



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, \text{ км.}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, \text{ км.}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}, \text{ км.}$$

Значит, что $abc : ab$, т.е. $abc : 5^{30}$.

Перенесем в ab, bc и ac :

$$(abc)^2 = 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30} \cdot \text{км.к.}$$

$$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot \text{км.к.}$$

Значит, что если ~~степень выражение 38~~
~~число выражение 20~~
то степень ~~выражение 38~~
~~число выражение 20~~ ≤ 40 , то она меньше либо равна 41

т.е. степень каждого тройки в abc
не меньше 21.

Аналогично, степень каждого из a, b, c
не меньше 21

Найдем ~~знач.~~ abc , которое можно представить
в виде $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$.

Это возможно при $a = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$$

$$ab = (2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{14}) \cdot (2^2 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10})$$

$$bc = (2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}) \cdot (2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13})$$

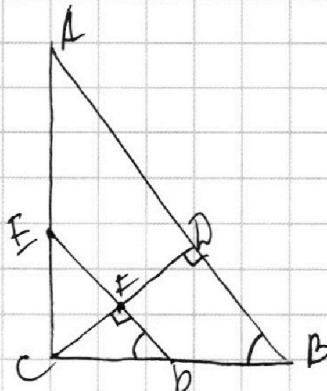
$$ac = (2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}) \cdot (2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30})$$

Ответ: $2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $\triangle ABC$ - треугольник, AP и AB - проекции катетов на гипотенузу.
тогда $AP = AC^2 : AB$
 $AB = CB^2 : AP$

$AP : AB = 3 : 1$, т.е. $AC^2 : CB^2 = 3 : 1$,
т.е. $AC = CB \cdot \sqrt{3}$
 $\tan \angle CBA = AC : CB = \sqrt{3}$, т.е.
 $\angle CBA = 60^\circ$, тогда
т.к. $EF \parallel AB$, $\angle ABC = \angle EPF = 60^\circ$, где $P \in EF \cap CB$.

2) Пусть $CP = x$, $PB = y$,
 $CA \perp AB$ ($\Rightarrow CF \perp EP$), $\triangle CFP$: $\angle F = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$
 $AB \parallel EF$ ($\Rightarrow CP \perp EP$), т.е. $FP = \frac{1}{2} CP$,
 $FP = \frac{x}{2}$
 $\triangle ECP$: $\angle C = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$, т.е. $CP = \frac{1}{2} EP$, $EP = 2x$
тогда т.к. FE ~~перпендикулярна~~^{касательная} на с.р., то ~~закончим~~
справедливость логии $PB^2 = PF \cdot PE$
 $y^2 = \frac{x}{2} \cdot 2x$, $y^2 = x^2$, $y = x$, т.е. P - сер. с.р. CB .

3) Многа EP - линия, параллельна AB , проход. через с.р. CB ,
т.е. содержит среднюю линию $\triangle CBA$, $\triangle CBA$
 EP - ср. линия $\triangle CBA$, EF - ср. линия $\triangle CPA$,
тогда $S_{EFC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$

4) $AP : PB = 3 : 1$, т.е. $S_{\triangle CAP} : S_{\triangle ABP} = 3 : 1$,
 $S_{\triangle CAP} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}$

Многа $S_{FCF} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} S_{ABC}$
 $S_{ABC} : S_{FCF} = 16 : 3$

Onboard 16'3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

\arcsin числа это число от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ вкл.

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{так} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2}$$

Модифицированное равносильно исходному:

$$\begin{cases} 5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) \leq x + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$
$$-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{7}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} \quad -7 \leq -x + 2\pi k \leq 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3)$$
$$-7\pi x + 2\pi k \in 0/6 \quad -6\pi \leq -(2\pi + 10\pi k) + 12\pi k \leq 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5)$$
$$-4\pi \leq 2\pi k \leq 2\pi \quad -2 \leq k \leq 1 \quad (6)$$
$$x = \frac{2\pi(1+5k)}{6} \quad (7)$$
$$-2 \leq k \leq 1 \quad (8)$$

$$\begin{cases} k=1 \\ x=2\pi \\ k=0 \\ x=\frac{7\pi}{3} \\ k=-1 \\ x=-\frac{4\pi}{3} \\ k=-2 \\ x=-3\pi \end{cases}$$

Ответ: $\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; 2\pi\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

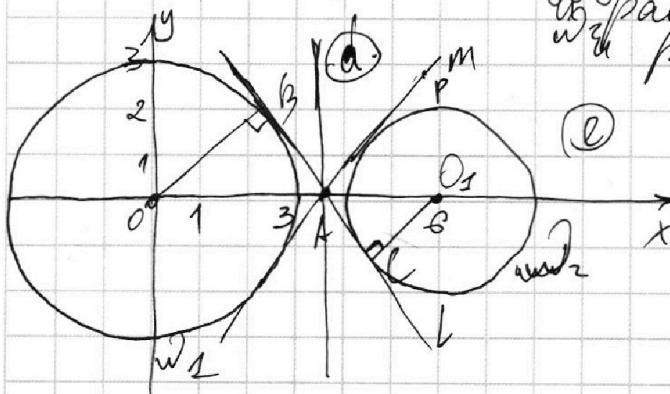
$$\begin{cases} 9x + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$(1) (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 9)(x - 6)^2 + 32 - 36 + y^2 = 0,$$

~~(2) $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 3$ и $x = -3$~~

~~эти уравнения имеют единственные решения~~
~~но есть, предполагающие~~

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x - 6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{решение уравнений (1)} \\ \text{будут общ. и с центром } (0,0) \\ \text{в радиус } 3 \text{ и центром } (6,0) \\ \text{в радиус } 2.$$



$9x + 2y - 36 = 0$ — уравнение прямой $y = -\frac{9}{2}x + 18$
бесконечно, чтобы было 2 решения. Каждое имеет с 1 общ. точк. 2 общие точки, т.е.
многозначно, чтобы прямая пересекла окружность в двух точках.

Заметим, что параллель. а значит между
этими прямой, параллель в зевают пар. пересечения
на линии $(0, \frac{3k}{2})$.

~~Несколько способов рассмотривались выше~~
~~один из которых никаких оправданий~~

3) Проведены векторы касательные окружности
которые из окр. симметричны относ. ОХ, т.е.
их кас. точки будут симметричны относ. ОХ и
м. перес. нас., т.е. т. А, будет лежать на ОХ.

Рассмотрим одну из кас., пусть она кас.
в т. В, O_2 в т. С, $O_1(8,0)$ — центр W_2 .
и к. ради. окр., провод. в т. кас., перпен. кас., то (-1)

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$OB \perp AB$, $OC \perp AC$. $\angle BAO = \angle OAC$ как вертикальные
углы. $\triangle OBA \sim \triangle OCA$, т.е. $\frac{OA}{OA} = \frac{OB}{OC} = \frac{3}{2}$ — радиусы.

$$OA + AO_1 = OB_1 = 6.$$

тогда $\begin{cases} OA = 15 \\ OA = 15 + AO_1 \end{cases}$ отсюда $\begin{cases} OA = \frac{18}{5} \\ OA_1 = \frac{12}{5} \end{cases}$.

$$\triangle ACO_1: \text{по теореме Пифагора } AC = \sqrt{AO_1^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 4} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}.$$

тогда $\tan \angle O_1 AC = \frac{OC}{AC} = \frac{2}{\frac{7}{5}} = \frac{10}{7}$.

$\angle O_1 AC$ — угол между осн. и ОК.

$\angle(L; OK) = \angle(m; OK)$, то иначе угол паклюса
и если доказ. паклюса прямого.

Методом засечки получим с местом $\frac{5}{\sqrt{11}}$ к ОК
прокод. через $(\frac{18}{5}, 0)$.

$$m: y = \frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}}, L: y = \frac{6}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}}.$$

1) Рассмотрим все прямые, проходящие через т. А.
если это кас. то они имеют с элп. по 1
место, всего 2 решения, т.е. подсечки.

2) Если это прямые, параллельные прокодам через
точку А (см. на рисунке), то они
не имеют общих с элп. мест.

Зад. находит место, где разные стороны от
плоскости пересекаются. Прямые, параллельные М
будут по одному общему месту прямой М, прокод.
через А, т.е. по одному общему месту из
пар. и. по другому с другой, т.е. могут быть
также пересекаться с обеими, т.е. места 2,
а не 4.

3) Отмечать можно все, включая все линии
пар.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a) ~~Каждый из пар кас. не имеющий общих точек~~
 расположения по общему касательно сферому
 от касательной, которой она кас. Пар. Кас. неодинаковы
 по разные стороны от кас. ~~и по одному~~ ~~одинаково~~ ~~одинаково~~
~~принадлежат пар. Кас. лежат симметрично макс. 2 общие~~
~~точки с пар., а не 4.~~

b) Если это прямая N , проходящая через отрасль \mathcal{C} , то они имеют оба пересекают
 касательную пар. В двух точках, т.е. есть
 и решение. (Отрасль \mathcal{C} это область между
 кас. сор. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$.)

Значит если подходит прямая, проходящая
 через конец кас., то если она проходит через
 м. А, то она имеет их лучи лежат в
 отрасли \mathcal{C} .

т.е. это прямая с угл. козг от 0 до
~~или~~ $\frac{\pi}{2}$ (касательной m) и от $-\frac{\pi}{2}$ π (кас. L)
 до 0. (0 включительно). π включительно).

c) Кас. прямой $y = \frac{-ax + 3b}{2}$ это $-\frac{a}{2}$
 т.е. $-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$, $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8.$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$$

Пусть $\log_3 x = a$, $a \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} a^4 + 6 \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8 & a \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

2) $\log_3^4(5y) + \cancel{\log_3(5')} - 8 \cancel{\log_{5y} 3} = \log_{25y^2}(3') - 8 -$

$$\log_3(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8.$$

$$\log_3 5y = \frac{1}{\log_{5y} 3}$$

Пусть $\log_3 5y = b$, $b \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} b^4 + 2b = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8 & b \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b^5 + 16b + 7 = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

3) Рассмотрим функции $f(t) = 2t^5 + 16t + 7$
и $g(t) = 2t^5 + 16t - 7$.

$2t^5 \geq 0$ на R , $16t + 7 \geq 0$ на R , т.е.

$f(t) \geq 0$ на R как сумма неотрицательных

функций, тогда по т. Больцано-Кесел
на R ~~также~~ найдется такое с, что $f(c) = 0$.

А так как $f(t)$ строго возрастающая, то
менее с - единственное. $c = a$, т.к
 $2a^2 + 16a + 7 = 0$ из 1).

Аналогично $g(t)$ имеет ед. корень и
этот корень б.

-1-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$f(a) = 2(ka^5 + 16a) \cancel{+ 7} = -2a^5 - 16a + 7 =$$

$$\cancel{-2}z^5 - 16z + 7 = -2z^5 - 16z - 7 = -g(z).$$

$$\text{M.e. } f(-z) = -g(z).$$

$$g(b) = 0, \text{ me. } 0 = g(b) = -g(b) = f(-b).$$

~~f(-b) = 0, но a - еп. корень~~ $f(b) = 0$

$$\text{m.e. } a = -b.$$

$$1) \text{ M.e. } \log_3 x = -\log_3 5y$$

$$\log_3 x = \log_3 (5y)^{-1}$$

$$x = \frac{1}{5y}$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ошибок! 5.

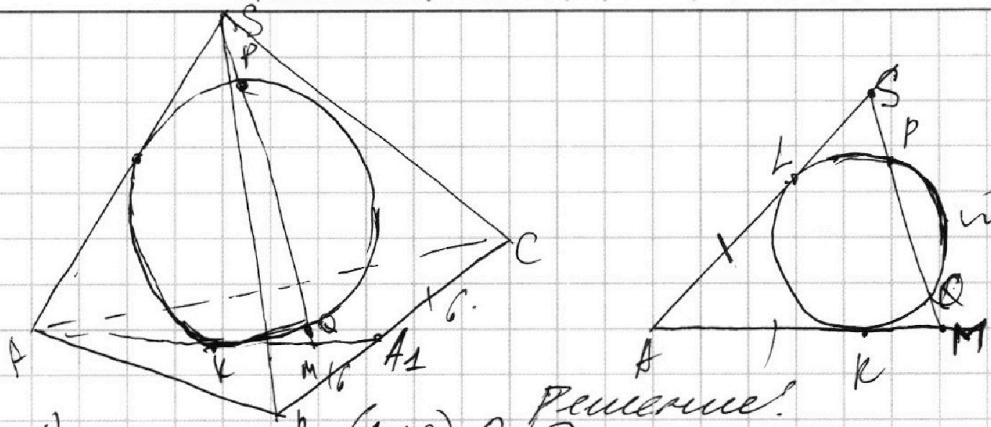
- 2 -



- | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input checked="" type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

a) 1) $\angle (AMS) \cap \Omega$ по опр.

$L, K, Q, P \in (AMS)$ а $\in \Omega$, м.э. L, P, Q, K лежат на общей опр. Ω .

$AL \cap AK$ - кас к Ω , м.э. кас. а Ω

$AL \cong AK$ - как отрезки кас, проекц. из Ω .

Запишем выражения через S и M :

$$SL^2 = SP \cdot SQ, MK^2 = MQ \cdot MP \quad (SL \text{ и } MK \text{ - кас.})$$

$$SP = QM - \text{по уст.} \quad SQ = SP + PQ \Rightarrow QS = MP$$

$$\text{м.э. } SF^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = KM, \quad SL = MK$$

$$\text{м.э. } AS = AM = 12$$

2) M - м перес. ~~на~~ сферы, $\frac{m}{AM} = \frac{2}{3} AA_1$, м.э.
 $AA_1 = 18$.

$$S_{BAA_1} = S_{BA_1C}, \text{м.н. } AA_1 \text{ - высота, } S_{ABC} = 2S_{BAA_1}$$

$$S_{AAB} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin L (AA_1, BA_1)/2$$

$$\text{т.ч. } \angle (AA_1, BA_1) = L, \text{тогда}$$

$$S_{ABC} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin L$$

$$18 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sin L = 90^\circ, \sin L = \frac{5}{6}$$

Пусть, между собой отрезки $AB \perp AC$, тогда.

$$\cos LAA_1B = \frac{\pi}{2} - \sin^2 LAA_1B = \frac{11}{36}$$

$$\Delta AA_1B \text{ по м. косинусов: } AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2 \cos LAA_1 \cdot AA_1 \cdot A_1B$$

$$AB^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot \sqrt{18 \cdot 6} = 2^2(3^2 + 3^2 - \sqrt{117}) =$$

$$= 6^2(3^2 + 1^2 - \sqrt{117}) \quad AB = 6 \sqrt{10 - \sqrt{117}}$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta ABC \text{ по } \cos L A \Rightarrow c = -\frac{\sqrt{11}}{6}$$

но по синусов

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2 \cos L A_1 \cdot AA_1 \cdot A_1C$$

$$AC^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot 18 \cdot 6$$

$$AC^2 = 6^2(9+1+\sqrt{11}) \Rightarrow AC = 6\sqrt{10+\sqrt{11}}$$

$$3) \Delta ABC \text{ по } m \text{ по синусов } CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos L A \cdot AC \cdot AB$$

$$CB^2 = 6^2(10-\sqrt{11})^2 + (6\sqrt{10+\sqrt{11}})^2 - 2 \cos L A \cdot 6\sqrt{10+\sqrt{11}}$$

$$4 = 10 - \sqrt{11} + 10 + \sqrt{11} - 2 \cos L A \cdot 100 - 11$$

$$\cos L A = \frac{10+10-4}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{10+\sqrt{11}}} = \frac{16}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{10+\sqrt{11}}} = \frac{8}{189}$$

ΔACC_1 по м. по синусов:

$$CC_1^2 = AC^2 + AC_1^2 - 2 \cos L A \cdot AC \cdot CA$$

$$CC_1^2 = 6^2(10+\sqrt{11}) + 3^2(10-\sqrt{11}) - 2 \cos L A \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{10+\sqrt{11}} \cdot \sqrt{10-\sqrt{11}}$$

$$CC_1^2 = 6^2(10+\sqrt{11}) + 3^2(10-\sqrt{11}) - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{8}{189}$$

$$CC_1^2 = 3^2(40+4\sqrt{11}+10-\sqrt{11}) - 48$$

$$CC_1^2 = 3^2(3\sqrt{11}+50-32) \Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{3\sqrt{11}+18}$$

ΔABB_1 по м. по синусов:

$$BB_1^2 = BA^2 + AB_1^2 - 2 \cos L A \cdot AB \cdot AB_1$$

$$BB_1^2 = 6^2(10-\sqrt{11}) + 3^2(10+\sqrt{11}) - 2 \cos L A \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{8}{189} \cdot 0.3 \text{ (без корня)}$$

$$BB_1^2 = 3^2(40-4\sqrt{11}+10+\sqrt{11}) - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{8}{189}$$

$$BB_1^2 = 3^2(50-3\sqrt{11}-32) \Rightarrow BB_1 = 3\sqrt{18-3\sqrt{11}}$$

$$\text{Модул} \quad AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3\sqrt{11+18} \cdot 3\sqrt{18-3\sqrt{11}} = \\ = 18 \cdot 9\sqrt{18^2 - (3\sqrt{11})^2} = 18 \cdot 9 \cdot 3\sqrt{6^2-11} = 18 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 6 = \\ = 2 \cdot 81 \cdot 3 \cdot 5 = 2430$$

Ответ: 2430.

1) SN кас. $\perp L$, т.е. $SL = SN = 4$.

$$AL = AR = 8$$

$$BN = BK, EN = CR. \quad \Delta KBC = \Delta NBC.$$

По м. по синусов можно найти BK, CR .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

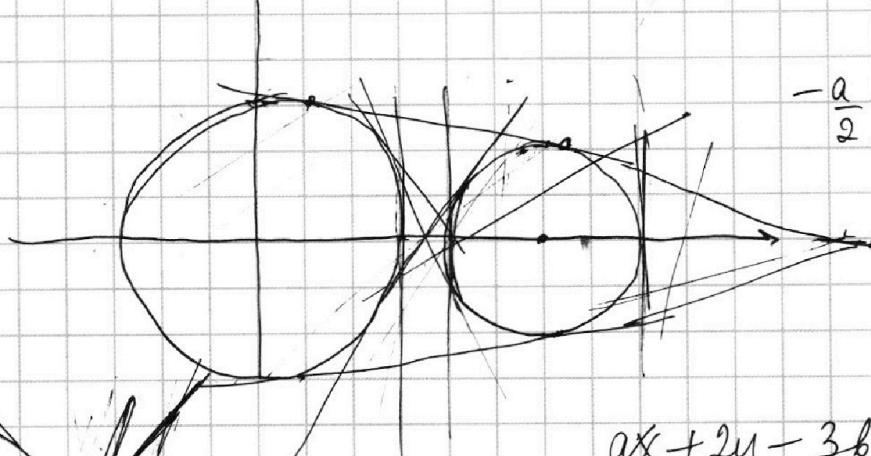
№ 4.

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 32 + y^2 = 0.$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

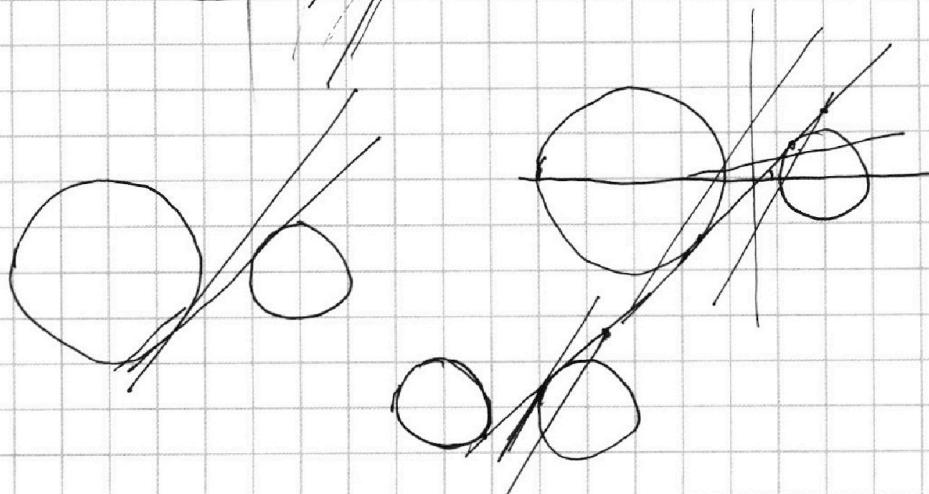
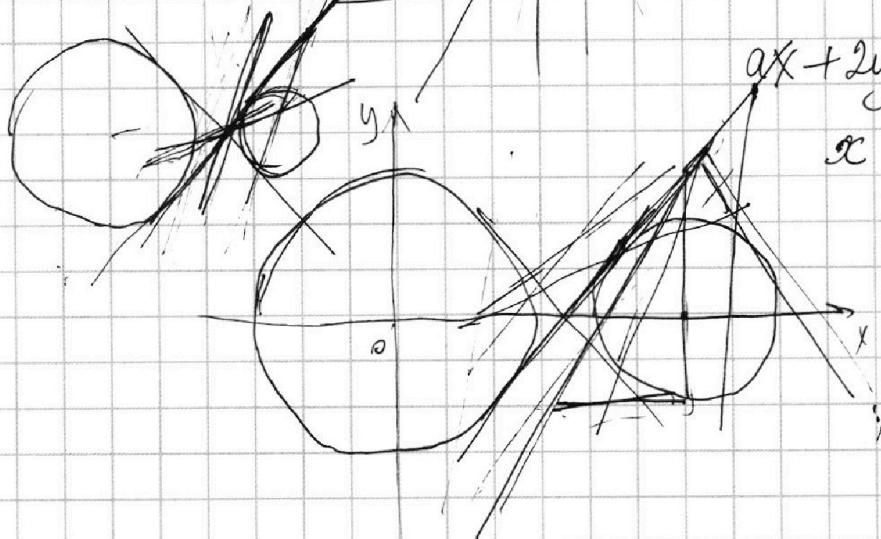
$$y = \frac{-ax + 3b}{2}$$

$$-\frac{a}{2}$$



$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$x = \frac{3b - 2y}{a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

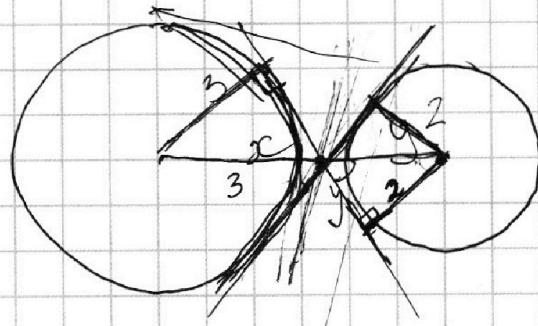
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

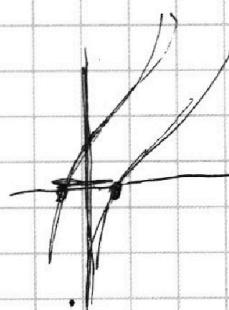
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(372)

$$x+y=6 \quad | \cdot 2 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2}; \quad 2x=3y.$$



$\frac{12}{5}$

$$\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - f^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{25} - 4} = \sqrt{\frac{44}{25}} = \frac{2\sqrt{11}}{5}.$$

$$\operatorname{tg} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{11}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_2 3 = \cancel{\log_{x^2} 3^5} - 8.$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_2 3 = \cancel{\frac{5}{2} \log_2 3} - 8.$$

$$a^4 + 6a = \frac{5}{2}a - 8$$

$$a^5 + 6a = 2,5 - 8a.$$

$$a^5 + 8a + 35 = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0.$$

$$\log_3^4 59 + 2 \log_2 3 = \cancel{\frac{11}{2} \log_{25} 3} - 8.$$

$$b^4 + 2f = \cancel{\frac{11}{2} \frac{1}{6}} - 8a$$

$$b^5 + 8b = \cancel{35}$$

$$b^5 + 8b - 3 =$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0.$$

$$a = -b$$

$$\frac{2}{25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2(a^5 + b^5) + 16(a+b) = 0$$
$$(a+b)(a^4 - ab^3 - 8a^3b + b^4 + 8ab^2 + 4) = 0.$$

$$a = -b$$

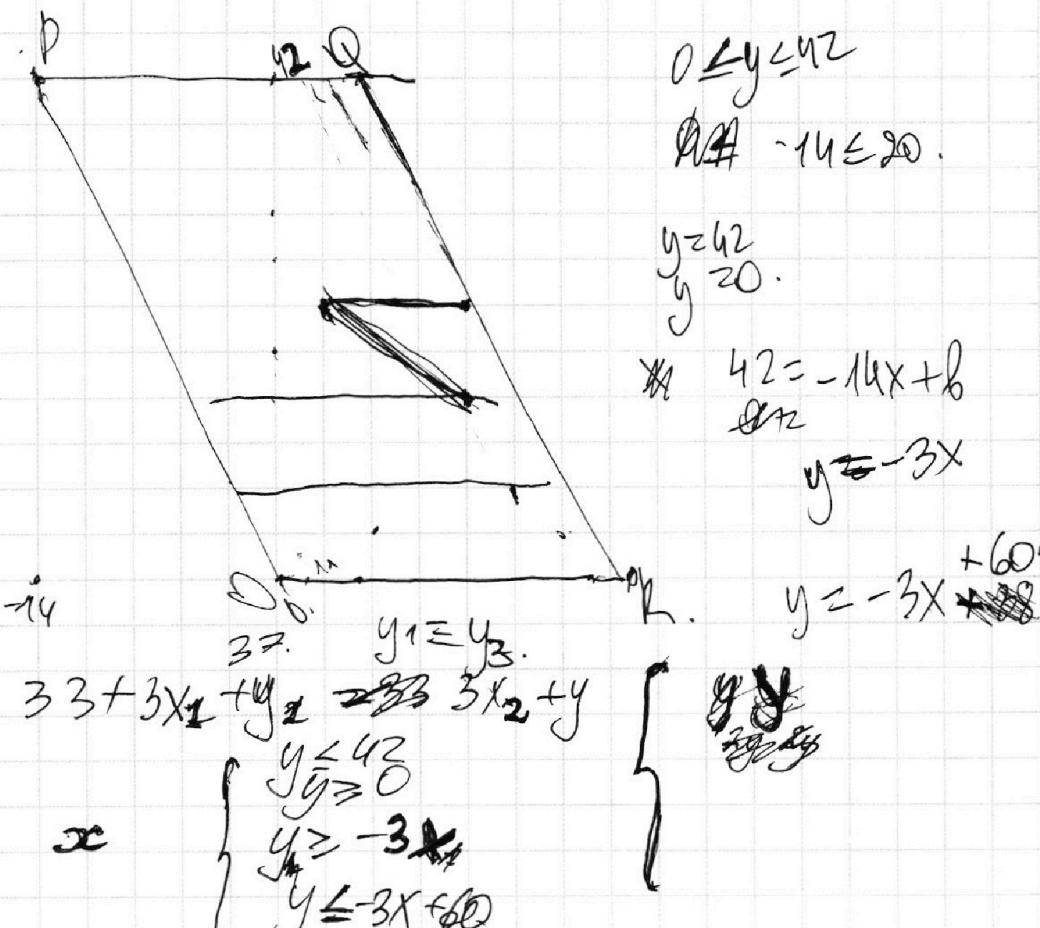
$$\log_3 x = -\log_3 \frac{5y}{5y} \quad y_1 = y_3$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y}$$

№ 5

$$3(x_1, y_1)$$

$$f(z) = -z^5 - 16z + 7 = -(z^5 + 16z - 7)z - g(z)$$



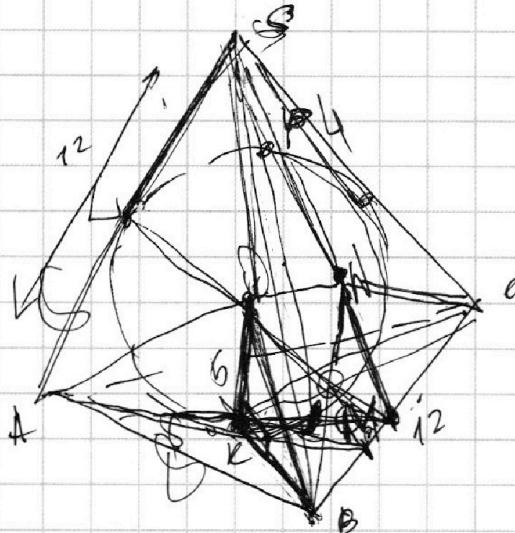
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

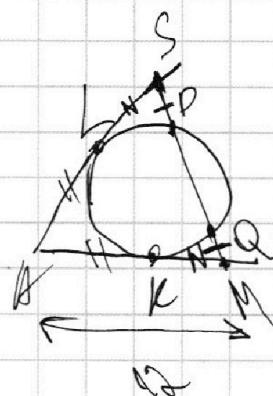
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

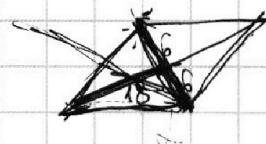


$$AC = 6\sqrt{10} + \sqrt{11}$$

$$AB = 6\sqrt{10} - \sqrt{11}$$



$$PA_1 = 18$$



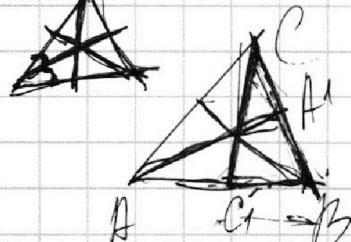
~~$$18 \cdot \sin \alpha \cdot 6 = 90$$~~

$$2 = \frac{\sqrt{11}}{24}$$



$$\sin \alpha = \frac{5}{6}$$

$$\left(3 + \frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2$$



$$1 - \frac{25}{36}$$

$$9 + \sqrt{11} + \frac{11}{36} + \frac{25}{36}$$

$$\frac{45 + \sqrt{11} + 11}{2} \rightarrow x$$

$$(6(10 - \sqrt{11}))$$

$$\frac{5}{6}$$

$$AB = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

9

$$x + 10 +$$

$$45^2 = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{11}} + 6}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10 - \sqrt{11}} + 10}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} r$$
$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} m$$
$$ac = 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} q$$

$$9 + 16 + 19 = 14 + 28 = 40$$

$$(abc)^2 = 2^{32} \cdot 3^{42} \cdot 5^{53} r.m.q$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\cancel{8} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}$$

$$abc \sim 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{20}$$

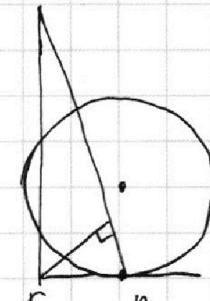
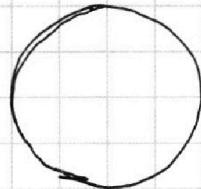
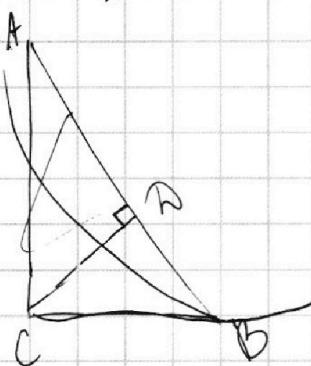
$$b = 2^2 \cdot 3^3$$
$$a = 1^7 \cdot 3^7 \cdot 5^7$$
$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$
$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$
$$ca =$$

$$2^{18} \cdot 3^{30}$$

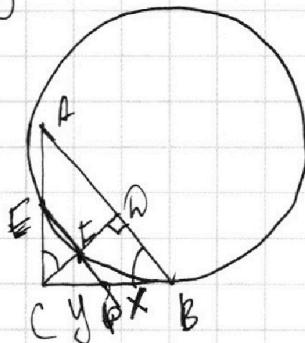
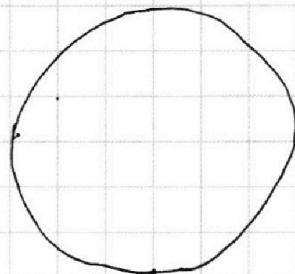
$$b =$$

№2.



$$FP \approx \frac{y}{2}, \quad LB = 60^\circ$$

$$EP \approx 2y$$



$$AO = \frac{AC^2}{AB}$$
$$OB = \frac{CB^2}{AB}$$
$$\left(\frac{AC}{CB}\right)^2 = 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cancel{5 \arcsin(\sin(\cancel{x + \frac{\pi}{2}}))} \quad 5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~отсюда~~

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} \\ 5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq -x + 2\pi k \leq 0 \\ \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi k \leq 0 \\ \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi k \leq 0 \\ 2\pi k + 2\pi + 10\pi k = 6x \\ x = \frac{2\pi(1+5k)}{6} \end{array} \right.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{2\pi(1+5k)}{6} + 2\pi k \leq 0$$

$$-3\pi \leq -2\pi k - 10\pi k + 12\pi k \leq 0$$

$$-4\pi \leq 2\pi k \leq 2\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \leq k \leq 1 \\ 0, 1 \end{array} \right.$$



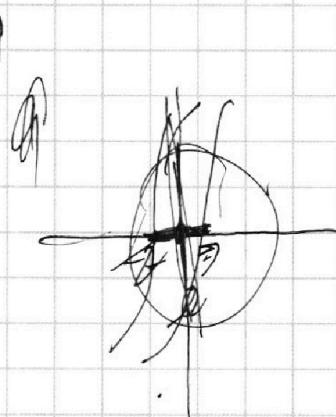
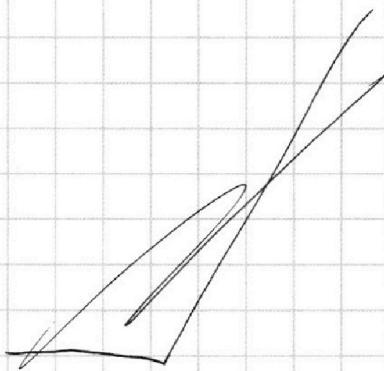
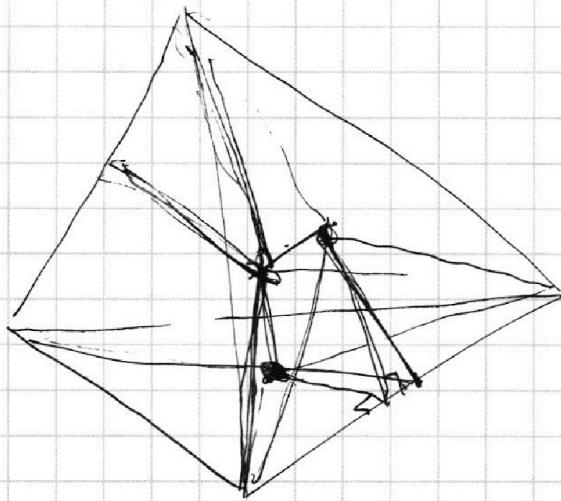
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 6.$$

$$\log \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$2\pi - 3\pi$$

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!