



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



- [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
- [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
- [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
- [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

За B : будем обозначать i -тый член прогрессии. Тогда мы можем записать следующие тождества:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_3 + B_5}{2} = B_4 \\ \frac{B_3 + B_9}{2} = B_6 \Rightarrow \frac{\frac{B_3 + B_5}{2} + \frac{B_3 + B_9}{2}}{2} = B_5 \\ \frac{B_4 \cdot B_6}{2} = B_5 \end{array} \right.$$

Теперь подставим вместо B_3, B_5, B_9 , выражения из условия, но сперва приведём уравнение к удобному виду:

$$2B_5 = \frac{2B_3 + B_5 + B_9}{2}$$

$$4B_5 = 2B_3 + B_5 + B_9$$

$$3B_5 = 2B_3 + B_9$$

$$3(x^2 + 2x)^2 = 2(3x + 3) + 3x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 12x^2 = 6x + 6 + 3x^2 \quad | : 3$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Разложим на множители:

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

Теперь приравняем скобки к нулю и найдём возможные x .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+1=0$$

$$x = -1$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$x_1 = \frac{\pm \sqrt{12} - 2}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{3} - 2}{2} = \pm \sqrt{3} - 1$$

Значит, $x_1 = -\sqrt{3} - 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \sqrt{3} - 1$

Ответ: возможно 3 значения x : $x_1 = -\sqrt{3} - 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \sqrt{3} - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 & (1) \\ |3x - y| \leq 1 & (2) \end{cases}$$

Давайте возьмём (2) и вычтем из него 3 раза (1).

Получим:

$$-8x - 8y \leq -8$$

$$y \leq -1$$

Делаем также, но только берём (1) и вычтем из него (2):

$$-3x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

Значит в итоге:

$$4y + 8x \leq 4 \cdot (-1) + 8 \cdot (0) = -4$$

и

$$4y + 8x \leq -4 \Rightarrow \max(4y + 8x) = -4$$

Ответ: -4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Т.к. p и q — простые, то числа $13p^2$ и $75q^2$ — нечётные.

Выготи, когда p или $q = 2$ рассмотрим позже. Тогда:

$(m+n)(m+n-9)$ — нечёт

$mn(m+n-3)$ — нечёт

Теперь рассмотрим 3 случая:

1) m, n — чётные. Тогда $(m+n)$ — чётное и $(m+n-9)$ — нечётное, но в итоге $(m+n)(m+n-9)$ — чётное.

$m \cdot n$ — чётное, $(m+n-3)$ — нечётное, но в итоге $mn(m+n-3)$ — чётное

2) m, n — нечётные. Тогда $(m+n)$ — чётное $\Rightarrow (m+n)(m+n-9)$ — чётное. $m \cdot n$ — нечётное, $(m+n-3)$ — нечётное. В итоге получаем $mn(m+n-3)$ — нечётное

3) одно чётное, одно нечётное. Тогда $(m+n-9)$ — чётное $\Rightarrow (m+n)(m+n-9)$ — чётное. $(m+n-3)$ — чётное $\Rightarrow mn(m+n-3)$ — чётное



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из логических утверждений, приведённых ранее, видим, что $(m+n)(m+n-9)$ — всегда чётное \Rightarrow есть два варианта:
либо $(m+n)(m+n-9) = 52$, либо $(m+n)(m+n-9) = 300$

Смотрим первый случай:

$$(m+n)(m+n-9) = 52$$

$$52 = 26 \cdot 2$$

$$2 \cdot 26$$

$$52 \cdot 1$$

$$1 \cdot 52$$

$$13 \cdot 4$$

$$4 \cdot 13$$

Отрицательные не берём, т.к. m, n — натуральные числа. И также числа $m+n$ и $m+n-9$ — разной четности. Поэтому варианты $26 \cdot 2$ и $2 \cdot 26$ — отпадают. Смотрим оставшиеся:

$$\begin{cases} m+n=26 \\ m+n-9=1 \end{cases} - \text{нет корней, т.к. } 26-9 \neq 1$$

$$\begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=52 \end{cases} - \text{нет корней, т.к. } 1-9 \neq 52$$

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=4 \end{cases}$$

$$m=13-n$$

$$13-n+n-9=4$$

m, n — любая пара натуральных чисел, дающих в сумме 13

$$\begin{cases} m+n=4 \\ m+n-9=13 \end{cases} - \text{нет корней, т.к. } 4-9 \neq 13$$

Итак, в первом случае получим единственное решение:

$m+n=13$, $m, n \in \mathbb{N}$. Теперь переберём m и n , подставляя во второе

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рое выражение и найдем удобоваримые пары:

$$1 \cdot 12 \cdot (1+12-3) = 120 \neq 75$$

$$2 \cdot 11 \cdot 10 = 220 \neq 75$$

$$3 \cdot 10 \cdot 10 = 300 : 75 \quad \frac{300}{75} = 4 \quad \sqrt{4} = 2 - \text{простое} \Rightarrow (3; 10) - \text{подходит}$$

$$4 \cdot 9 \cdot 10 = 360 \neq 75$$

$$5 \cdot 8 \cdot 10 = 400 \neq 75$$

$$6 \cdot 7 \cdot 10 = 420 \neq 75$$

Итого, в первом случае мы имеем только пару $(3; 10)$ и $(10; 3)$

Теперь второй случай

$$(m+n)(m+n-9) = 300$$

$$300 = 300 \cdot 1$$

$$1 \cdot 300$$

$$\times 150 \cdot 2$$

$$\times 2 \cdot 150$$

$$100 \cdot 3$$

$$3 \cdot 100$$

$$75 \cdot 4$$

$$4 \cdot 75$$

$$60 \cdot 5$$

$$5 \cdot 60$$

$$\times 50 \cdot 6$$

$$\times 6 \cdot 50$$

$$\times 30 \cdot 10$$

$$\times 10 \cdot 30$$

$$20 \cdot 15$$

$$15 \cdot 20$$

Аналогично первому варианту (случая), отмечаем пары одинаковой чётности, они отмечены крестиком. Это также разность чисел должна быть равна 9. Этаких чисел мы не наблюдаем.
Значит у нас только две пары: $(10; 3)$ и $(3; 10)$

Ответ: $(10; 3)$, $(3; 10)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

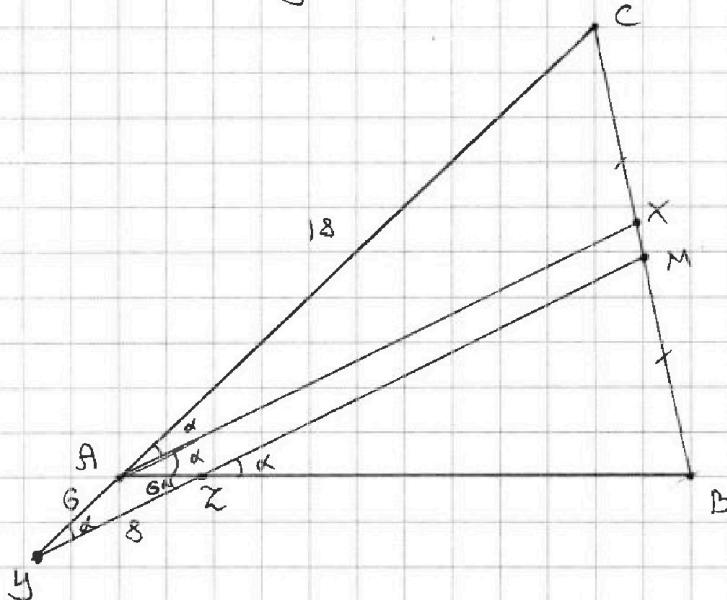
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 4

Для начала, сделаем калественный чертёж:



Обозначим $\angle CXA = \angle XAB = \alpha$. Тогда в силу $AX \parallel YM$, имеем $\angle MZB = \alpha \Rightarrow \angle AZY = \alpha$ (п.к. Вертикальный с $\angle MZB$)

$\angle CYZ = \alpha$ (п.к. соответственный с $\angle CXA = \alpha$ при параллельном проекции AX и YM и секущей YC). $\Rightarrow \triangle YAZ - p/\delta$

п.к. $\angle AZY = \angle YAZ = \alpha \Rightarrow \angle Y = \angle Z = 6$

Рассмотрим $\triangle YCM$ и $\triangle ACX$:

1) $\angle C$ - общий

2) $\angle CYM = \angle CXA$ (ранее доказали)

$$\text{Приём } k = \frac{AY}{CY} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \triangle YCM \sim \triangle ACX$
(по двум углам)

Теперь найдём $\cos \alpha$ по теореме косинусов для $\triangle YAZ$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$36 = 100 - 96 \cdot \cos \alpha$$

!!

$$\cos \alpha = \frac{100 - 36}{96} = \frac{64}{96} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Далее напишем две теоремы косинусов для $\triangle CYM$ и $\triangle CXM$, учитывая, что $CX = \frac{3}{4} CM$, $MY = \frac{3}{4} MU$:

$$\begin{cases} CM^2 = 24^2 + MY^2 - 2 \cdot 24 \cdot MY \cdot \cos \alpha \\ \frac{9}{16} CM^2 = 18^2 + \frac{9}{16} MY^2 - 2 \cdot 18 \cdot \frac{3}{4} MY \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Подставим $\cos \alpha = \frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} CM^2 = 576 + MY^2 - 32 MY \\ \frac{9}{16} CM^2 = 324 + \frac{9}{16} MY^2 - 18 MY \end{cases}$$

Заменим CM на x , а MY на y для удобства:

$$\begin{cases} x^2 = 576 + y^2 - 32y \quad | \cdot \frac{9}{16} \quad ① \\ \frac{9}{16} x^2 = 324 + \frac{9}{16} y^2 - 18y \quad ② \end{cases}$$

$$\frac{9}{16} x^2 = 324 + \frac{9}{16} y^2 - 18y$$

Как видим, уравнения равносильны, поэтому будем

① и заполнили. Я написал лишнего, но это не повлияет на ход решения.

Теперь рассмотрим $\triangle XBY$ и $\triangle XBA$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $\angle XBA$ - общий

2) $\angle BZM = \angle BZX$ (В силу $AX \parallel MY$, соответственные углы)

У

$\triangle MBZ \sim \triangle XBX$

$$\text{Причём } k = \frac{XB}{MB} = \frac{CM + XM}{CM} = 1 + \frac{XM}{CM} = 1 + \frac{\frac{1}{4}CM}{CM} = \frac{5}{4}$$

($MB = CM$, т.к. YM - медиана)

Найдём BZ :

$$\frac{5}{4}BZ - BZ = 6$$

или

$$BZ = 24$$

Теперь напишем теорему косинусов для $\triangle MZB$, учитывая что $CM = MB = x$, $MZ = \frac{3}{5}MY = \frac{3}{5}y$ ($\frac{3}{4}MY : \frac{5}{4}$):

$$x^2 = 576 + \frac{9}{25}y^2 - 2 \cdot 24 \cdot \frac{3}{5}y \cdot \cos\alpha$$

$$x^2 = 576 + \frac{9}{25}y^2 - \frac{96}{5}y$$

Вспомним ①:

$$x^2 = 576 + y^2 - 32y$$

Берём в систему:

$$\begin{cases} x^2 - 576 = \frac{9}{25}y^2 - \frac{96}{5}y \\ x^2 - 576 = y^2 - 32y \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
Ч ИЗ Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9}{25}y^2 - \frac{36}{5}y = y^2 - 32y$$

$$\frac{16}{25}y^2 = \frac{64}{5}y$$

$$\frac{16}{25}y = \frac{64}{5}$$

$$y = \frac{64}{5} \cdot \frac{25}{46} = 20$$

$$x^2 = 576 + 20^2 - 32 \cdot 20 = 576 + 400 - 640 = 336$$

$$x = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$$

$$CM = 4\sqrt{21}$$

$$BC = CM \cdot 2 = 8\sqrt{21} \text{ (m.k. AM - медиана)}$$

$$\text{Объем: } BC = 8\sqrt{21}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 + 5y^2 - \sqrt{x} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 + 5y^2 - \sqrt{x} \end{array} \right. \quad (2)$$

Для начала поработаем со (2) уравнением:

$$(x^4 - y^4) + (5x^2 - 5y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(x-y) + 5(x+y)(x-y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 \right) = 0$$

Т.к. в условии задачи есть \sqrt{x} и \sqrt{y} , то $x, y \geq 0$.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

либо правая часть равна 0.

$$x = y$$

Но правая часть больше либо равна нулю, а равенство достигается только при $x = y \geq 0$. Тем самым, что получили, что $x = y$. Теперь перенесем (1), с учётом этого

20:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

Пусть $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t$. Тогда:

$$t+5 = 7 - t^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{\pm 3 - 1}{2}$$

$$t_1 = -2, \quad t_2 = 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \quad \uparrow^2$$

$$7 - 2\sqrt{6+5x-x^2} = 4$$

$$2\sqrt{6+5x-x^2} = 3 \quad \uparrow^2$$

$$4(6+5x-x^2) = 9$$

$$24+20x-4x^2 = 9$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$\Delta = 400 + 4 \cdot 4 \cdot 15 = 400 + 240 = 640$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm 8\sqrt{10} + 20}{8} = \pm \sqrt{10} + \frac{5}{2}$$

$x = -\sqrt{10} + \frac{5}{2}$ — не подходит, т.к. < 0

$x = \sqrt{10} + \frac{5}{2}$ — подходит, т.к.:

$$6 > \sqrt{10} + \frac{5}{2}$$

$$3,5 > \sqrt{10}$$

$$12,25 > 10$$

$$12,25 > 10 \Rightarrow 6 > \sqrt{10} + \frac{5}{2} \Rightarrow 6 - x > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте креcтиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \quad \uparrow^2$$

$$7 - 2\sqrt{6+5x-x^2} = 1$$

$$2\sqrt{6+5x-x^2} = 6$$

$$\sqrt{6+5x-x^2} = 3 \quad \uparrow^2$$

$$6+5x-x^2=9$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 3 = 13$$

$$x_{24} = \frac{\pm \sqrt{13} + 5}{2}$$

$$\frac{\sqrt{13} + 5}{2} \sqrt{6}$$

$$\sqrt{13} < 5$$

и

$$\sqrt{13} + 5 \sqrt{12}$$

$$-\frac{\sqrt{13} + 5}{2} > 0$$

$$\sqrt{13} \sqrt{7}$$

$$\sqrt{13} < 7 \Rightarrow 6 - \frac{\sqrt{13} + 5}{2} > 0$$

Значит $x_{24} = \frac{\pm \sqrt{13} + 5}{2}$ — подходит.

Но как, мы писали все x , чтобы дать ответ, припишем

и пишем такие же y :

$$\text{Ответ: } \left(\sqrt{10} + \frac{5}{2}, \sqrt{10} + \frac{5}{2} \right); \left(\frac{-\sqrt{13} + 5}{2}, \frac{-\sqrt{13} + 5}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{13} + 5}{2}, \frac{\sqrt{13} + 5}{2} \right)$$

$$\frac{\sqrt{13} + 5}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6

Всего мы имеем 81 покрашенный в чёрный цвет узел. Выбрать два узла из 81, это C_{81}^2 , это равно:

$$C_{81}^2 = \frac{81!}{2! \cdot 79!} = 40 \cdot 81$$

Хотешь бы сказать, что получившее число нужно поделить на 4, т.к. одному варианту соответствует 4 покраски, т.к. можно поворачивать лист, но есть один нюанс. Покраски, симметричные относительно центра доски, получаются не 4-мя вариантами, а двумя (это возможно, т.к. после второго поворота, покрашенные узлы просто поменяются местами). Посчитаем кол-во вариантов. Выбрать симметричные относительно центра узлы. Таких вариантов — 80 (центральный узел исключаем). Значит способов выбрать несимметричные — $40 \cdot 81 - 80$.

Вариантов выбрать симметричные 80, т.к. выбрав один, второй определяется однозначно. Значит итоговое кол-во вариантов равно:

$$\frac{40 \cdot 81 - 80}{4} + \frac{80}{2} = 10 \cdot 81 - 20 + 40 = 810 - 20 + 40 = 830 \text{ способов}$$

Ответ: 830 способов.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$3x + 3$$

$$(x^2 + 2x)^2$$

$$3x^2$$

$$x \quad x+6 \quad \underline{x+26} \quad \underline{x+36} \quad \underline{x+46} \quad \underline{x+56} \quad x+66 \quad x+76$$

$$x+26$$

•

$$\frac{B_3 + B_5}{2} = B_4$$

$$x+46$$

•

$$\frac{B_3 + B_9}{2} = B_6$$

$$x+86$$

•

$$\frac{B_4 + B_6}{2} = B_5$$

•

1281

$$\begin{array}{r} < 29 \\ - 29 \\ \hline 261 \\ - 58 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$\frac{\frac{B_3 + B_5}{2} + \frac{B_3 + B_9}{2}}{2} = B_5$$

39

$$\begin{array}{r} < 39 \\ - 39 \\ \hline 531 \\ - 295 \\ \hline 2481 \end{array}$$

$$2B_5 = \frac{B_3 + B_7}{2} + \frac{B_3 + B_9}{2}$$

$$\begin{array}{r} < 39 \\ - 39 \\ \hline 351 \\ - 117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$2B_5 = \frac{2B_3 + B_7 + B_9}{2}$$

$$3(x^4 + 4x^3 + 4x^2) = 6x + 6 + 3x^2$$

$$4B_5 = 2B_3 + B_7 + B_9$$

$$3x^4 + 12x^3 + 12x^2 = 6x + 6 + 3x^2$$

$$3B_5 = 2B_3 + B_9$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$3(x^2 + 2x)^2 = 2(3x + 3) + 3x^2$$

$$1 - 4 + 3 + 2 - 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ \underline{- x^4 + x^3} \\ \underline{3x^3 + 3x^2} \\ \underline{3x^3 + 3x^2} \\ 0 - 2x - 2 \end{array}$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = x^4 + 3x^3 - 2x + x^3 + 3x^2 - 2$$

$$(x+1)^2 (x^2 + 2x - 2)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \\ \underline{x^3 + 3x^2} \\ \underline{- 2x^2 - 2} \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ - 2x - 2 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2) = x^3 + 2x^2 - 2x + x^2 + 2x - 2$$

$$x^2 + 2x - 2 = (x+2)x$$

1,5 2 2,5

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

0 1 3

$$\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2} = 1$$

$$3(\sqrt{3}-1)+3$$

$$3\sqrt{3}$$

$$|x-3y| \leq 3$$

$$\frac{13}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{300}$$

$$\cancel{\frac{8}{2} = 1}$$

$$\sqrt{23}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3y-x \geq -3 \end{cases}$$

$$x \leq 3 + 3y$$

$$\begin{cases} 3x-y \leq 1 \\ y-3x \geq -1 \end{cases}$$

лк

$$t(t+9) = 300$$

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 300$$

1281

$$t^2 + 9t - 300 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 300 =$$

= 1281

$$\begin{array}{r} 29 \\ 29 \\ \hline 268 \\ 8 \end{array}$$



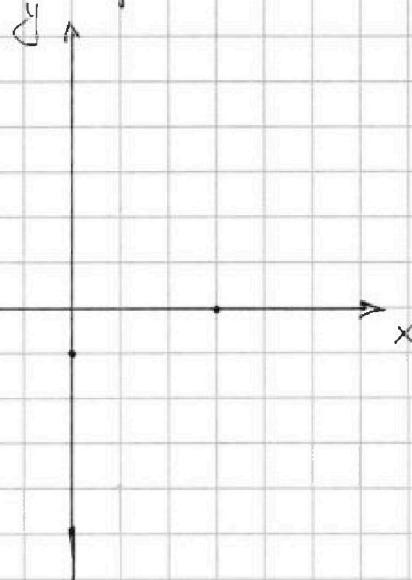
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.



$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$$

$$m^2 n + mn^2 - 3mn$$

$$(m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$\cancel{m+n} \quad \checkmark \quad mn(m+n-9)$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$m+n = 13$$

$$mn(m+n-9) = 75q^2$$

$$(13k-9) \cdot 13k$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ 25 \\ \hline 5 \end{array} \left| \begin{array}{r} 3 \\ 5 \\ \hline 5 \end{array} \right. \quad 3 \cdot 5^2$$

$$169k^2 - 137k =$$

-

$$mn(m+n-9) + 6mn = 75q^2$$

168k



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x - 3y| \leq 3$$

$$|3x - y| \leq 1$$

$$\begin{aligned} k(x - 3y) \\ n(3x - y) \end{aligned}$$

~~$$k + 3n^2 = 3m$$~~

$3k$

$$x - 3y$$

$$3x - y$$

$$2x + 2y$$

$$x - 1y$$

$$-2x + 4y \quad 8y \leq -8$$

$$x + 3y$$

$$y \leq -1$$

$$4x + 2y$$

$$7x + y$$

$$-3x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$x - 3y = 3$$

$$3x - y = 4$$

$$\begin{array}{r} 3y \\ 3x - y = 4 \\ \hline 2y = 1 \\ y = 0,5 \\ \hline 3x - 0,5 = 4 \\ 3x = 4,5 \\ x = 1,5 \end{array}$$

$$3x - 9y = 9$$

$$3x - y = 1$$

$$9 + 9y = y < 1$$

$$\begin{array}{l} 8y = -8 \\ y = -1 \\ x = 0 \end{array}$$

$$6\sqrt{50} + 2,5$$

$$9,5\sqrt{50}$$

$$1\sqrt{-50} + 2,5$$

$$1,5\sqrt{-50}$$

$$\sqrt{9} < \sqrt{50} < \sqrt{16}$$

$$3 < \sqrt{50} < 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 + \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$(x+1)(6-y) = 6x - xy + 6 - y$$

$$(x^4 - y^4) + (5x^2 - 5y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(x-y) + 5(x+y)(x-y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) +$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 \right) = 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$(x+1)(6-x) = 6x - x^2 + 6 - x = -x^2 + 5x + 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t$$

$$t \cdot 5 = 7 - t^2$$

$$t + 5 = 2 \cdot (7 - t^2)$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$x+1 + 6-x = 7 - \sqrt{\dots} = t^2$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$7 - t^2$$

$$\frac{7 - 1}{2}$$

$$t + 5 = 14 - 2t^2$$

$$1 + 4 \cdot 2 \cdot 9 = 73$$

$$2t^2 + t - 9 = 0$$

$$-2 \quad 1$$