МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, $bc$ делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, $ac$ делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$.

б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. (1) $ab \vdots 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$, (2) $bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, (3) $ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{33}$

наим $abc$

Пусть $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ – степени вхождения 2, 3 и 5 в каноническое разложение $a$;

Аналогично определим $\beta_2, \beta_3, \beta_5$ для $b$ и $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ для $c$

Из (1): $\alpha_2+\beta_2 \geq 8$ ; $\alpha_3+\beta_3 \geq 14$

(2): $\beta_2+\gamma_2 \geq 12$ ; $\beta_3+\gamma_3 \geq 20$

(3): $\alpha_2+\gamma_2 \geq 14$ ; $\gamma_3+\alpha_3 \geq 21$

$\alpha_2+\gamma_2+\beta_2 \geq \frac{34}{2} = 17$ ; $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq \frac{55}{2}$ ($\geq 28$, т.к. $\Sigma \in$ нат.)

напр.: $\beta_2=3$, $\alpha_2=5$, $\gamma_2=9$ ; напр.: $\alpha_3=8$, $\beta_3=6$, $\gamma_3=14$

Из (1): $\alpha_5+\beta_5 \geq 12$

(2): $\beta_5+\gamma_5 \geq 17$ $\Rightarrow$ $\alpha_5+\beta_5+\gamma_5 \geq 33$

(3): $\gamma_5+\alpha_5 \geq 39$

возьмем $\alpha_5 = 19$, $\gamma_5 = 20$, тогда $\beta_5 = 0$, $\alpha_5+\beta_5 \geq 19$ и $\beta_5+\gamma_5 \geq 20$ – Ok

$abc \geq 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}\cdot 5^{\alpha_5+\beta_5+\gamma_5} \geq 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

Пример: $a = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\alpha_5} = 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{19}$

$b = 2^{\beta_2}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\beta_5} = 2^3\cdot 3^6\cdot 5^0$

$c = 2^{\gamma_2}\cdot 3^{\gamma_3}\cdot 5^{\gamma_5} = 2^9\cdot 3^{14}\cdot 5^{20}$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

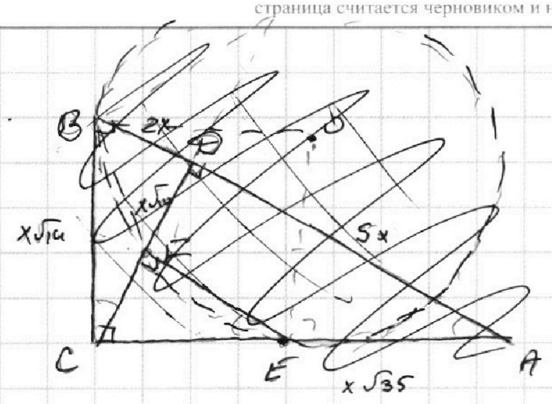
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.




Пусть $AD = 5x$, тогда $BD = 2x$

$CD$ по формуле высоты из прямого угла — $x\sqrt{10}$

т.к. $FE \parallel AD$ $\angle CFE = 90^\circ$

По th. Пифагора $BC = x\sqrt{14}$

$AC = x\sqrt{35}$

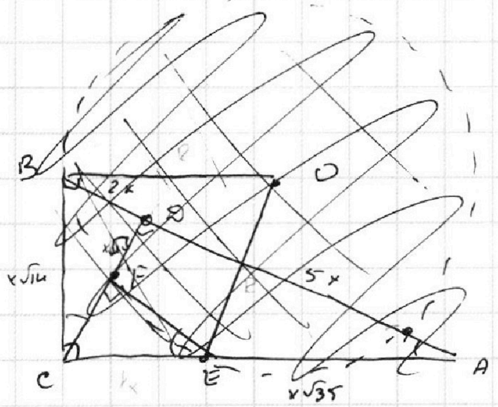
$F$ лежит на окр-ти и $\angle EFD = 90^\circ \rightarrow \angle EFD$ опир. на диаметр

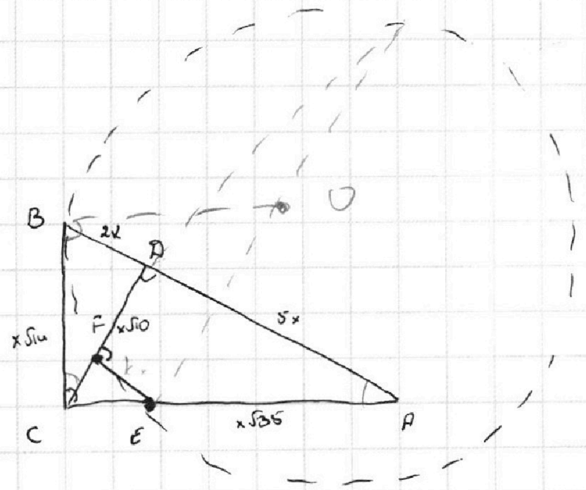
$S_{ABC} = \frac{7}{5} \cdot S_{ACD}$ по лемме об отн. площадей

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \left(\frac{FE}{5x}\right)^2 \rightarrow S_{ACD} = S_{CEF} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$

$$S_{ABC} = \frac{7}{5} \cdot S_{CEF} \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

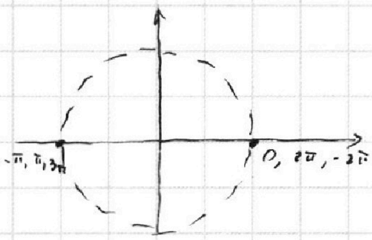
$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$4\pi + 2x = 10 \arccos(\cos x)$

$\underbrace{2\pi + x}_{0 \le \quad \le 5\pi} = 5\underbrace{\arccos(\cos x)}_{0 \le \quad \le \pi}$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$




$x \in [0; \pi]$ : $\arccos(\cos x) = x$

$2\pi + x = 5x$; $2\pi = 4x$; $x = \frac{\pi}{2}$ - ok

$x \in [\pi; 2\pi]$ : $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$

$2\pi + x = 10\pi - 5x$

$8\pi = 6x$; $x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ - ok

$x \in [2\pi; 3\pi]$ : $\arccos(\cos(x)) = x - 2\pi$

$2\pi + x = 5x - 10\pi$;

$12\pi = 4x$; $x = 3\pi$ - ok

$x \in [-\pi; 0]$ : $\arccos(\cos x) = -x$ : $2\pi + x = -5x$; $2\pi = -6x$; $x = -\frac{\pi}{3}$ - ok

$x \in [-2\pi; -\pi]$ : $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$ $2\pi + x = 5(2\pi + x)$; $x = -2\pi$ - ok

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi; -\frac{\pi}{3}; -2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [X] 5 6 7

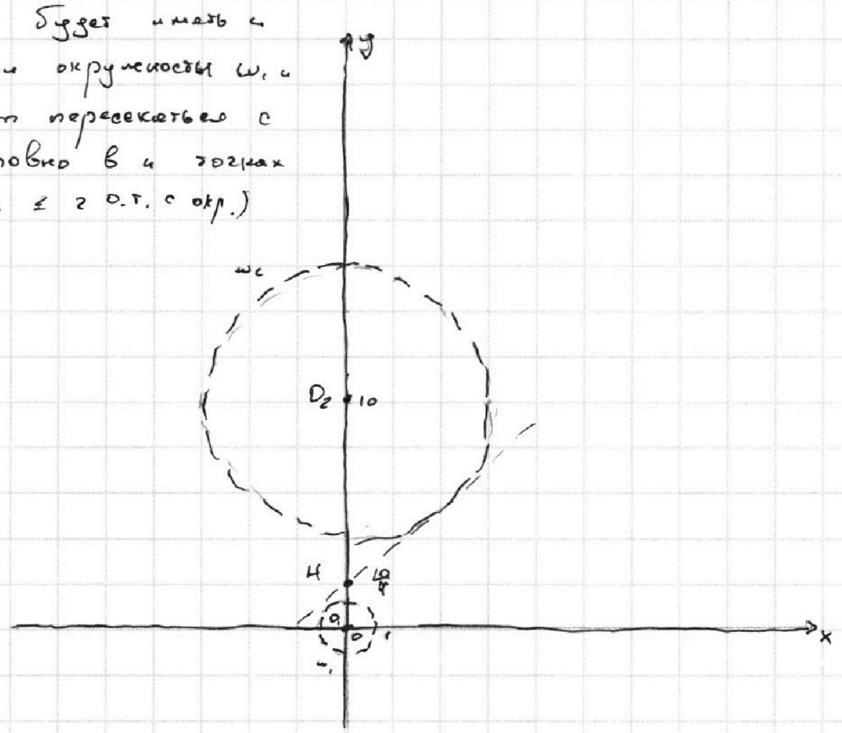
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. $$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (\underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\omega_1})(\underbrace{x^2 + y^2 - 20y + 64}_{\omega_2}) = 0 & (2) \end{cases}$$

В системе координат $xOy$ (1) задает прямую, (2) – две окружности ($\omega_1$ и $\omega_2$) $\omega_1$: $x^2 + y^2 = 1$ – центр $(0;0)$ $R=1$
$\omega_2$: $x^2 + (y-10)^2 = 36$ – центр $(0;10)$ $R=6$

система будет иметь 4 реш., если окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ будут пересекаться с прямой ровно в 4 точках (у прямой ≤ 2 о.т. с окр.)




(1): $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$. Решим задачу для положительных $a$, подойдут также найденные $a$, но отрицательные (в силу симметрии картинки относ $Oy$

Фактически, $\frac{4b}{3}$ отвечает за паралл. перенос прямой (1) вдоль $Oy$. Заметим, что при достаточно больших $a$ у прямой точно будут 4 точки (общие) с окружностями. Найдем максимальное такое $a$, при котором будет не больше 3 о.т. с окружностями $\forall b$. Проведем H – центр гомотетии окр-тей и через него общую касательную к ним $l_0$. При $\frac{a}{3} > tg\, l_0$ мы всегда сможем ‖ перенести окружность в центр гомотетии и будет 4 точки (при $\le \frac{a}{3}$ будет не более 2-х общих точек $\forall b$ – видно графически) $O_1H : O_2H = 1:6$; $O_1H = x$, $O_2H = 6x$
$O_1H + O_2H = 10$; $7x = 10$; $x = \frac{10}{7}$
$\rightarrow$ y коорд т. $H$ – $\frac{10}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(продолжение)

$y$ коорд т. $H$ – $\frac{10}{7}$ прямая, проход. через неё $y = kx + \frac{10}{7}$ – имеет 1 общую точку с $\omega_1$ (с $\omega_2$ соотв.)

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=kx+\frac{10}{7} \end{cases}$$

$$x^2+k^2x^2+\frac{20k}{7}x+\frac{100}{49}=1$$

$$x^2(1+k^2)+\frac{20k}{7}x+\frac{51}{49}=0$$

$$D=\frac{400k^2}{49}-4\left(\frac{51}{49}\right)\cdot(1+k^2)=0$$

$$\frac{400k^2}{49}-\frac{204}{49}k^2-\frac{204}{49}=0,$$

$$196k^2=204;\quad k^2=\frac{51}{49}\quad k=\pm\frac{\sqrt{51}}{7}$$

Так, при $\frac{a}{3}>\frac{\sqrt{51}}{7}$ $\exists!\, b$, для кот. (1) имеет 4 общих точки; при $\frac{a}{3}\le\frac{\sqrt{51}}{7}$ (1) имеет $\le 2$ общих точек $\forall b$.
(строже это обосновать можно так: перенесём прямую (1) в центр гомотетии. При передвижении её вниз общие точки могут быть только с $\omega_1$, выше – только с $\omega_2$)

Получ. $a$: $\frac{a}{3}>\frac{\sqrt{51}}{7}$; $a>\frac{3\sqrt{51}}{7}$ (вкл. также симм. на отр. значения)

Итак, ответ: $a\in\left(-\infty;-\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{51}}{7};+\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \overbrace{\log_{8x^3}625}^{\frac{4}{3}\log_{2x}5} - 3$;   ОДЗ: $x>0$; $x\neq\frac{1}{2}$; $y>0$; $y\neq 1$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \underbrace{\log_{y^3}\frac{1}{5}}_{-\frac{1}{3}\log_y 5} - 3$;

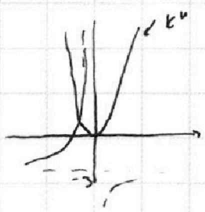
$\underbrace{\log_5^4(2x)}_{\text{возр. на } D} = \frac{13}{3}\log_{2x}5 - 3 = \underbrace{\frac{13}{3\log_5(2x)} - 3}_{\text{убыв на } D}$

если решение и существует, то оно единственно.

Пусть $\log_5(2x) = t$;   $3t^5 + 9t - 13 = 0$   графически видно, что $k$ ∃!

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3}\log_y 5 - 3 = -\frac{13}{3\log_5 y} - 3$,   $k^4 = -\frac{13}{3k} - 3$

Пусть $\log_5 y = k$   $3k^5 + 9k + 13 = 0$




$$+\begin{array}{l} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ 3k^5 + 9k + 13 = 0 \end{array}$$

$t^5 + k^5 + 3(t+k) = 0$;   $(t+k)(t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3) = 0$

$t + k = 0$   $t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3 = 0$

$\log_5 2xy = 0$

$xy = \frac{1}{2}$

Относ. $k$ и $t$, как доказано выше, могут иметь ровно 1 действительное решение, значит, в силу монотонного возрастания логарифма, существует только одно знач. $xy$.

Проверим, что $xy = \frac{1}{2}$ - подх.   $t = -k$;   $\overbrace{3t^5 + 9t - 13}^{f(t)} = 0$

$-3t^5 - 9t + 13 = 0$

Если относ $t$ ур-е решено, то относ. $k = -t$ тоже

$f(1) = -1$   $f(2) > 0$ → ноль функции лежит на $(1;2)$ — $t_0$

найдем $x^*$ - корень

$\log_5 2x = x_0$   $x = \frac{1}{2}$ - не корень, т.к. $x_0 > 1$

$\log_5 2x = -\log_5 y$ (подст. корень $x^*$ сюда и найдем $y^*$)

подх. — $x^* \neq \frac{1}{2}$, $y^* \neq 1$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

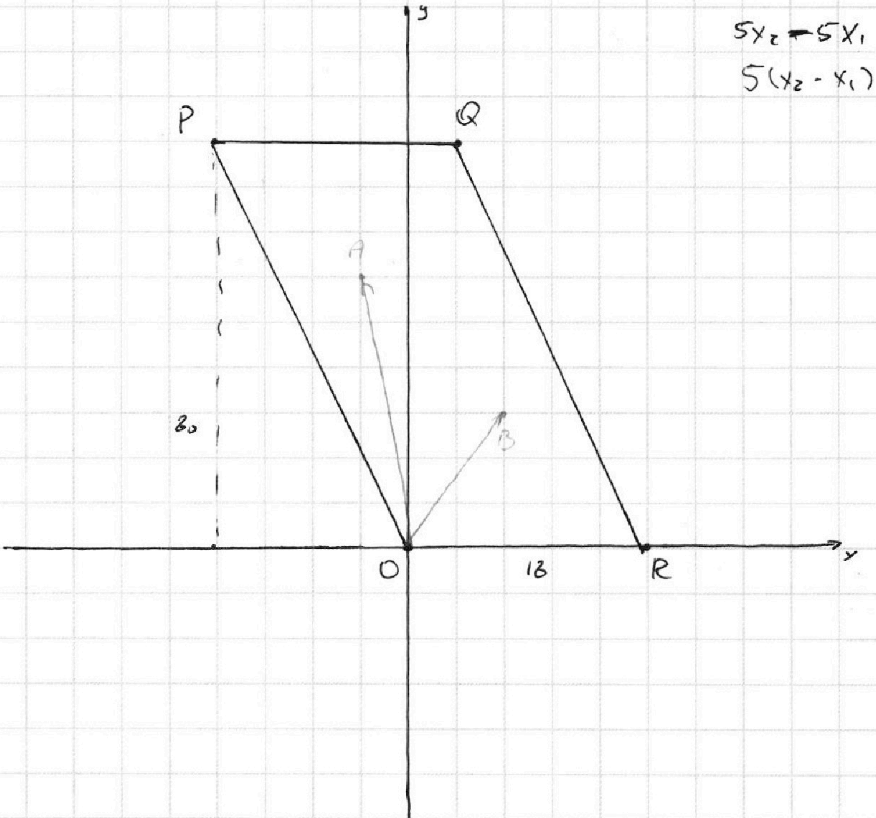
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6.

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$




$-80 \le y_2 - y_1 \le 60$, $\quad y_2 - y_1 \,\vdots\, 5$

$-16 \le x_2 - x_1 \le 18$, $\quad x_2 - x_1 = \dfrac{45 - (y_2 - y_1)}{5}$

$-90 \le 45 - (y_2 - y_1) \le 90$

$-135 \le y_1 - y_2 \le 45$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!