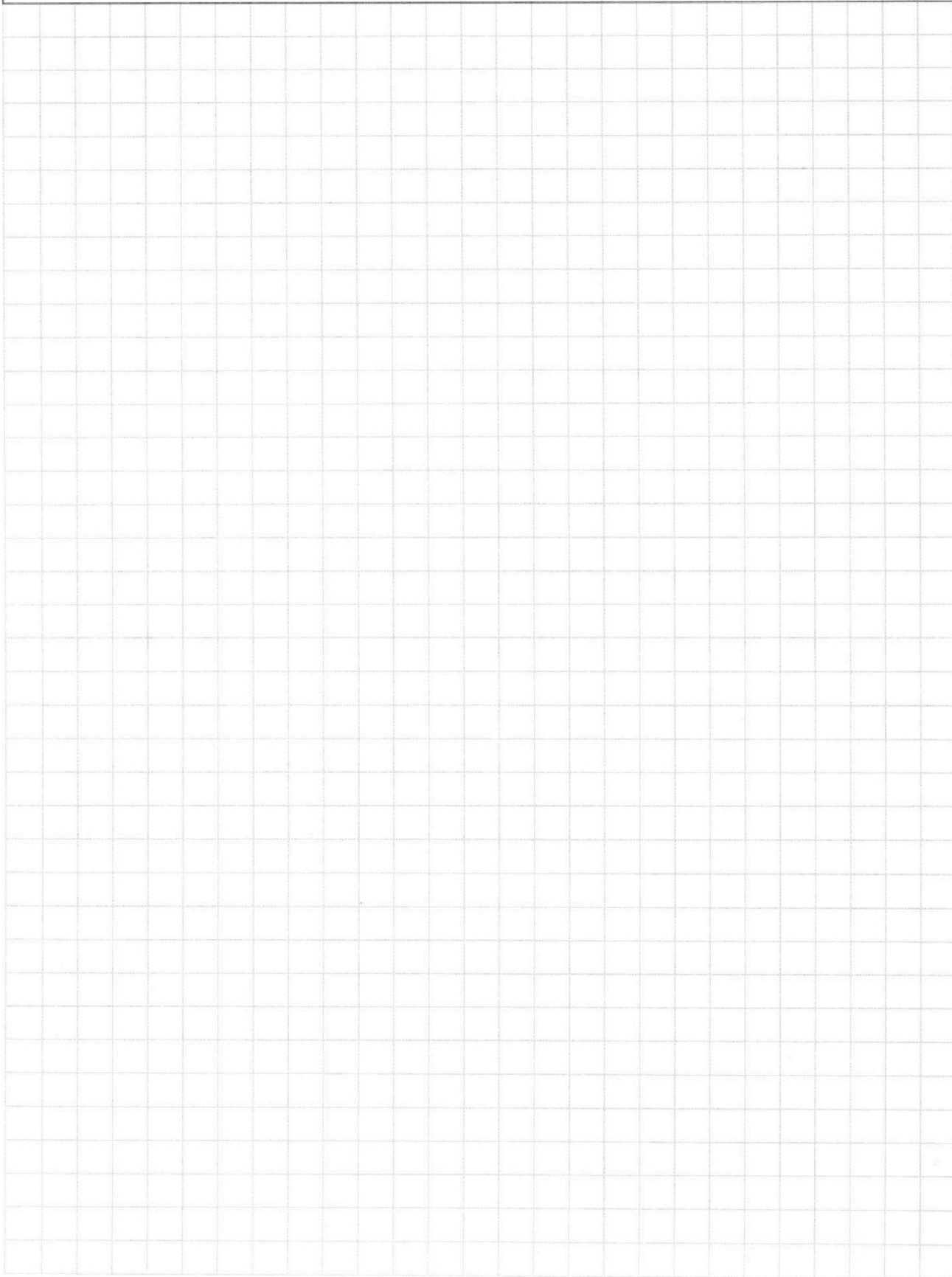
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

