



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



✖ [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .

✖ [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

✖ [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.

✖ [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

✖ [4 балла] Решите систему уравнений

$$f(x) = f(y) \rightarrow x = y$$



$$\begin{cases} x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

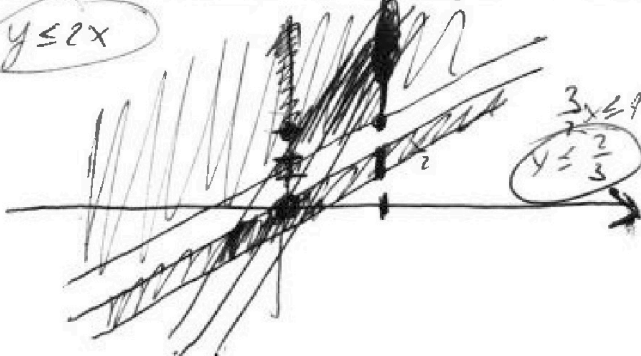
$$f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$$

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

✖ [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

✖ [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.

$$\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x - y \leq 1 \\ y \geq 2x - 1 \\ y \geq 2x \\ y \geq 2x + 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x - 2y \leq 2 \\ y \geq \frac{x-2}{2} = \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый элемент прогрессии — a , а
разность прогрессии — b .

$$(1) a + b \cdot 3 = 6 - 9x$$

$$(2) a + b \cdot 5 = (x^2 - 2x)^2$$

$$(3) a + b \cdot 9 = 9x^2$$

n -ый элемент прогрессии —
 $a + b(n-1)$

Вычитаем из (2) — (1):

$$2b = (x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x \Rightarrow 4b = 2(x^2 - 2x)^2 - 12 + 18x$$

Вычитаем из (3) — (2):

$$4b = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$\Rightarrow 4b = 2(x^2 - 2x)^2 - 12 + 18x = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$3(x^2 - 2x)^2 = 3x^2 - 6x + 4$$

$$(x^2 - 2x)^2 = 3x^2 - 6x + 4$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-1)^2(x^2-2x-4)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ x=1+\sqrt{5} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$x^2-2x-4=0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{5} \quad x_2 = 1 + \sqrt{5} \quad \text{Все три корня} \\ \text{подходят}$$

Ответ: $1 - \sqrt{5}$; 1 ; $1 + \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

1) $x \geq 0$

a) $y \in (-\infty, \frac{x}{2}]$

$x-2y \geq 0$, т.к. $y \leq \frac{x}{2}$

~~2x-y \geq 0~~ $2x-y \geq 0$, т.к. $y \leq \frac{x}{2} \leq 2x$

$$\begin{cases} x-2y \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} - 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow y \geq 2x - 1$$

~~2x-1 \leq y \leq \frac{x}{2}~~

~~2x-1 \leq \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} \geq 2x-1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}~~

~~$2x-1 \leq y \leq \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} \geq 2x-1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$~~

~~$3y+6x \leq \frac{3x}{2}+6x = \frac{15x}{2} \leq 5$~~

a) $y \in (\frac{x}{2}; 2x)$

$x-2y < 0$, т.к. $y > \frac{x}{2}$

$2x-y > 0$, т.к. $y < 2x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$$

$$2x - 1 \leq y \leq \frac{x}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} 3y + 6x &\leq 3 \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) + 6x = \\ &= \frac{15x}{2} + 3 \leq 13 \end{aligned}$$

$$y \in [2x, \infty)$$

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ y - 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &\leq 0 \\ 2x - y &\leq 0 \\ \Leftrightarrow y &\geq 2x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{2} + 1$$

$$2x \leq y \leq \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3x}{2} \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3y + 6x \leq 3\left(\frac{x}{2} + 1\right) + 6x = \frac{15x}{2} + 3 \leq 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad x < 0$$

$$a) \quad y \in (-\infty; 2x]$$

~~Или~~ $x - 2y \geq 0$, и.к.

$$y \leq 2x \leq \frac{x}{2}$$

$$2x - y \geq 0 \text{ и.к. } y \leq 2x$$

$$\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} - 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{2} - 1$$

$$\frac{x}{2} - 1 \leq y \leq 2x \Rightarrow \frac{3}{2}x \geq -1$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

$$3y + 6x \leq 6x + 6x = 12x \leq 0$$

$$b) \quad y \in \left(2x; \frac{x}{2}\right)$$

$$3y + 6x < \frac{3x}{2} + 6x = \frac{15x}{2} < 0$$

$$b) \quad y \in \left[\frac{x}{2}; \infty\right)$$

$$x - 2y \leq 0, \text{ и.к. } y \geq \frac{x}{2}$$

$$2x - y \leq 0, \text{ и.к. } y \geq \frac{x}{2} \geq 2x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ y - 2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y \leq 2x + 1$$

$$\begin{aligned} \cancel{3y} \cdot 3y + 6x &\leq 3(2x + 1) + 6x = \\ &= 12x + 3 \leq 3, \text{ т.к. } x \leq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3y + 6x \leq \boxed{13}$$

~~при~~

$$\text{при } y = \frac{5}{3}, x = \frac{4}{3}$$

$$3y + 6x = \underline{13}$$

$$|x - 2y| = \left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = 2$$

$$\Rightarrow |x - 2y| \leq 2$$

$$|2x - y| = \left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| = 1$$

$$\Rightarrow |2x - y| \leq 1 \quad (\checkmark)$$

Ответ: 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = 11p^2 \quad B = 75q^2 \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11p^2 \quad (1)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = 75q^2 \quad (2)$$

$$mn(m + 2n + 9) = 75q^2 = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$$

$$\begin{aligned} A &= m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = \\ &= m(m-7) + 2(2mn - 7n + 2n^2) \quad \div 2 \\ &\quad \div 2 \quad \quad \quad \div 2 \end{aligned}$$

(м.к. либо $m \div 2$,
либо $m-7 \div 2$)

$$A = 11p^2 \quad \div 2$$

$\Rightarrow p = 2$, ведь иначе

p -нечётное, тогда $A = 11p^2$
нечётно.

$$\begin{aligned} A &= (m+2n)^2 - 7(m+2n) = \\ &= (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 = 11 \cdot 4 = 44 \end{aligned}$$

$$m+2n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m+2n-7 \in \mathbb{N}$$

$$t = m+2n \quad t^2 - 7t - 44 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 144}}{2} = \frac{7 \pm 15}{2} \quad t_1 = 11$$

$$t_2 = -4 \quad \text{нечетн. корень (м.к. } \notin \mathbb{N})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow t = 11 = m + 2n$$

$$\Rightarrow B = 75q^2 = mn(11+q) = 20mn$$

$$\Rightarrow 15q^2 = 4mn$$

$$\Rightarrow q = 2, \text{ так как } q - \text{нечётное} \Rightarrow 15q^2 - \text{нечётное}$$

$$15 \cdot 4 = 4mn \Rightarrow mn = 15$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (m+2n)^2 - 8mn &= 11^2 - 8 \cdot 15 = \\ &= 121 - 120 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m+2n)^2 - 8mn &= m^2 + 4n^2 + 4mn - 8mn = \\ &= m^2 + 4n^2 - 4mn = (m-2n)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$1) \quad m - 2n = 1 \quad m + 2n = 11$$

$$\Rightarrow 2m = 12 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow n = 2,5 \quad (\otimes), \text{ т.к. } m, n \in \mathbb{N}$$

$$2) \quad m - 2n = -1 \quad m + 2n = 11$$

$$\Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow n = 3 \quad (\checkmark)$$

$$A = 44 = 11 \cdot 2^2$$

$$B = 300 = 75 \cdot 2^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad A = 75q^2 \quad B = 11p^2$$

$$A = m(m-7) + 2(2mn - 7n + 2n^2) : 2$$

$$A = 75q^2 : 2 \Rightarrow q = 2, \text{ иначе } 75q^2 \text{ - нечётное}$$

$$\Rightarrow A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = 300$$

$$t = m+2n \quad t \in \mathbb{N}, \text{ т.к. } m, n \in \mathbb{N}$$

$$t^2 - 7t - 300 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 300}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1249}}{2}$$

$$35^2 < 1249 < 36^2$$

$$35^2 = (30+5)^2 = 900 + 25 + 300 = 1225$$

$$36^2 = (30+6)^2 = 900 + 36 + 360 = 1296$$

$$\Rightarrow \sqrt{1249} \notin \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow t \notin \mathbb{Z} \quad (\text{X}); \text{ т.к. } t \in \mathbb{N}.$$

Противоречие

Ответ: $m = 5; n = 3$.

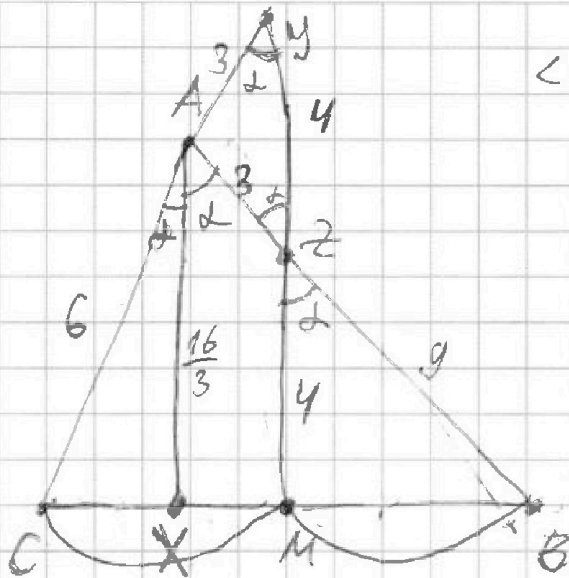


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle CA X = \angle BA X = \alpha$$

$$\angle AY M = \angle CA X, \text{ м.к.}$$

$$AX \parallel YM$$

$$\Rightarrow \angle AY M = \alpha$$

$$\angle AZ Y = \angle BA X, \text{ м.к.}$$

$$AX \parallel YM$$

$$\Rightarrow \angle AZ Y = \alpha$$

$$\Rightarrow \triangle AY Z - \text{р/б, м.к. } \angle AZ Y = \angle AY Z = \alpha$$

$$\Rightarrow AY = AZ = 3$$

По теореме Менелая для $\triangle ABC$

и прямой YM : M - середина BC

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

$$\Rightarrow CM = MB$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{MB} = 1$$

$$1 \cdot \frac{BZ}{8} \cdot \frac{3}{9} = 1 \Rightarrow BZ = 9$$

По теореме Менелая для $\triangle CYM$ и

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YM}{ZM} \cdot \frac{MB}{CB} = 1$$

$$(CB = 2MB \Rightarrow) \frac{MB}{CB} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x = \frac{5 + \sqrt{56}}{2} - \text{подкорним.}$$

$$0 < \frac{5 + \sqrt{56}}{2} < 7$$

$$\text{и.к. } 5 + \sqrt{56} < 14 \Leftrightarrow \sqrt{56} < 9$$

$$\Leftrightarrow 56 < 81 \quad \textcircled{\checkmark}$$

2) $\sqrt{14 + 5x - x^2} = 4$ возведем обе
части в квадраты

$$14 + 5x - x^2 = 16$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

~~уравнение~~ $y = x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} - \text{подкорним.}$

$$0 < \frac{5 - \sqrt{17}}{2} < 7$$

$$5 - \sqrt{17} > 0, \text{ и.к. } 25 > 17 \quad \textcircled{\checkmark}$$

$$5 - \sqrt{17} < 14, \text{ и.к. } \sqrt{17} > -9 \quad \textcircled{\checkmark}$$

$$y = x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} - \text{подкорним.}$$

$$0 < \frac{5 + \sqrt{17}}{2} < 7 \quad 5 + \sqrt{17} < 14, \text{ и.к. } 17 < 81.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \\ & x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \\ & x, y \geq 0 \quad y \in [0, 7] \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$$

Заметим, что $f(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$, т.к.

$$f'(x) = 3x^2 + 3 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 3x^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \text{ при } x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y, \text{ т.к.}$$

$f(x)$ - монотонно возрастает при $x > 0$
 $y = x$

~~$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} - 7$~~

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{14+5x-x^2} - 7$$

Возведем обе части в квадраты

$$\left(x^3 + 3x + \sqrt{2x} = x^3 + 3x + \sqrt{2x} \right)$$

$$\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} \right)^2 = \left(2\sqrt{14+5x-x^2} - 7 \right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\left(\frac{5 + \sqrt{56}}{2}, \frac{5 + \sqrt{56}}{2} \right);$
 $\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right); \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right).$

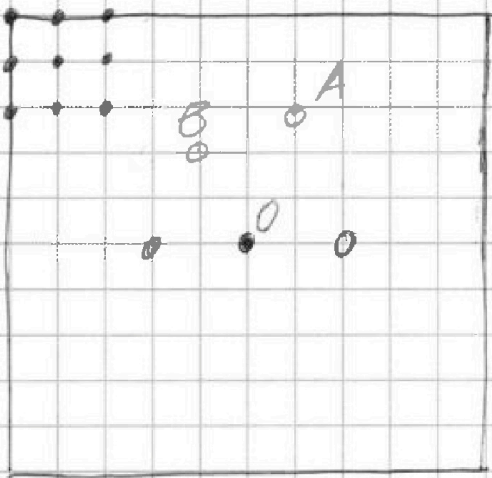


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



10

Ответ: 1850.
Назовем центр квадрата
точкой O . Точки
пересечения углов - это A и B .
10 Сделаем, что радиусы,
в которых A и B
симметричны относи-
тельно почти O при

поворота на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

(по часовой) дают ровно 2 взаимно
различные раскладки (это различные
квадрата до его поворота), и если

A и B не симметричны относительно

O , то при повороте на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

дают ровно 4 взаимно различные
раскладки. \Rightarrow Общее кол-во различных

раскладок равно: количество взаимно

различных раскладок, где A и B

симметричны относительно O , деленное

(раскладки, где A и B симметричны относительно O - I тип,
а остальные раскладки - II тип)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

на 2 илюе как во углах ромба разности
раскрасок, где А и В не симметричны
относительно О, ^(здесь это у) укажите на 4.

Заметим, что для каждой точки
квадрата кроме О есть ровно
одна, симметричная ей относительно

О. $\Rightarrow X = \frac{120}{2} = 60$, т.к. каждая
точка раскрашена будет по крайней
дважды.

$$y = \binom{2}{121} - 60 = \frac{121 \cdot 120}{2} - 60 = 121 \cdot 60 - 60 = 120 \cdot 60$$

$$\Rightarrow S = \frac{X}{2} \cdot \frac{y}{4} = \frac{60}{2} + \frac{120 \cdot 60}{4} = 30 + 1800 = \boxed{1830}$$

Итого как во разности раскрасок.

Заметим, что все попарные раскраски
различны, т.к. раскраски I и II типа
различны, ведь в I типе А и В - симметричны
относительно О, а во II - нет, поэтому I и II
типа также различны, так как не попарно
друга из друга попарно \Rightarrow все раскраски различны.

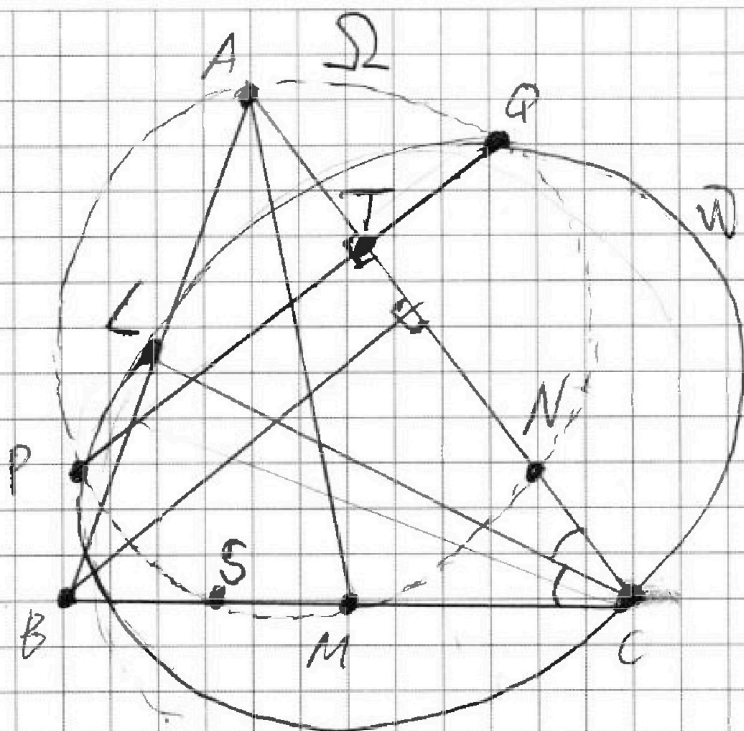


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB=4 \quad AN=5$$

$$(AQ) \cap (PQ) = T$$

$$(BC) \cap \Omega = S$$

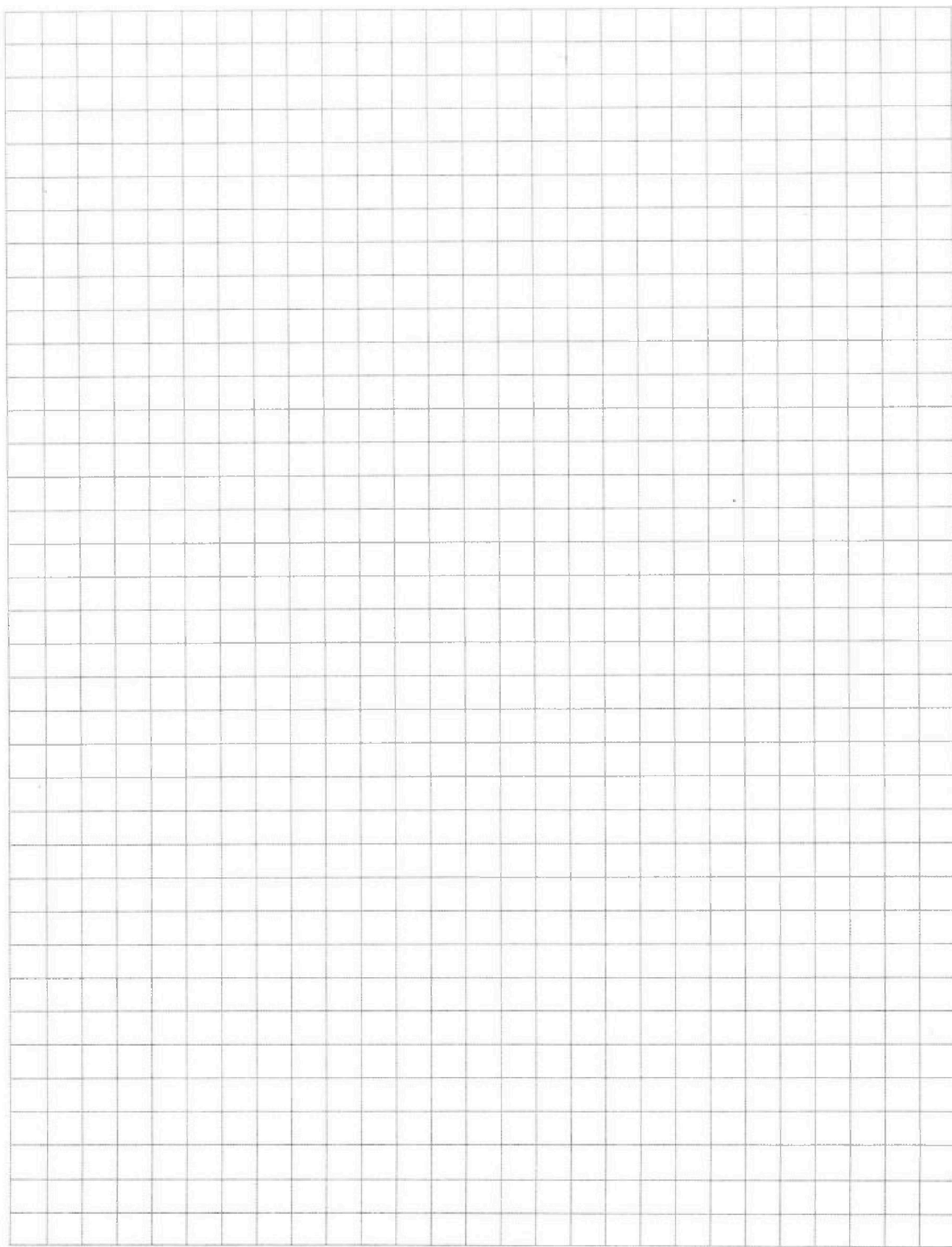


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = g(x)$$

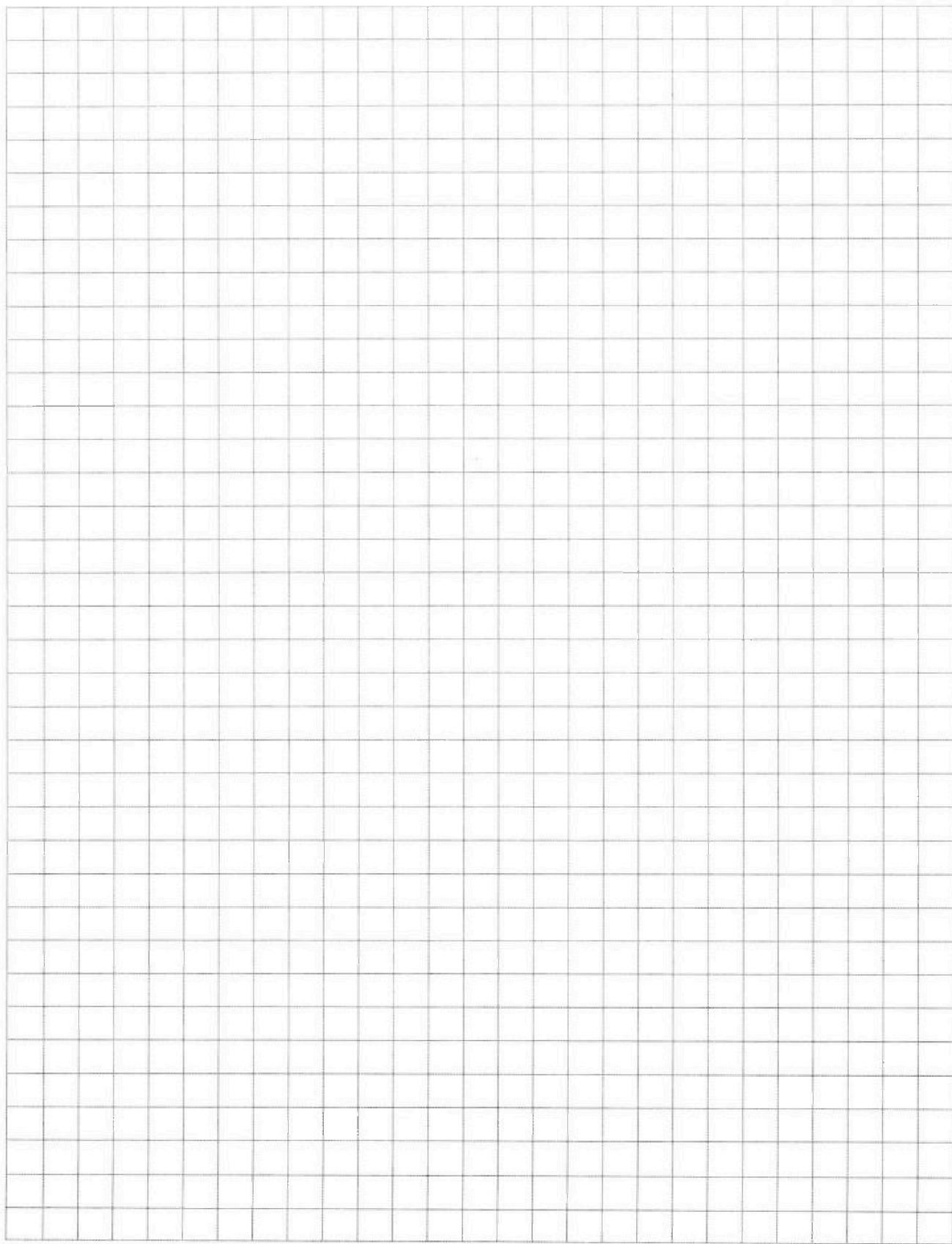


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{4}{z_M} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\angle MZB = \angle AZY = \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{4}{z_M} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow z_M = 4$$

$\triangle ABX \sim \triangle ZBM$, т.к. $\angle XAB = \angle MZB = \alpha$,
 $\angle ABX$ - общий.

$$\Rightarrow \frac{BZ}{BA} = \frac{z_M}{AX} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{4}{AX}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{4 \cdot 12}{4} = \frac{16}{3}$$

По теореме косинусов:

$$CX^2 = 6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{16}{3} \cdot \cos \alpha$$

$$XB^2 = 12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} \cdot \cos \alpha$$

AX - биссектриса $\Rightarrow \frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Пусть $CX = x$, $BX = 2x$ ($x > 0$)

$$BC = CX + BX = 3x$$

$$x^2 = 6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{16}{3} \cos \alpha$$

$$4x^2 = 12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} \cos \alpha = 12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4x^2 = 2 \left(6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - x^2 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4x^2 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 144 - 72 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = 72 - \left(\frac{16}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 72 - \frac{256}{9} = \frac{648 - 256}{9} = \frac{392}{9}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{196}{9} \Rightarrow x = \frac{14}{3} \text{ (и.к. } x > 0)$$

$$BC = 3x = 3 \cdot \frac{14}{3} = \boxed{14}$$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \underline{x+2} - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} + \underline{7-x} =$$

$$= 4(14+5x-x^2) - 28\sqrt{14+5x-x^2} + 49$$

~~####~~ $t = \sqrt{14+5x-x^2} \quad t \geq 0$

$$4t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$\Rightarrow 2(2t^2 - 13t + 20) = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 2 \cdot 20}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{5}{2} \quad \checkmark \quad t_2 = 4 \quad \checkmark$$

$$1) \sqrt{14+5x-x^2} = \frac{5}{2} \quad \text{возведем обе части в квадраты}$$

$$\Rightarrow 14+5x-x^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - \frac{31}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot \frac{31}{4}}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{56}}{2} \quad \text{####}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{56}}{2} \quad \text{используем корень } (x \geq 0)$$

~~####~~

$$y_1 = x_1 = \frac{5 + \sqrt{56}}{2} \quad \checkmark$$