МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $ab = 2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}\cdot r$, $r\in N$.
$bc = 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}\cdot m$, $m\in N$.
$ac = 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}\cdot k$, $k\in N$.

Заметим, что $abc \,\vdots\, ac$, т.е. $abc \,\vdots\, 5^{30}$.

Перемножим ab, bc и ac:

$$(abc)^2 = 2^{9+14+19}\cdot 3^{10+13+18}\cdot 5^{10+13+30}\cdot r\cdot m\cdot k.$$

$$(abc)^2 = 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}\cdot r\cdot m\cdot k.$$

степень вхождения 3 в

Заметим, что если $abc \le$ ~~меньше или равно~~ 20, то степень вхожд. 3 в $(abc)^2 \le 40$, но она точно не менее 41

т.е. степень вхождения тройки в abc не менее 21.
Аналогично, степень вхождения 2 в abc не меньше 21

Тогда наим. abc, которое может быть это $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

Это возможно при $a = 2^{7}\,3^{7}\cdot 5^{17}$
$b = 2^{2}\cdot 3^{3}$
$c = 2^{12}\,3^{11}\cdot 5^{13}$

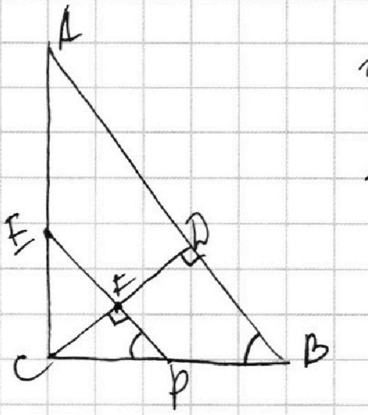
$ab = (2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{17}) \,\vdots\, (2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10})$
$bc = (2^{14}\cdot 3^{14}\cdot 5^{13}) \,\vdots\, (2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13})$
$ac = (2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}) \,\vdots\, (2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30})$

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $\triangle ABC$ - прямоуг, AD и DB - проекции катетов на гипотенузу, тогда $AD = AC^2 : AB$
$DB = CB^2 : AB$

$AD : DB = 3:1$, т.е. $AC^2 : CB^2 = 3:1$,
т.е. $AC = CB\cdot\sqrt{3}$
$tg\,\angle CBA = AC : CB = \sqrt{3}$, т.е.
$\angle CBA = 60^\circ$, тогда
т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle ABC = \angle EPC = 60^\circ$, где $P = EF \cap CB$.

2) Пусть $CP = x$, $PB = y$,
$\left.\begin{array}{l} CD \perp AB \\ AB \parallel EF \end{array}\right\} \Rightarrow CF \perp EP$, $\triangle CFP$: $\angle F = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$,
т.е. $FP = \frac{1}{2} CP$
$FP = \frac{x}{2}$
$\triangle ECP$: $\angle C = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$, т.е. $CP = \frac{1}{2} EP$, $EP = 2x$

тогда т.к. F, E и B точки на окр., ~~PB-касательная~~, то замечаем степень точки $PB^2 = PF \cdot PE$
$\cancel{x^2 = \frac{y}{2}}$ $y^2 = \frac{x}{2} \cdot 2x$, $y^2 = x^2$, $y = x$, т.е. P - сер. CB.

3) Тогда EP - линия, пар AB, проход. через сер CB, т.е. содержит среднюю линию, $\triangle CBA$
EP - ср. линия $\triangle CBA$, EF - ср. линия $\triangle CDA$,
тогда $S_{EFC} = \frac{1}{4} S_{ADC}$

4) $AD : DB = 3:1$, т.е. $S_{\triangle CAD} : S_{\triangle DBD} = 3:1$,
$S_{\triangle CAD} = \frac{3}{4} S_{ABC}$

Тогда $S_{EFC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} S_{ABC}$
$S_{ABC} : S_{EFC} = 16:3$

Ответ $16:3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$.

arcsin числа это число от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ вкл.

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$

где $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \le \frac{\pi}{2}$.

тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\pi \le -x + 2\pi k \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\pi \le -x + 2\pi k \le 0 \quad |\cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -6\pi \le -(2\pi + 10\pi k) + 12\pi k \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -4\pi \le 2\pi k \le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -2 \le k \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi(1+5k)}{6} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -2 \le k \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 1 \\ x = 2\pi \end{cases} \\ \begin{cases} k = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} k = -1 \\ x = -\frac{4\pi}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} k = -2 \\ x = -3\pi \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-3\pi;\ -\frac{4\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ 2\pi\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

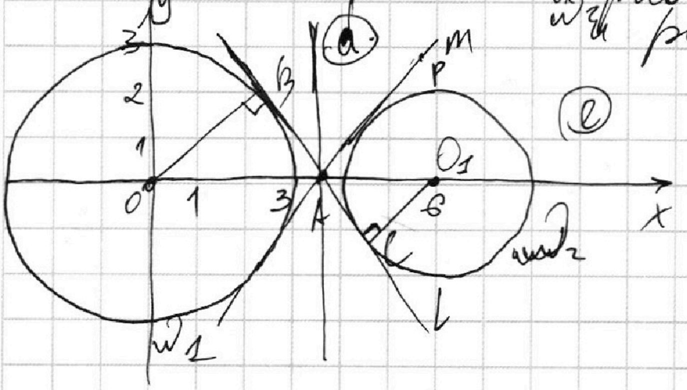
1 2 3 ☒4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$

(1)
1) $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-9)((x-6)^2+32-36+y^2)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \Leftrightarrow$ ~~решениями~~
~~этого уравнения создает~~ ~~является множество~~
~~точек, представляющие~~

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right.$ — решение уравнения (1) будут окр. ω_1 с центром $(0,0)$ и рад. 3 и ω_2 центром $(6,0)$ и рад. 2.



2) $ax+2y-3b=0$ — уравнение прямой $y=\frac{-ax+3b}{2}$
необходимо, чтобы было 4 решения. Прямая имеет с окр. макс. 2 общие точки, т.е. необходимо, чтобы прямая пересекла каждую окр. в двух точках.

Заметим, что параметр a задает наклон это прямой, параметр b задает пар. перенос на вектор $(0; \frac{3b}{2})$.

~~Тогда стоит рассматривать такие прямые, которые никаких парат.~~

3) Проведем внутр касательные окружностей. Каждая из окр. симметрична относ. OX, т.е. их кас. тоже будут симметр. относ. OX и т. перес. кас., точка A, будет лежать на OX.

4) Рассмотрим одну из кас. l, пусть она кас ω_1 в т. B, ω_2 в т. C, $O_1(6,0)$ — центр ω_2. т.к. рад. окр., провед. в т. кас, перпенд. кас, то (-1-)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$OB \perp AB$, $O_1C \perp AC$. $\angle BAO = \angle O_1AC$ как вертик.
тогда $\triangle OBA \sim \triangle O_1CA$, т.е. $\frac{OA}{AO_1} = \frac{OB}{OC} = \frac{3}{2}$ – радиусы.

$OA + AO_1 = OO_1 = 6$.
тогда $\begin{cases} OA = 1{,}5\,AO_1 \\ OA + AO_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OA = \frac{18}{5} \\ OA_1 = \frac{12}{5}. \end{cases}$

$\triangle ACO_1$: ~~Ао~~ т. Пифагора $AC = \sqrt{AO_1^2 - OC^2} =$
$= \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 4} = \sqrt{\frac{44}{25}} = \frac{2\sqrt{11}}{5}$.

тогда $tg\, \angle O_1AC = \frac{O_1C}{AC} = 2 / \left(\frac{2\sqrt{11}}{5}\right) = \frac{5}{\sqrt{11}}$

$\angle O_1AC$ – угол между кас. и OX.
$\angle(l; OX) = \angle(m; OX)$ – тангенс угла наклона и есть коэф. наклона прямой.

Тогда ~~запс~~ кас. это прямые с наклоном $\frac{5}{\sqrt{11}}$ к OX проход. через $\left(\frac{18}{5}; 0\right)$.

m: $y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}$, l: $y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}}$.

4) а) Рассмотрим все прямые, проход. через т. A. если это кас, то они имеют с окр. по 1 точке, всего 2 решения, – не подходит.

б) Если это прямые M, которые проходят через область (∂) (см. на рисунке), то они не имеют общих т. с ~~окр. Все прямые~~ окр.
Окр. находятся по разные стороны от таких прямых. Прямые, пар. прямых M будут по одну сторону от прямой M, проход. через A, т.е. по одну сторону с одной из окр. и по другую с другой, т.е. могут быть только перес. только с одной, т.е. макс 2, а не 4.

(∂) область между кас., в которой не лежат окр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) • Каждая из прямых пар кас. ~~не имеют~~ так же расположена по одну какую-то сторону от касательной, которой она пар. Окр. находятся по разные стороны от кас, т.е. ~~по одну сторону только с одной окр, т.е прямые~~ прямые пар. кас могут иметь макс. 2 общие точки с окр., а не 4.

б) Если это прямые N, проход. через область (e), то они ~~имеют общ~~ пересекают каждую окр. в двух точках, т.е есть 4 решения (Область (e) это область между кас, сод. ω_2). ~~е т~~

Значит нам подходят прямые, с такими угловыми коэф, что если они проходят через т. A, то ~~они пот~~ их лучи лежат в области (e).

т.е. это прямые с уг. коэф от 0 до $\frac{5}{\sqrt{11}}$ (касательной m) и от $-\frac{5}{\sqrt{11}}$ (кас. l) до 0. (0 включительно).

г) Коэф. прямой $y=\frac{-ax+3b}{2}$ это $-\frac{a}{2}$

т.е. $-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$, $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8.$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$

$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$

Пусть $\log_3 x = a$, $a \neq 0$, тогда

$\begin{cases} a^4 + 6\frac{1}{a} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a} - 8 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0. \\ a \neq 0 \end{cases}$

2) $\log_3^4(5y) + \cancel{2\log_{25y^2}(3^{11})} - 8\ 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$ -

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8.$

$\log_3 5y = \frac{1}{\log_{5y} 3}$

Пусть $\log_3 5y = b$, $b \neq 0$, тогда

$\begin{cases} b^4 + 2\frac{1}{b} = \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{b} - 8 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^5 + 16b - 7 = 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$

3) Рассмотрим функции $f(t) = 2t^5 + 16t + 7$ и $g(t) = 2t^5 + 16t - 7$.

$2t^5 \nearrow$ на R, $16t + 7 \nearrow$ на R, т.е. $f(t) \nearrow$ на R как сумма возр. функций.

$f(0) = 7 > 0$, $f(-1) = -2 - 16 + 7 = -11 < 0$

$f(t)$ непрерывна на R как сумма непрерывных функций, тогда по т. Больцано-Коши на R $\exists$ найдется такое c, что $f(c) = 0$. А так как $f(t)$ строго монотонна, то такое c — единственное. $c = a$, т.к. $2a^5 + 16a + 7 = 0$ из 1).

Аналогично $g(t)$ имеет ед. корень и этот корень b.

-1-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~$f(-a) = 2(-a)^5 + 16(-a) + 7 = -2a^5 - 16a + 7 =$~~

$z \in \mathbb{R}$: $f(-z) = 2(-z)^5 + 16(-z) + 7 =$
$= -2z^5 - 16z + 7 = -(2z^5 + 16z - 7) = -g(z)$.

т.е $f(-z) = -g(z)$.

$g(b) = 0$, т.е. $0 = g(b) = -g(b) = f(-b)$.

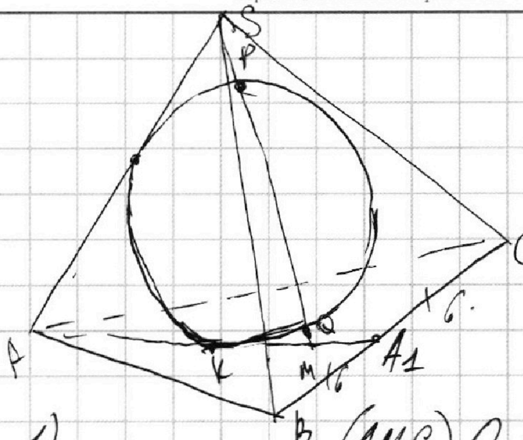
$f(-b) = 0$, но a — ед. корень ~~такого~~ $f(t) = 0$
т.е. $a = -b$.

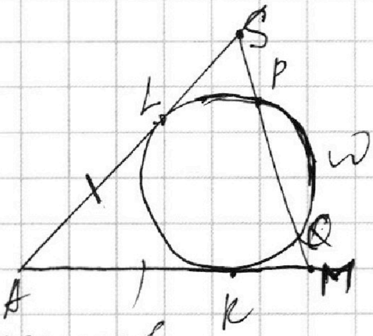
4) т.е. $\log_3 x = -\log_3 5y$
$\log_3 x = \log_3 (5y)^{-1}$
$x = \frac{1}{5y}$
$xy = \frac{1}{5}$ Ответ: $\frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





Решение:

а) 1) $(AMS) \cap \Omega$ по окр.

$L, K, Q, P \in (AMS)$ и $\in \Omega$, т.е. L, P, Q, K лежат на одной окр. ω

AL и AK – кас к Ω, т.е. кас. к ω

$AL = AK$ – как отрезки кас, провед. из 1 т.

Запишем степени точек S и M:

$SL^2 = SP \cdot SQ$, $MK^2 = MQ \cdot MP$ (SL и MK – кас.)

$SP = QM$ – по усл. $\left.\begin{array}{l} SQ = SP + PQ \\ MP = SP + QM \end{array}\right\} \Rightarrow QS = MP.$

т.е. $SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = KM^2$, $SL = MK$.

т.е $AS = AM = 12$

2) M – т. перес. ~~мед~~ медиан, т.е. $AM = \frac{2}{3} AA_1$, т.е. $AA_1 = 18$.

$S_{BAA_1} = S_{AA_1C}$, т.к. AA_1 – медиана. $S_{ABC} = 2S_{BAA_1}$.

$S_{AA_1B} = AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin\angle(AA_1; BA_1)/2$.

Пусть $\angle(AA_1; BA_1) = \alpha$, тогда

$S_{ABC} = AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin\alpha$.

$18 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sin\alpha = 90$, $\sin\alpha = \frac{5}{6}$.

Пусть, не умаляя общности $AB < AC$, тогда в $\triangle AA_1B$ $\angle AA_1B$ – острый, $\cos\angle AA_1B =$
$= \sqrt{1 - \sin^2\angle AA_1B} = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

$\triangle AA_1B$ по т. косинусов: $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2\cos\angle A_1 \cdot AA_1 \cdot A_1B$

$AB^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot 18 \cdot 6 = 2^2(9^2 + 3^2 - \sqrt{11} \cdot 9) =$
$= 6^2(3^2 + 1 - \sqrt{11})$. $AB = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\triangle AA_1C$ $\cos\angle AA_1C = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

по т. косинусов

$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2\cos\angle A_1 \cdot AA_1 \cdot A_1C.$

$AC^2 = 18^2 + 6^2 - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)\cdot 18\cdot 6.$

$AC^2 = 6^2(9+1+\sqrt{11})$; $AC = 6\sqrt{10+\sqrt{11}}.$

3) $\triangle ABC$ по т. косинусов $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cos\angle A\cdot AC\cdot AB$

$12^2 = (6\sqrt{10-\sqrt{11}})^2 + (6\sqrt{10+\sqrt{11}})^2 - 2\cos\angle A\, 6^2\sqrt{10-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{10+\sqrt{11}}$

$4 = 10-\sqrt{11}+10+\sqrt{11} - 2\cos\angle A\sqrt{100-11}$

$\cos\angle A = \frac{10+10-4}{2\sqrt{89}} = \frac{16}{2\sqrt{89}} = \frac{8}{\sqrt{89}}$

$\triangle ACC_1$ по т. косинусов:

$CC_1^2 = AC^2 + AC_1^2 - 2\cos\angle A\cdot AC\cdot C_1A$

$CC_1^2 = 6^2(10+\sqrt{11}) + 3^2(10-\sqrt{11}) - 2\frac{8}{\sqrt{89}}\cdot 6\cdot 3\sqrt{10+\sqrt{11}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{11}}$

$CC_1^2 = 6^2(10+\sqrt{11}) + 3^2(10-\sqrt{11}) - 2\cdot 8\cdot 6\cdot 3.$

$CC_1^2 = 3^2(40+4\sqrt{11}+10-\sqrt{11} - 4\cdot 8)$

$CC_1^2 = 3^2(3\sqrt{11}+50-32)$ $CC_1 = 3\sqrt{3\sqrt{11}+18}.$

$\triangle ABB_1$ по т. косинусов:

$BB_1^2 = BA^2 + AB_1^2 - 2\cos\angle A\cdot AB\cdot AB_1$

$BB_1^2 = 6^2(10-\sqrt{11}) + 3^2(10+\sqrt{11}) - 2\frac{8}{\sqrt{89}}\cdot 6\cdot 3\sqrt{10-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{10+\sqrt{11}}$

$BB_1^2 = 3^2(40-4\sqrt{11}+10+\sqrt{11}) - 2\cdot 8\cdot 6\cdot 3$

$BB_1^3 = 3^2(50-3\sqrt{11}-32)$ $BB_1 = 3\sqrt{18-3\sqrt{11}}$

Тогда $AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 18\cdot 3\sqrt{3\sqrt{11}+18}\cdot 3\sqrt{18-3\sqrt{11}} =$
$= 18\cdot 9\sqrt{18^2-(3\sqrt{11})^2} = 18\cdot 9\cdot 3\sqrt{6^2-11} = 18\cdot 9\cdot 3\cdot 5 =$
$= 2\cdot 81\cdot 3\cdot 5 = 2430$

Ответ: 2430.

б) SN кас. Ω, т.е. $SL = SN = 4.$
$AL = AK = 8$
$BN = BK$, $CN = CK$. $\triangle KBC = \triangle NBC.$

По т. косинусов можно найти BK, CK.

МФТИ

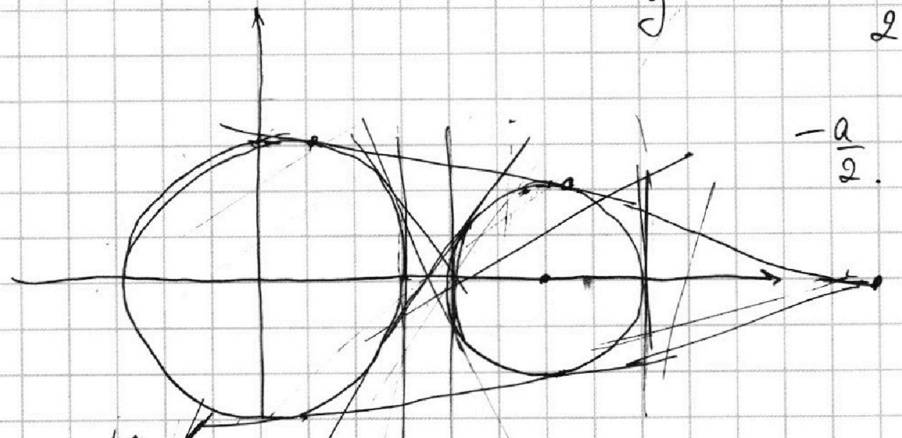
№4.

$$x^2-12x+36-36+32+y^2=0.$$

$$\begin{cases}(x-6)^2+y^2=\cancel{4}^2\\ x^2+y^2-\cancel{8}=\cancel{3}^2\end{cases}$$

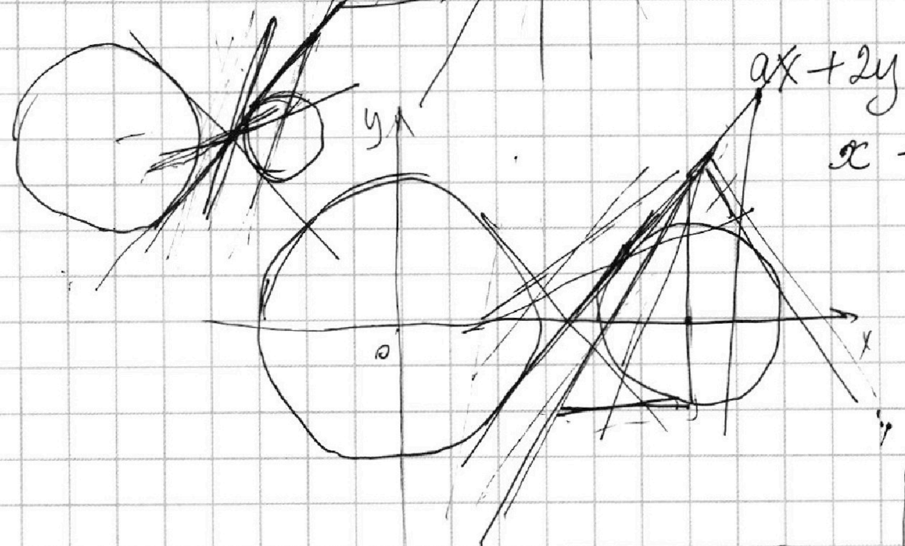
$$y=\frac{-ax+3b}{2}.$$

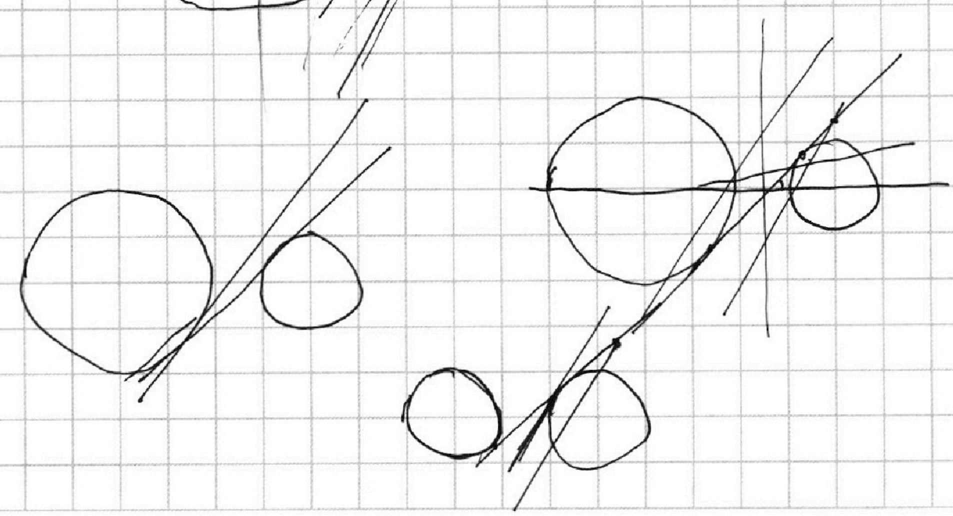
$$-\frac{a}{2}.$$



$$ax+2y-3b=0$$

$$x=\frac{3b-2y}{a}.$$



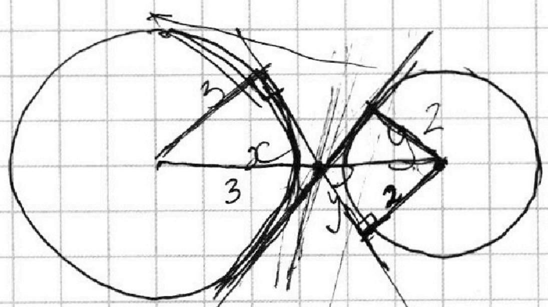


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$x+y=6 \mid \cdot 2$

$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$; $2x=3y$.

$3y+2y=12$; $y=\frac{12}{5}$

$x=\frac{18}{5}$.

$\frac{12}{5}$.

$\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2-2^2}=$

$=\sqrt{\frac{144}{25}-4}=\sqrt{\frac{44}{25}}=\frac{2\sqrt{11}}{25}$.

$tg=\frac{2}{\frac{2\sqrt{11}}{5}}=\frac{5}{\sqrt{11}}$

$\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}3^5-8$.

$\log_3^4 x+6\log_x 3=\frac{5}{2}\log_x 3-8$.

$a^4+6\frac{1}{a}=\frac{5}{2}\frac{1}{a}-8$

$a^5+6=2,5-8a$.

$a^5+8a+3,5=0$ $\quad 2a^5+16a+7=0$.

$a=-b$

$\log_3^4 5y+2_{5y}3=\frac{11}{2}\log_{25y^2}-8$.

$b^4+2\frac{1}{b}=\frac{11}{2}\frac{1}{b}-8$

2

$2b$

$b^5+8b-3,5$

$2b^5+16b-7=0$.

$\cancel{b^5+8b-3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2(a^5+b^5)+16(a+b)=0$

$(a+b)(a^4 - \cancel{b^3} - \cancel{8} + b^2a^2 - ba^3 + b^4 + 4) = 0.$

$a=-b$

$\log_3 x = -\log_{3} 5y^{-1}$

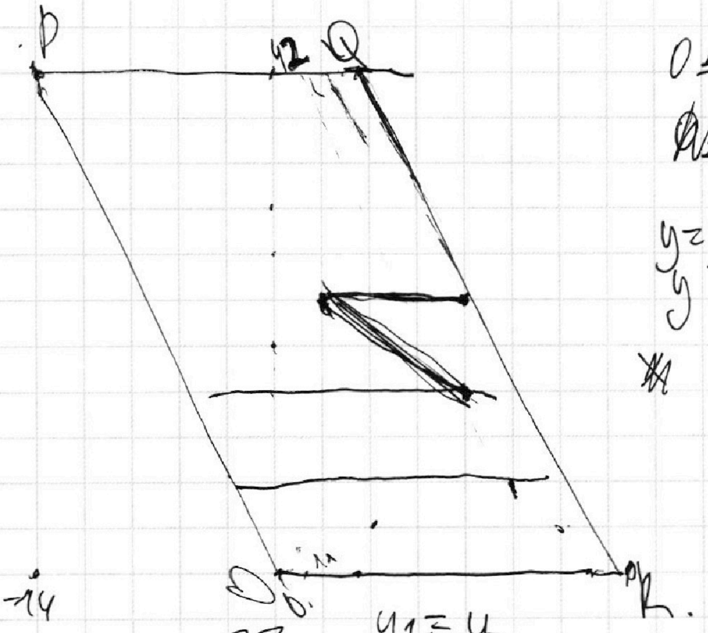
$y_1 = y_3$

$\log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y}$

5

$3(x_1; y_1)$

$f(-z) = -2z^5 - 16z + 7 = -(2z^5 + 16 - 7) = -g(z)$



$0 \le y \le 42$

$-14 \le 20.$

$y=42$

$y=0.$

$42 = -14x + b$

$y = -3x$

$y = -3x + 60$

37.

$y_1 = y_3.$

$33 + 3x_1 + y_1 = 3x_2 + y$

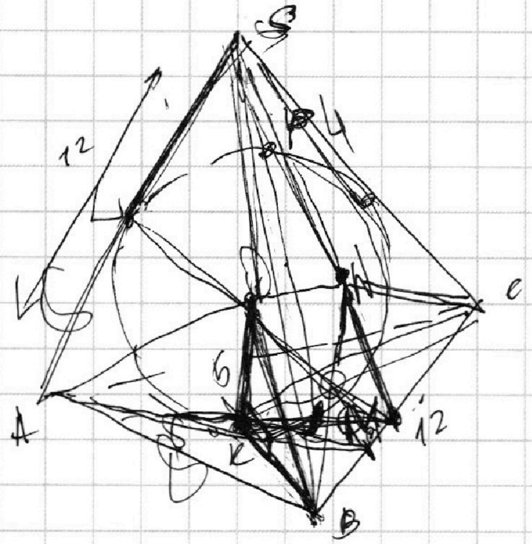
$x \begin{cases} y \le 42 \\ y \ge 0 \\ y \ge -3x \\ y \le -3x + 60 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

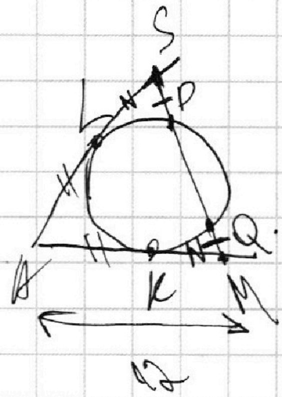
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

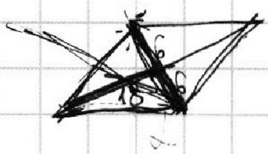


$AC = 6\sqrt{10+\sqrt{11}}$

$AB = 6\sqrt{10-\sqrt{11}}$



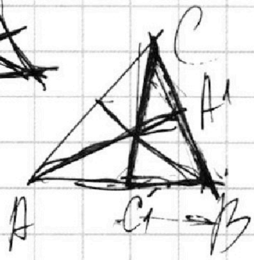
$AA_1 = 18$



$18 \cdot \sin\alpha \cdot 6 = 90$

$\sin\alpha = \frac{5}{6}$

$2\frac{\sqrt{11}}{4}$



$1 - \frac{25}{36}$

$\left(3 + \frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2$

$9 + \sqrt{11} + \frac{11}{36} + \frac{25}{36}$

$45 = \frac{\cancel{x + \dots}}{2} - x$

$\frac{5}{6}$

$6(10-\sqrt{11})$

$AB = 6\sqrt{10-\sqrt{11}}$

9

$\cancel{x + \dots}$

$45^2 = \cancel{\frac{\sqrt{10-\sqrt{11}}x + 6}{2}} \cdot \frac{3\sqrt{10-\sqrt{11}} + x + 12}{2}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = 2^9 3^{10} 5^{10} r$
$bc = 2^{14} 3^{13} \cdot 5^{13} m$
$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot q$.

$9+14+19 = 14+28=40$.

$(abc)^2 = 2^{32} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$ $r \cdot m \cdot q$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{-10}$.
$bc = 2^{14} \cdot 3^{13}$.
$ca =$

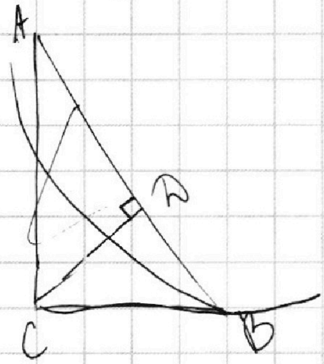
$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} 5^{30}$

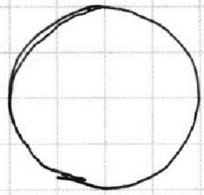
$2^{19} 3^{18} 5^{-30}$

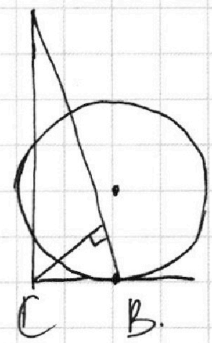
$b = 2^2 \cdot 3^3$
$a = 2^7 \cdot 3^7 5^{7}$
$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$.

$b =$

№2.



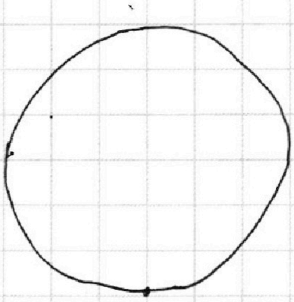


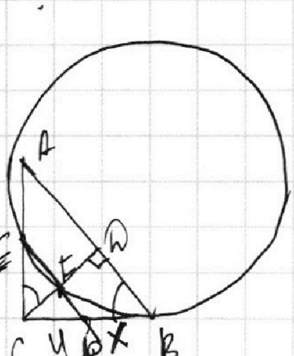


$FP = \frac{y}{2}$.

$\angle B = 60°$.

$EP = 2y$.





$AD = \frac{AC^2}{AB}$

$DB = \frac{CB^2}{AB}$

$\left(\frac{AC}{CB}\right)^2 = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$

$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \le \frac{\pi}{2} \\ 5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\pi \le -x + 2\pi k \le 0 \\ \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le -x + 2\pi k \le 0 \\ 2\pi + 10\pi k = 6x \end{cases}$$

$x = \frac{2\pi(1+5k)}{6}.$

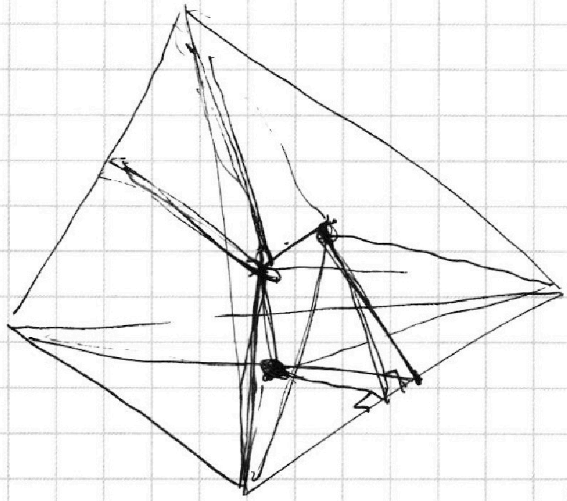
$-\frac{\pi}{2} \le -\frac{2\pi(1+5k)}{6} + 2\pi k \le 0$

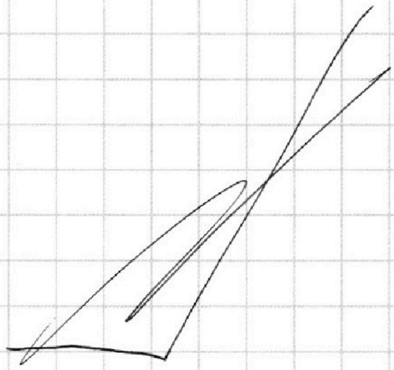
$-3\pi \le -2\pi - 10\pi k + 12\pi k \le 0$

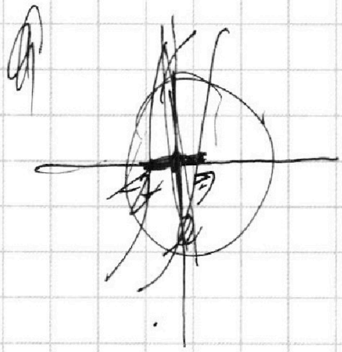
$-\pi \le 2\pi k \le 2\pi.$

$-\frac{1}{2} \le k \le 1$

$0; 1.$







$ax+2y+6$.

log $x>0$
$y>0$.

$\frac{2\pi-3\pi}{6}$.

$2\pi\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ