



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot r$, $r \in \mathbb{N}$.
 $bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m$, $m \in \mathbb{N}$.
 $ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20} \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$.

Заметим, что $abc : ac$, т.е. $abc : 5^{20}$.

Перемножим ab , bc и ac :

$$(abc)^2 = 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+20} \cdot r \cdot m \cdot k.$$

$$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{43} \cdot r \cdot m \cdot k.$$

Заметим, что если $abc \leq$ ~~меньше 20~~ ^{степень больше 36},
то степень больше 36
 $(abc)^2 \leq 40$, но она точно не менее 41

т.е. степень большего тройки в abc
не менее 21.

Аналогично, степень большего 2 в abc
не меньше 21

тогда наим. abc , которое может быть
это $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{20}$

Это возможно при $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$
 $b = 2^2 \cdot 3^3$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$$
$$ab = (2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{14}) \cdot (2^2 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10})$$
$$bc = (2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}) \cdot (2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{19})$$
$$ac = (2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}) \cdot (2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20})$$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{20}$.

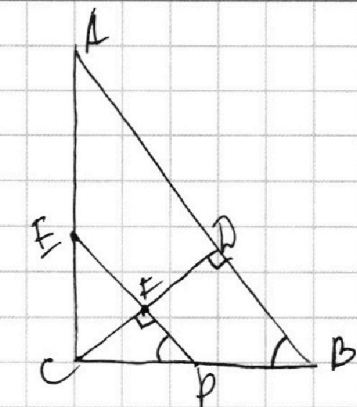
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $\triangle ABC$ - треугольн., AD и EF -
проекции высот на гипотенузу,
тогда $AD = AC^2 : AB$
 $AD = CB^2 : AB$

$AD : AB = 3 : 1$, т.е. $AC^2 : CB^2 = 3 : 1$,
т.е. $AC = CB = \sqrt{3}$

т.к. $\angle CBA = AC : CB = \sqrt{3}$, т.е.
 $\angle CBA = 60^\circ$, тогда

т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle ABC = \angle EPC = 60^\circ$, где $P = EF \cap CB$.

2) Пусть $CP = x$, $PB = y$

$CD \perp AB$, $AB \parallel EF$ } $\Rightarrow CF \perp EP$, $\triangle CFP$: $\angle F = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$
т.е. $FP = \frac{1}{2} CP$

$\triangle ECP$: $\angle C = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$, т.е. $CP = \frac{1}{2} EP$, $EP = 2x$

тогда т.к. FE - касательная к окружности на AB , то применим
теорему Птолемея $PB^2 = PF \cdot PE$
 $x^2 = \frac{y}{2} \cdot 2x$, $y^2 = x^2$, $y = x$, т.е. P - с.р. CB .

3) Тогда EP - линия, параллельная AB , проходящая через с.р. CB ,
т.е. содержит среднюю линию $\triangle CBA$,
 EP - ср. линия $\triangle CBA$, EF - ср. линия $\triangle CBA$,
тогда $S_{EFC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$

4) $AD : AB = 3 : 1$, т.е. $S_{\triangle CAD} : S_{\triangle ABD} = 3 : 1$,
 $S_{\triangle CAD} = \frac{3}{4} S_{ABC}$

тогда $S_{FCF} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} S_{ABC}$

$S_{ABC} : S_{FCF} = 16 : 3$

Ответ: 16:3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

\arcsin имеет это значение от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ включ.

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{где } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2}$$

Можно упростить равносильно системе:

$$\begin{cases} 5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = x + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\pi \leq -x + 2\pi k \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\pi \leq -x + 2\pi k \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -6\pi \leq -(2\pi + 10\pi k) + 12\pi k \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -4\pi \leq 2\pi k \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -2 \leq k \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi(1+5k)}{6} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -2 \leq k \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ x=2\pi \\ k=0 \\ x=\frac{\pi}{3} \\ k=-1 \\ x=-\frac{4\pi}{3} \\ k=-2 \\ x=-3\pi \end{cases}$$

Ответ: $\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

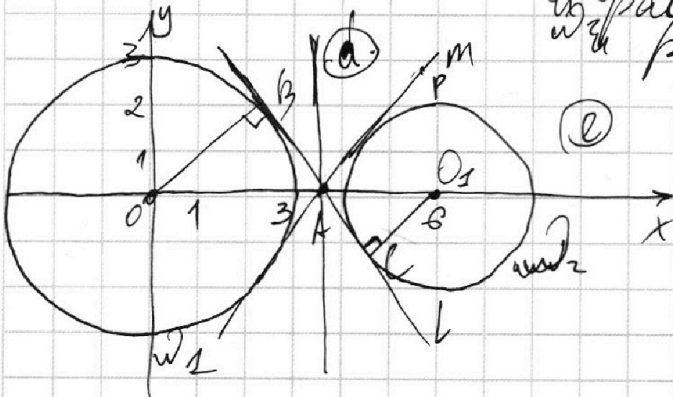
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

(1) $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-9)((x-6)^2+32-36+y^2)=0,$
 $\Leftrightarrow (x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \Rightarrow$ ~~решимые~~

~~эти уравнения не образуют единичные множители, представляющие~~

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 & \text{— решение уравнения (1)} \\ (x-6)^2+y^2=4 & \text{будут окр. с центром } (0,0) \\ & \text{в } \pi \text{ рад. и с центром } (6,0) \\ & \text{в } \pi \text{ рад. } 2. \end{cases}$



$ax+2y-3b=0$ — уравнение прямой $y = \frac{ax-3b}{2}$ следовательно, чтобы было 4 решения. Прямая имеет с окр. макс. 2 общие точки, т.е. необходимо, чтобы прямая пересекала каждую окр. в двух точках.

Заметим, что параметр a задает наклон этой прямой, параметр b задает пересечение на ось y ($0; \frac{3b}{2}$).

~~Мы не сможем рассмотреть такие прямые, которые никак не касаются.~~

3) Проверим взаимно касательные окружности. Каждая из окр. симметрична относительно Ox , т.е. их кас. точки будут симметричны относительно Ox и т. перес. кас., точка A , будет находиться на Ox .

Рассмотрим одну из кас., пусть она кас. ω_1 в т. B_1 , ω_2 в т. C_1 , $O_2(6,0)$ — центр ω_2 . И т. кас. окр., прове. в т. кас., перпен. кас., то (-1)

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$OB \perp AB, O_1C \perp AC$. $\angle BAO = \angle O_1AC$ как вершин.
 тогда $\triangle OBA \sim \triangle O_1CA$, т.е. $\frac{OA}{AO_1} = \frac{OB}{OC} = \frac{3}{2}$ — радиусы.

$OA + AO_1 = OO_1 = 6$.

тогда $\begin{cases} OA = 1,5 AO_1 \\ OA + AO_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OA = \frac{18}{5} \\ AO_1 = \frac{12}{5} \end{cases}$.

$\triangle ACO_1$: по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AO_1^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 4} = \sqrt{\frac{44}{25}} = \frac{2\sqrt{11}}{5}$.

тогда $\operatorname{tg} \angle O_1AC = \frac{OC}{AC} = 2 \cdot \frac{5}{2\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$.

$\angle O_1AC$ — угол между кас. и OX .

$\angle(L; OX) = \angle(m; OX)$, т.к. углы наклона и есть угол наклона прямой.

Можно задать кас. эту прямую с наклоном $\frac{5}{\sqrt{11}}$ к OX проход. чрез $(\frac{18}{5}; 0)$.

$m: y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}$, $L: y = \frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}}$.

б) Рассмотрим все прямые, проход. через т. А. если это кас, то они имеют с сфр. по 1 точку, всего 2 решения, т.к. не подходят.

в) Если это прямые, которые проходят через область \odot (см. на рисунке), то они не имеют точек с сфр. Все прямые сфр. находятся по разные стороны от касательной. Прямые, сфр. прямых M будут по одну сторону от прямой M , проход. чрез А, т.е. по одну сторону с одной из сфр. и по другую с другой, т.е. могут быть точки пересечения с сфрой, т.е. макс 2, а не 4.

\odot область между кас., вносимой не имеет сфр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) Прямые кас. не имеют так же
расположения по одну сторону
от кас. ^{касательной} которой она кас. Дир. касаются
по разные стороны от кас. ^{т.е. прямые}
прямые, кас. будут иметь макс. 2 общие
точки с сфер., а не 4.

б) Если это прямая Π , проходящая через область
(ϵ), то они имеют две пересечения
каждую сфер. в двух точках, т.е. есть
4 решения. (Область (ϵ) это область между
кас., сфер. ω_2) ϵ — ϵ

Значит нам подходят прямые, проходящие
уголками коэф., что если они проходят через
м. A , то они не имеют точек пересечения в
области (ϵ).

т.е. это прямые с угл. коэф. от 0 до
 $\frac{5}{\sqrt{11}}$ (касательной m) и от $-\frac{5}{\sqrt{11}}$ (кас. l)
до 0. (0 вертикально).

в) Коэф. прямой $y = \frac{-ax + 3b}{2}$ это $-\frac{a}{2}$
т.е. $-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$, $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8.$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$$

Пусть $\log_3 x = a, a \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} a^4 + 6 \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$2) \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8.$$

$$\log_3 5y = \frac{1}{\log_{5y} 3}$$

Пусть $\log_3 5y = b, b \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} b^4 + 2 \frac{1}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^5 + 16b - 7 = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

3) Рассмотрим функции $f(t) = 2t^5 + 16t + 7$
и $g(t) = 2t^5 + 16t - 7$.

$2t^5 \nearrow$ на \mathbb{R} , $16t + 7 \nearrow$ на \mathbb{R} , т.е.

$f(t) \nearrow$ на \mathbb{R} как сумма возр. функций.

$f(0) = 7 > 0$, $f(-1) = -2 - 16 + 7 = -11 < 0$,
 $f(t)$ непрерывна на \mathbb{R} как сумма непрерывных
функций, тогда по т. Больцано-Вейера
на \mathbb{R} существует такое c , что $f(c) = 0$.
А так как $f(t)$ строго монотонна, то
такое c — единственное, $c = a$, т.к.
 $2a^2 + 16a + 7 = 0$ из 1).

Аналогично $g(t)$ имеет ед. корень и
этот корень b .

↓ 1-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$f(a) = 2(2a)^5 + 16(2a) + 7 = 2 \cdot 2^5 \cdot 16a + 7 =$~~
 ~~$= 2^6 \cdot 16a + 7 =$~~

~~$z \in \mathbb{R}: f(z) = 2(-z)^5 + 16(-z) + 7 =$~~
 ~~$= -2z^5 - 16z + 7 = -(2z^5 + 16z - 7) = -g(z).$~~

и.e. $f(-z) = -g(z).$

$g(b) = 0$, и.e. $0 = g(b) = -g(b) = f(-b).$

$f(-b) = 0$, но a — ед. корень ~~этого~~ $f(t) = 0$
и.e. $a = -b.$

4) и.e. $\log_3 x = -\log_3 5y$
 $\log_3 x = \log_3 (5y)^{-1}$

$$x = \frac{1}{5y}$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}.$

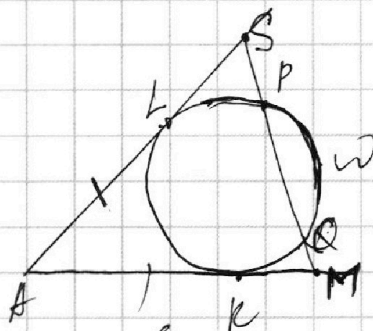
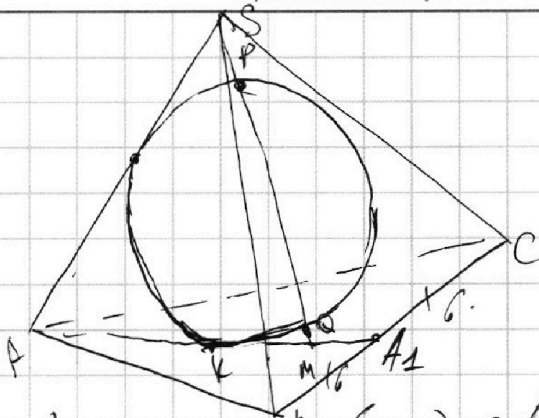
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение!

а) 1) $(AMS) \cap \Omega = SL$ по оар.
 $L, K, Q, P \in (AMS)$ и $\in \Omega$, т.е. L, P, Q, K
 лежат на одной оар. ω
 AL и AK - кас. к Ω , т.е. кас. к ω
 $AL = AK$ - как отрезки кас., провег. из L .

Запишем элементы мощи S и M :

$$SL^2 = SP \cdot SQ, \quad MK^2 = MQ \cdot MP, \quad (SL \text{ и } MK \text{ - кас.})$$

$$SP = QM \text{ - по усл. } SQ = SP + PQ, \quad MP = SP + QM \Rightarrow QS = MP.$$

$$\text{т.е. } SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = KM, \quad SL = MK.$$

$$\text{т.е. } AS = AM = 12$$

2) M - м перес. ~~по~~ ^{т.е.} $AM = \frac{2}{3} AA_1$, т.е.
 $AA_1 = 18$.

$S_{BAA_1} = S_{CAA_1}$, т.к. AA_1 - высота, $S_{ABC} = 2S_{BAA_1}$.

$$S_{AAB} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin \angle(AA_1, AB) / 2.$$

Пусть $\angle(AA_1, AB) = \alpha$, тогда

$$S_{ABC} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha.$$

$$18 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sin \alpha = 90^\circ, \quad \sin \alpha = \frac{5}{6}.$$

Пусть, учитывая объемность $AB \perp AC$, тогда.

$$\text{в } \triangle AA_1B \quad \angle AA_1B \text{ - острый, } \cos \angle AA_1B =$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 \angle AA_1B} = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

$\triangle AA_1B$ по т. косинусов: $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2 \cos \angle AA_1B \cdot AA_1 \cdot A_1B$

$$AB^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot 18 \cdot 6 = 2^2(9^2 + 3^2 - \sqrt{11} \cdot 9) =$$

$$= 6^2(3^2 + 1^2 - \sqrt{11}) \quad AB = 6 \sqrt{10 - \sqrt{11}}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ABC$ по т. косинусов $\cos \angle A_1 C = \frac{2 - \sqrt{11}}{6}$

$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2 \cos \angle A_1 \cdot AA_1 \cdot A_1C$

$AC^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot \frac{2 - \sqrt{11}}{6} \cdot 18 \cdot 6$

$AC^2 = 6^2(9 + 1 + \sqrt{11})$ $AC = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$

3) $\triangle ABC$ по т. косинусов $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos \angle A \cdot AC \cdot AB$
 $12^2 = (6\sqrt{10 - \sqrt{11}})^2 + (6\sqrt{10 + \sqrt{11}})^2 - 2 \cos \angle A \cdot 6\sqrt{10 - \sqrt{11}} \cdot 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$
 $4 = 10 - \sqrt{11} + 10 + \sqrt{11} - 2 \cos \angle A \cdot \sqrt{100 - 11}$
 $\cos \angle A = \frac{10 + 10 - 4}{2\sqrt{89}} = \frac{16}{2\sqrt{89}} = \frac{8}{\sqrt{89}}$

$\triangle ACC_1$ по т. косинусов:

$CC_1^2 = AC^2 + AC_1^2 - 2 \cos \angle A \cdot AC \cdot CA$

$CC_1^2 = 6^2(10 + \sqrt{11}) + 3^2(10 - \sqrt{11}) - 2 \cos \angle A \cdot 6 \cdot 3\sqrt{10 + \sqrt{11}}$

$CC_1^2 = 8^2(10 + \sqrt{11}) + 3^2(10 - \sqrt{11}) - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{89}} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{89}$

$CC_1^2 = 3^2(40 + 4\sqrt{11} + 10 - \sqrt{11}) - 4 \cdot 8$

$CC_1^2 = 3^2(3\sqrt{11} + 50 - 32)$ $CC_1 = 3\sqrt{3\sqrt{11} + 18}$

$\triangle BB_1$ по т. косинусов:

$BB_1^2 = BA^2 + AB_1^2 - 2 \cos \angle A \cdot BA \cdot AB_1$

$BB_1^2 = 6^2(10 - \sqrt{11}) + 3^2(10 + \sqrt{11}) - 2 \cos \angle A \cdot 6 \cdot 3\sqrt{10 - \sqrt{11}}$

$BB_1^2 = 3^2(40 - 4\sqrt{11} + 10 + \sqrt{11}) - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{89}} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{89}$

$BB_1^2 = 3^2(50 - 3\sqrt{11} - 32)$ $BB_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}$

Поэтому $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3\sqrt{3\sqrt{11} + 18} \cdot 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} =$

$= 18 \cdot 9 \sqrt{18^2 - (3\sqrt{11})^2} = 18 \cdot 9 \cdot 3 \sqrt{6^2 - 11} = 18 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5 =$

$= 2 \cdot 81 \cdot 3 \cdot 5 = 2430$

Ответ: 2430.

б) SN кас. SL , т.е. $SL = SN = 4$
 $AL = AR = 8$

$BN = BK$, $CN = CK$. $\triangle KBC = \triangle NBC$.

По т. косинусов можно найти BK, CK .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



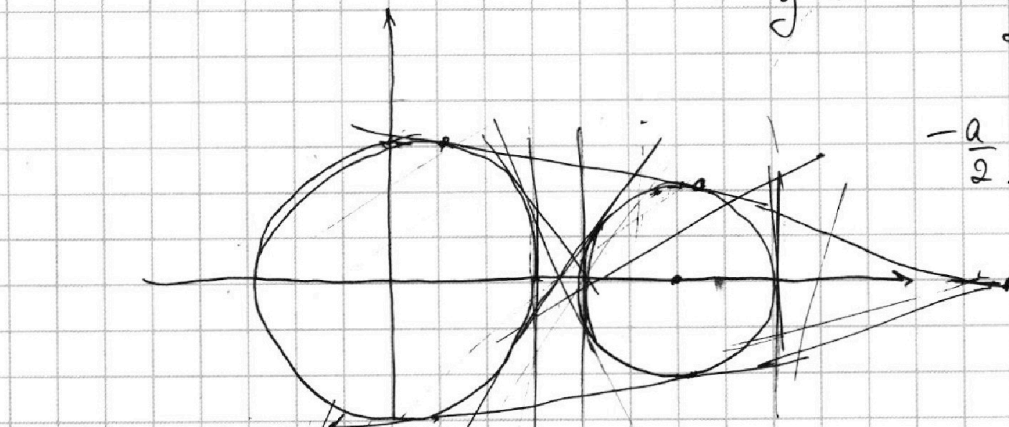
н 4.

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 32 + y^2 = 0.$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 = 4^2 \\ x^2 + y^2 - 9 = 3^2 \end{cases}$$

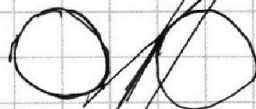
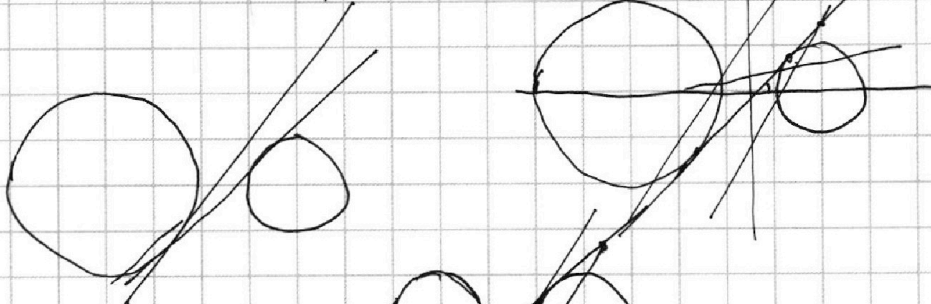
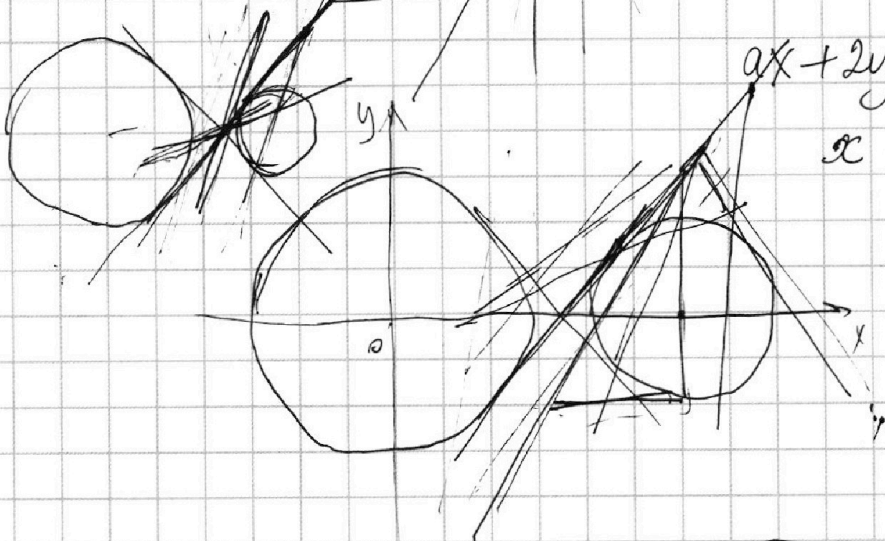
$$y = \frac{-ax + 3b}{2}$$

$$-\frac{a}{2}$$



$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$x = \frac{3b - 2y}{a}$$



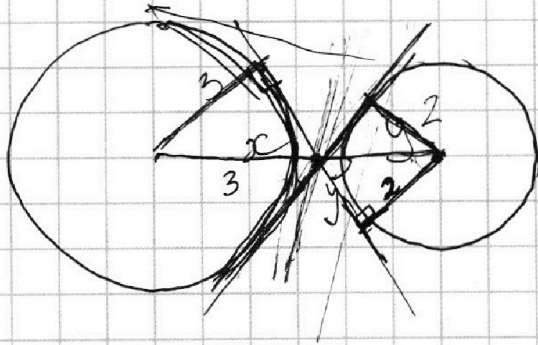
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



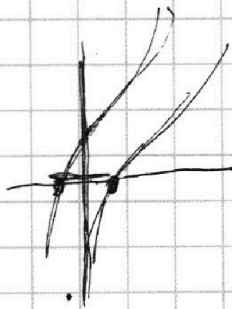
~~3+20~~

$$x + y = 6 \quad | \cdot 2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}; \quad 2x = 3y.$$

$$3y + 2y = 2xy = \frac{12}{5}$$

$$x = \frac{12}{5}$$



$$\frac{12}{5} \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - \frac{2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{144}{25} - 4} = \frac{\sqrt{44}}{25} = \frac{2\sqrt{11}}{25}$$

$$tg = \frac{2}{\frac{2\sqrt{11}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8.$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8.$$

$$a^4 + 6 \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \frac{1}{a} - 8$$

$$a^5 + 6 = 2,5 - 8a.$$

$$a^5 + 8a + 3,5 = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0.$$

$$\log_3^4 5y + 2 \log_y 3 = \frac{11}{2} \log_{5y^2} 3 - 8.$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} \frac{1}{b} - 8$$

$$b^5 + 8b - 3,5 = 0$$

$$b^5 + 8b - 3 = 0 \quad 2b^5 + 16b - 7 = 0.$$

$$a = -b$$

2
25

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(a^5 + b^5) + 16(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - ab^3 + b^2a^2 - b^4 + 4) = 0$$

$$a = -b$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y^{-1}$$

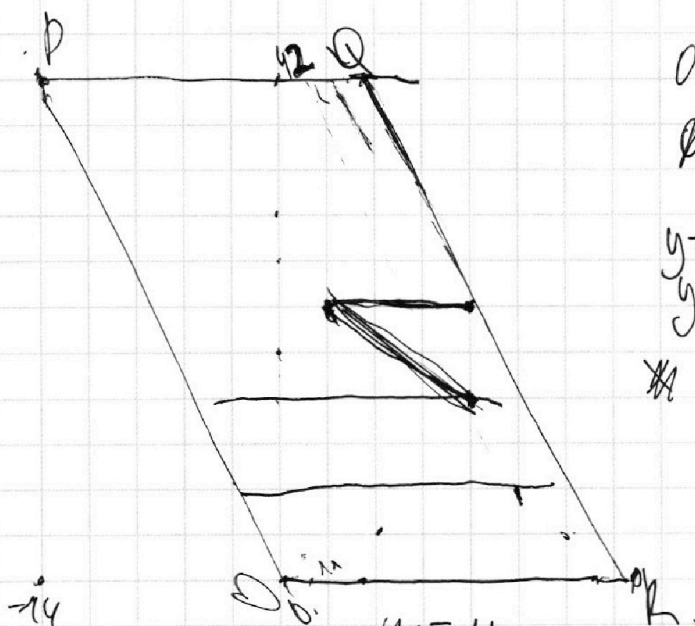
$$y_1 = y_3$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y}$$

№ 5

$3(x_1, y_1)$

$$f(z) = -2z^5 - 16z + 7 = -(2z^5 + 16z - 7) = -g(z)$$



$$0 \leq y \leq 4z$$

$$-14 \leq 20$$

$$y = 4z$$

$$y = 20$$

$$4z = -14x + 6$$

$$y = -3x$$

$$y = -3x + 60$$

$$3z + 3x_1 + y_1 = 3x_2 + y$$

$$x \left\{ \begin{array}{l} y \leq 4z \\ y \geq 0 \\ y \geq -3x \\ y \leq -3x + 60 \end{array} \right.$$

$y_1 = y_3$



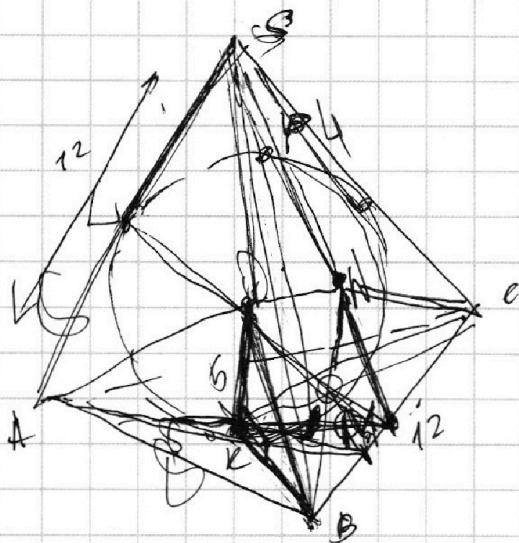
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

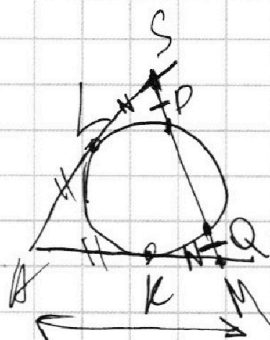
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

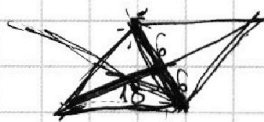


$$AC = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$$

$$AB = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$



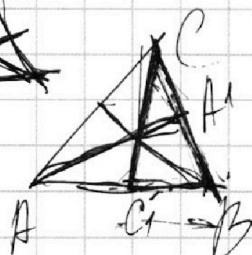
$$AA_1 = 18$$



$$18 \cdot \sin \alpha \cdot 6 = 90$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{6}$$

$$2 \frac{\sqrt{11}}{21}$$



$$1 - \frac{25}{36}$$

$$\left(3 + \frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2$$

$$9 + \sqrt{11} + \frac{11}{36} + \frac{25}{36}$$

$$\frac{45 \pm (x + 6)}{2} \rightarrow$$

$$6(10 - \sqrt{11})$$

$$\frac{5}{6}$$

$$AB = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

9

$$x + 6 + \dots$$

$$45 = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{11}} + 6}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10 - \sqrt{11}} + x + 6}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot r$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m$$

$$ac = 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot q$$

$$9+14+19 = 14+28 = 42$$

$$(abc)^2 = 2^{32} \cdot 3^{44} \cdot 5^{53} \cdot r \cdot m \cdot q$$

$$abc = 2^{24} \cdot 3^{22} \cdot 5^{27}$$

~~$$abc = 2^{24} \cdot 3^{22} \cdot 5^{27}$$~~

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13}$$

$$ca =$$

$$abc = 2^{24} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$$

$$2^3 \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

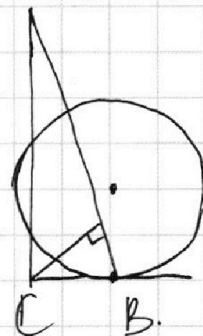
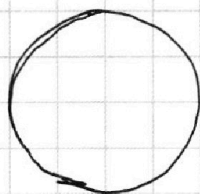
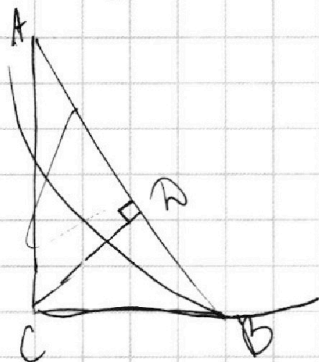
$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$a = 2^7 \cdot 3^{17} \cdot 5^{27}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

$$b =$$

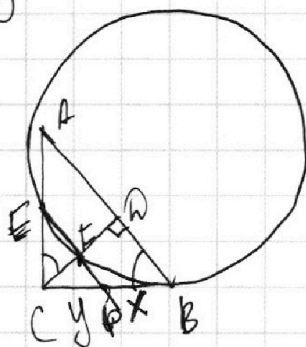
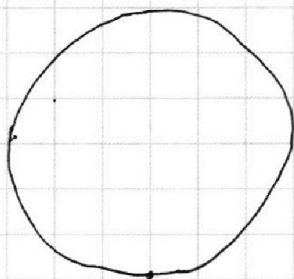
$\sqrt{2}$



$$FP = \frac{y}{2}$$

$$\angle B = 60^\circ$$

$$EP = 2y$$



$$AD = \frac{AC^2}{AB}$$

$$DB = \frac{CB^2}{AB}$$

$$\left(\frac{AC}{CB}\right)^2 = 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} \\ 5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq -x + 2\pi k \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq -x + 2\pi k \leq 0 \\ \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ x = \frac{2\pi(1+5k)}{6} \end{array}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{2\pi(1+5k)}{6} + 2\pi k \leq 0$$

$$-3\pi \leq -2\pi - 10\pi k + 12\pi k \leq 0$$

$$-\pi \leq 2\pi k \leq \pi$$

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

0; 1

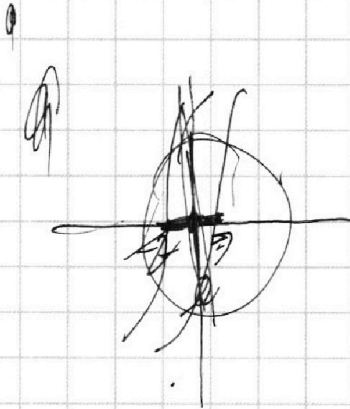
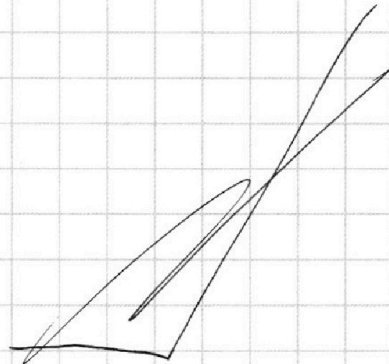
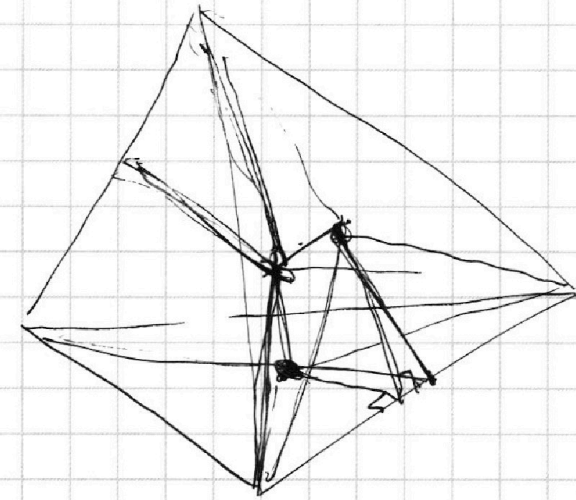
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + 2y + 6.$$

$$\log \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}.$$

$$\frac{27 - 9}{6}.$$

$$\frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

