



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14 + 5x - y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input checked="" type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} 4-\bar{u} \quad 6-9x \\ 6-\bar{u} \quad (x^2-2x)^2 \\ 10-\bar{u} \quad 9x^2 \\ x=? \end{array}$$

$$5-\bar{u} \text{ член прогрессии равен } \frac{6-9x+(x^2-2x)^2}{2} =$$

$$= \frac{6-9x+x^4-4x^3+4x^2}{2} = \frac{x^4-4x^3+4x^2-9x+6}{2}$$

Пусть прогрессия имеет вид $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{10}, \dots$

$$\text{Тогда } x_4 = x_1 + 3d \quad x_{10} = x_1 + 9d$$

$$x_5 = x_1 + 4d$$

$$x_6 = x_1 + 5d$$

$$x_6 - x_5 = d$$

$$d = (x^2-2x)^2 - \frac{x^4-4x^3+4x^2-9x+6}{2} = \frac{2(x^4-4x^3+4x^2)-x^4+4x^3-4x^2+9x-6}{2}$$

$$= \frac{2x^4-8x^3+8x^2-x^4+4x^3-4x^2+9x-6}{2} =$$

$$= \frac{x^4-4x^3+4x^2+9x-6}{2}$$

$$x_4 = x_1 + 3d$$

$$6-9x = x_1 + \frac{3}{2}(x^4-4x^3+4x^2+9x-6) \quad | \cdot 2$$

$$12-18x = 2x_1 + 3x^4-12x^3+12x^2+27x-18$$

$$2x_1 = -3x^4+12x^3-12x^2-45x+30$$

$$x_1 = \frac{-3x^4+12x^3-12x^2-45x+30}{2}$$

$$9x^2 = x_1 + 9d = \frac{-3x^4+12x^3-12x^2-45x+30}{2} + \frac{9(x^4-4x^3+4x^2+9x-6)}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$18x^2 = -3x^4 + \cancel{12x^3} - \underline{\underline{12x^5}} - 45x + 30 + \cancel{9x^4} - \cancel{36x^3} + \underline{\underline{36x^2}} + 81x - 54$$

$$6x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 36x - 24 = 0 \quad | : 6$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

Схема Горнера:

	1	-4	1	6	-4
1	1	-3	-2	4	0

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

Схема Горнера:

	1	-3	-2	4
1	1	-2	-4	0

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-2 + \sqrt{4+16}}{2} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{4+16}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} \\ x = \frac{2 - \sqrt{20}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in \{1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3y + 6x \text{ max?}$$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) x - 2y \leq 2 \\ (2) x - 2y \geq -2 \\ (3) 2x - y \leq 1 \\ (4) 2x - y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) x \leq 2y + 2 \\ (2) x \geq 2y - 2 \\ (3) y \geq 2x - 1 \\ (4) y \leq 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2(y+1) \\ x \geq 2(y-1) \\ x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

$$3y + 6x = 3(y + 2x)$$

Тогда достаточно найти максимальное значение выражения $y + 2x$

(1) ~~2y + 2x >= 0~~

$$(2) + (3) : 2y - 2 + 2x - y \leq 3 \\ x + y \leq 5$$

$$\text{Из (4): } y \leq 2x + 1 \\ 3x + 1 \leq 3 \\ 3x \leq 2 \\ x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow y \leq \frac{7}{3}$$

$$3(y + 2x) \leq 3\left(\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\right) = 11$$

Значение $3y + 6x = 11$ достигается при $x = \frac{2}{3}, y = \frac{7}{3}$.
Проверим, возможно ли такое:

$$\left|\frac{2}{3} - \frac{14}{3}\right| \leq 2 \Leftrightarrow \left|-\frac{12}{3}\right| \leq 2 \text{ - верно.}$$

~~$$1 \text{ и } 2(y-1) \geq \frac{1}{2}(y-1)$$~~

~~$$xy - 2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$~~

~~$$\frac{3}{2}y \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow y \geq 1, \text{ тогда } x \geq 0$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1 \text{ сл. } 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1)$$

$$2y+2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}y \leq \frac{1}{2}$$

$$y \leq -1$$

$$x \leq 0$$

$$3y+6x \leq -3$$

~~$$2 \text{ сл. } 2(y+1) \geq \frac{1}{2}(y+1)$$~~

~~$$2y+2 \geq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$~~

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y-1) \\ \frac{1}{2}(y+1) \leq 2(y+1) \\ \frac{1}{2}(y-1) \geq 2(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \leq 2y + 2 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \geq 2y - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq -1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ y \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$3y+6x \leq 3$$

$$\textcircled{O} \text{ при } x=1, y=1$$

$$\begin{cases} x \leq 2(y+1) \\ x \geq 2(y-1) \\ 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ 2(y-1) \geq \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [2(y-1); 2(y+1)] \\ 2y+2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ 2y-2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [2(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \\ y \geq 1 \end{cases} \rightarrow \text{такое не существует}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 3 \text{ сл. } & \left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geq 2(y-1) \\ \frac{1}{2}(y+1) \leq 2(y-1) \\ 2(y-1) \geq \frac{1}{2}(y+1) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}(y+1), 2(y-1) \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [2(y-1), \frac{1}{2}(y+1)] \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \leq 2y - 2 \\ 2y - 2 \geq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ x \in [2(y-1), \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq -1 \\ y \geq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [2(y-1), \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq 1 \end{array} \right.$$

Тогда $x \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ y \geq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - 2y| \leq 2 \xrightarrow{y \geq 1} \left| -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \right| \leq 2 \rightarrow \end{array} \right.$$

$$|1-y| \leq 1 \rightarrow |1| \leq 1 - y \forall y$$

$$3y + 6x \leq 5 + 8 = 13$$

$$3y + 6x \leq 13 \quad \text{⇒ при } y = \frac{5}{3}, x = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} 4 \text{ сл. } & \left\{ \begin{array}{l} x \leq 2(y+1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y-1) \\ 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ \frac{1}{2}(y-1) \geq 2(y-1) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ 2y + 2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \geq 2y - 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \\ y \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \end{array} \right.$$

Тогда $x \leq 0$

Тут ошибка, что $3y + 6x$
не будет max. в этом случае

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}y \geq -\frac{5}{2} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \geq 1 \\ y \leq \frac{5}{3} \end{array} \right.$$

$$x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим, возможно ли Θ :

$$\left| \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} \right| \leq 2$$

$$\left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = \left| -\frac{6}{3} \right| = \left| -2 \right| \leq 2 = 6.$$

$$\left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{3}{3} \right| = \left| 1 \right| \leq 1 = 6.$$

Итак, находящее значение выражения
 $3y + 6x$ равно 13

Ответ: 13

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m, n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{P}$$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

$$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = mn(m+2n+9)$$

$$\text{т.ч. } A = 11p^2, B = 75q^2$$

$$4. m+2n=8$$

$11p^2 = 8$ - неводи, т.к. $p \in \mathbb{P}$

и $\text{НОД}(8, 11) = 1$

$$5. m+2n=1$$

$-6 = 11p^2$ - неводи, т.к.
 $11 > 0, p^2 > 0$

Возможны следующие случаи:

Рассмотрим первое уравнение $m+2n=1, m+2n-7=11p^2$

$$(m+2n)(m+2n-7) = 11 \cdot p \cdot p \text{ и } m+2n = 11p^2, m+2n-7 = 1$$

Тогда возможна варианта 1. $m+2n=11, m+2n-7=p^2$

$$2. m+2n=p, m+2n-7=11p$$

$$3. m+2n=11p, m+2n-7=p$$

$$1. m+2n=11 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=2 \text{ - води.}$$

$$2. m+2n=p \Rightarrow p-7=11p \Rightarrow 10p=-7 \Rightarrow p<0 \text{ - не пода.}$$

$$3. m+2n=11p \Rightarrow 11p-7=p \Rightarrow 12p=7 \Rightarrow p=\frac{7}{12} \text{ - не пода.}$$

Итак, для первого уравнения возможен только случай, когда $m+2n=11$ и $p=2$.

Рассмотрим второе уравнение:

$$mn(m+2n+9)=5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

Учитем, что $m+2n=11$:

$$mn \cdot 20 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q \Rightarrow 4mn = 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

т.к. 3, 5, q - простые $\Rightarrow q \cdot q = 4 \Rightarrow q=2$

Тогда $mn=3 \cdot 5 \Rightarrow$ возможна варианта: $m=3, n=5$
 $m=5, n=3$

Проверка: $3+2 \cdot 5=13 \neq 11$ - не пода.

$$5+2 \cdot 3=5+6=11 \text{ - пода.}$$

Итак, пара $(5; 3)$ подходит.

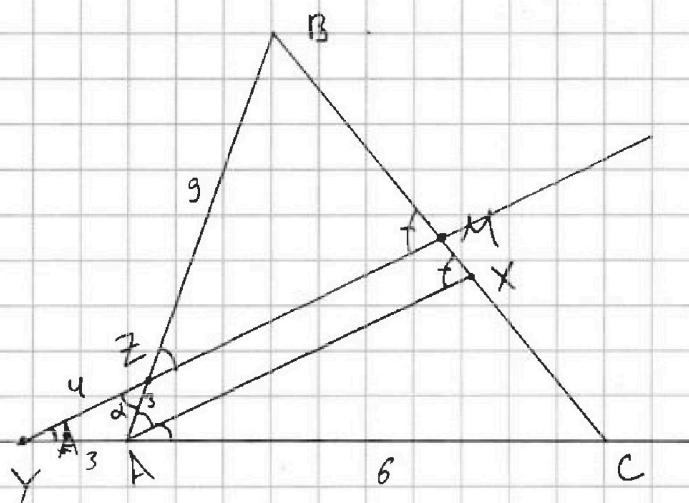


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



М - сер. ВС
AX - бисс - са
 $AC = 6$
 $AZ = 3$
 $YZ = 4$
 $BC - ?$

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \triangle ZBM \sim \triangle ABX \text{ по 2-му признаку} \Rightarrow \frac{AB}{ZB} = \frac{XB}{MB} = \frac{AX}{ZM}$$

$\triangle XCA \sim \triangle MCY$

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \angle MYC = \angle XAC = \angle BAX = \angle BZM = \angle YZA \Rightarrow \triangle YAZ - \text{пр. 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow YA = AZ = 3$$

Т. косинусов для $\triangle CBA$, прямой (YM):

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{BZ}{3} \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$$BZ = 9$$

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \triangle CXA \sim \triangle CYM \text{ по 2-му признаку} \Rightarrow \frac{CX}{CM} = \frac{CA}{CY} = \frac{XA}{YM}$$

Т. косинусов для $\triangle YAZ$ (пусть $\angle YZA = \alpha$)

$$8^2 = 16 + 9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 16$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Т. косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$BC^2 = 144 + 36 - 144 \left(2 \cdot \frac{4}{9} - 1\right)$$

1
= 128
128
128
128
128



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 180 - \frac{144 \cdot 8}{9} + 144 = 180 + \frac{144}{9} = \frac{180 \cdot 9 - 144}{9} = \frac{1620 + 144}{9} = \frac{1764}{9} = 196$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 180 \\ \hline 1620 \end{array}$$

$$BC = \sqrt{196} = \sqrt{16 \cdot 10} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

$$\begin{array}{r} 1764 | 5 \\ -9 \\ \hline 86 \\ -81 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 14 \\ \hline 14 \\ + 56 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$BC = \sqrt{196} = 14$$

Ответ: $BC = 14$

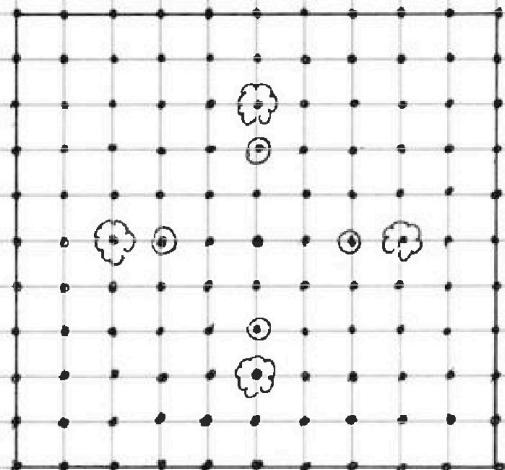


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов: $11 \cdot 11 = 121$

Кое-ко способов видимо 2
Узла из 121: C_{121}^2

Но раскраски, получающиеся
друг из друга поворотом,
по условию считаются
одинаковыми \Rightarrow таким
способом мы учитываем раскраски

одинаковые раскраски ~~но~~ но
по несколько раз. Тогда нам теперь

надобно найти, сколько раз мы учитываем
одну и ту же раскраску.

и вот так.

На рисунке вот так отмечены узлы, которые
получаются друг из друга поворотом (и вправо
1 раз и нарисовать для неё) для др. раз будет
аналогично)

Заметка, что

У нас получилось 4 таких пары узлов, т.е.
каждую раскраску мы учитываем 4 раза.

Тогда всего способов перепрасить 2 узла в
один цвет $C_{121}^2 = \frac{121!}{2! \cdot 119! \cdot 4} = \frac{120 \cdot 121}{8} = 15 \cdot 121 =$

$$= 1815$$

$$\begin{array}{r} \\ \times 121 \\ \hline 15 \\ \hline 605 \\ + 121 \\ \hline 1815 \end{array}$$

Ответ: 1815 способов

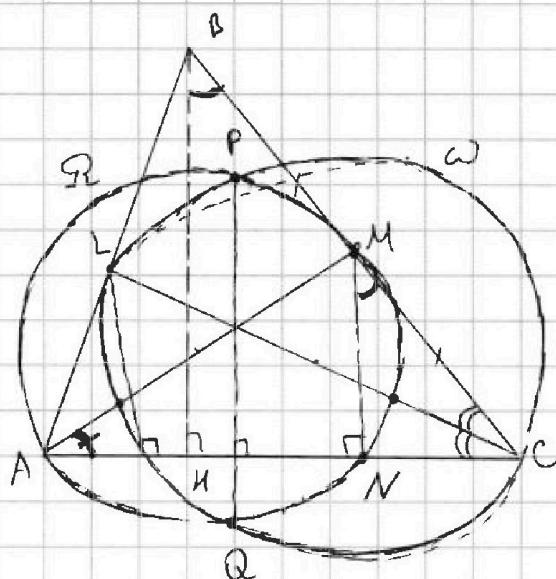


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AC, BC - ?$

$$AB = 4$$

$$AN = 5$$

M - сер. BC

CL - диам. сх

AM - длина R , $N \in R \Rightarrow \angle ANM = 30^\circ$
 MN - сер. линия $\angle CBH$ (H - осн. выс., пров. ч. т. B)
 $\triangle CNM \sim \triangle CHB$ ~~козр~~, т.к. MN - сер. лин.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{2 сл. } A &= 75q^2, B = 11p^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} (m+2n)(m+2n-7) = 75q^2 \\ mn(m+2n+9) = 11p^2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (m+2n)(m+2n-7) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q \\ mn(m+2n+9) = 11 \cdot p \cdot p \end{array} \right. \end{aligned}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$(m+2n)(m+2n-7) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

Возможна варианта: $m+2n = 3 \Rightarrow -4 = 25q^2$ - неводи.

$$m+2n = 1 \Rightarrow -6 = 75q^2 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 5 \Rightarrow -2 = 15q^2 \text{ - неводи}$$

$$m+2n = 15 \Rightarrow 8 = 5q^2 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 25 \Rightarrow 18 = 3q^2 \Rightarrow 6 = q^2 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 75 \Rightarrow 68 = q^2 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 3q \Rightarrow 3q - 7 = 25q \Rightarrow 22q = -7 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 5q \Rightarrow 5q - 7 = 15q \Rightarrow 10q = -7 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 15q \Rightarrow 15q - 7 = 5q \Rightarrow 10q = 7 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 25q \Rightarrow 25q - 7 = 3q \Rightarrow 22q = 7 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 75q \Rightarrow 75q - 7 = q \Rightarrow 74q = 7 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = q \Rightarrow q - 7 = 75q \Rightarrow 74q = -7 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = q^2 \Rightarrow q^2 - 7 = 75 \Rightarrow q^2 = 82 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 3q^2 \Rightarrow 3q^2 - 7 = 25 \Rightarrow 3q^2 = 32 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 5q^2 \Rightarrow 5q^2 - 7 = 15 \Rightarrow 5q^2 = 22 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 15q^2 \Rightarrow 15q^2 - 7 = 5 \Rightarrow 15q^2 = 12 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 25q^2 \Rightarrow 25q^2 - 7 = 3 \Rightarrow 25q^2 = 10 \text{ - неводи.}$$

$$m+2n = 75q^2 \Rightarrow 75q^2 - 7 = 1 \Rightarrow 75q^2 = 8 \text{ - неводи.}$$

Возможных вариантов не ~~помного, но не больше~~ ~~одного~~ ~~одного~~

~~одного~~ рассмотрим второе уравнение

$$mn(m+2n+9) = 11p \cdot p$$

Тут возможна варианта:

~~$m-n=p \Rightarrow 3p+9=11 \Rightarrow 3p=2 \text{ - неводи.}$~~

~~$m=11, n=p \Rightarrow 11+2p+9=p \Rightarrow p=-22 \text{ - неводи.}$~~

~~$m=p, n=11 \Rightarrow p+22+9=p \Rightarrow 31=0 \text{ - неводи.}$~~

~~$m=11p, n=p \Rightarrow 13p+9=1 \Rightarrow 13p=-8 \text{ - неводи.}$~~

~~$m=p, n=11p \Rightarrow 33p+9=1 \Rightarrow 33p=-8 \text{ - неводи.}$~~

~~$m=11p^2, n=1 \Rightarrow 11p^2+11=1 \Rightarrow 11p^2=-10 \text{ - неводи.}$~~

~~$n=11p^3, m=1 \Rightarrow 22p^2+10=1 \Rightarrow 22p^2=-9 \text{ - неводи.}$~~

Ответ: $(5; 3)$