



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть d - разность арифметической прогрессии

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 18 \\ \hline 36 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$(*) \begin{cases} 6x + 18 + 2d = (x^2 - 4x)^2 / 3 \\ 6x + 18 + 6d = -3x^2 \quad (1) \end{cases}$$

$$\frac{-3x^2 - (x^2 - 4x)^2}{3} = 4d$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ 18x + 54 + 6d - 6x - 18 - 6d = 3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ 12x + 36 = 3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ 4x + 12 = (x^2 - 4x)^2 + x^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ x^4 - 8x^3 + 16x^2 + x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (x^3 - 6x^2 + 5x + 6) / (x - 2) = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (x^2 - 4x - 3)(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ x \in \{2, 2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}\} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 6d = -3x^2 - 6x - 18 \Leftrightarrow d = \frac{-x^2 - 2x - 6}{2}$$

$$\Rightarrow \forall x \exists d \Rightarrow$$

Ответ: $x \in \{2, 2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

min $14x + 7y$ -? N2

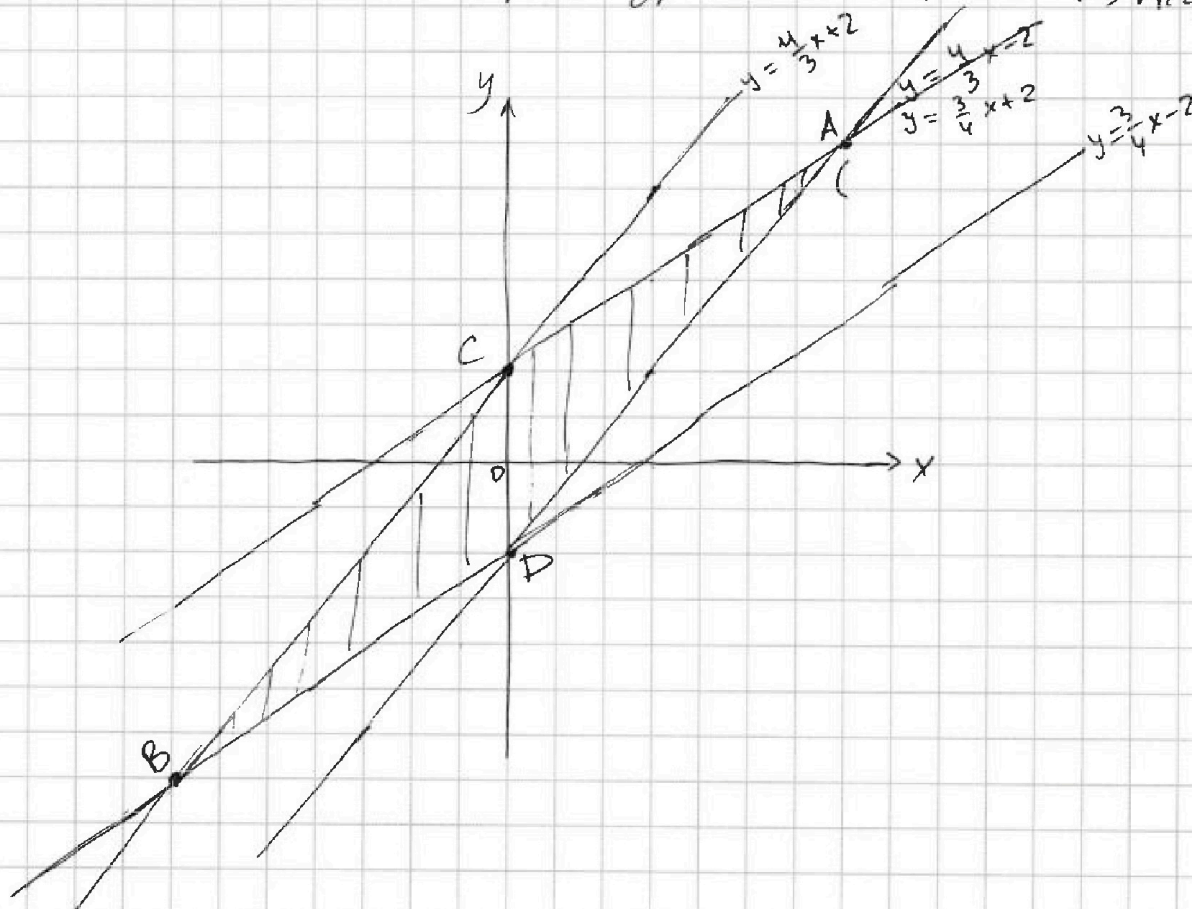
$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 & (1) \\ |3x - 4y| \leq 8 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{4}{3}x - 2 & (1.1) \\ y \leq \frac{4}{3}x + 2 & (1.2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{3}{4}x - 2 & (2.1) \\ y \leq \frac{3}{4}x + 2 & (2.2) \end{cases}$$

пусть $14x + 7y = a \Leftrightarrow y = -2x + \frac{a}{7}$

Отметим на пл. xOy реш. ~~ур. (1.1), (1.2), (2.1), (2.2)~~ (1) и (2)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

реш. (1) и (2) явл. ч-к ACBD (вкл. ~~в~~ стороны)
(мин-вом (x, y))

$$l_{1.1}: y = \frac{4}{3}x - 2, l_{1.2}: y = \frac{4}{3}x + 2$$

$$l_{2.1}: y = \frac{3}{4}x - 2, l_{2.2}: y = \frac{3}{4}x + 2$$

$$\{A\} = l_{1.1} \cap l_{2.2}, \{B\} = l_{2.1} \cap l_{1.2}$$

$$\{C\} = l_{1.2} \cap l_{2.2}, \{D\} = l_{1.1} \cap l_{2.1}$$

$$\left. \begin{array}{l} C(0; 2), D(0; -2) \\ A(\frac{48}{7}; \frac{50}{7}) \\ B(-\frac{48}{7}; -\frac{50}{7}) \end{array} \right\}$$

для $(14x + 7y)/\min$ дост. взять точку (x_0, y_0) ,
где x_0 - min из всех x уг. (1) и (2) и y_0 - тоже.
Такая т. \exists . Это B. \Rightarrow

$$\begin{aligned} \min(14x + 7y) &= 14 \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) + 7 \cdot \left(-\frac{50}{7}\right) = \\ &= -48 \cdot 2 + 50 = -146 \end{aligned}$$

Ответ: -146.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1.6. \quad t = p^2, \quad t + 9 = 13 \quad \rightarrow \quad p^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$$

$$m - n = 4, \quad t = 4$$

$$mn \underset{>3}{(t+3)} = 3q^2 \Rightarrow \begin{cases} t+3=q \Rightarrow q=7 \\ t+3=3q \Rightarrow q=\frac{7}{3} \times \\ t+3=3q^2 \times (m \neq n) \\ t+3=q^2 \Rightarrow q=\sqrt{7} \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow q=7, \quad t+3=q, \quad mn=3q=21$$

$$\begin{cases} mn=21 \\ m-n=4 \end{cases} \xrightarrow{m, n > 0} (m, n) = (7, 3)$$

$$\text{Проверка: } A = (7-3)(7-3+9) = 4 \cdot 13 = 2 \cdot 2 \cdot 13 \quad \text{ok}$$

$$B = 7 \cdot 3 \cdot (7-3+3) = 7 \cdot 7 \cdot 3 \quad \text{ok}$$

$$1.5. \quad t = q^2, \quad t + 9 = 3 \quad \Rightarrow \quad q^2 + 9 = 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -6 \quad \times$$

$$1.6. \quad t = 3q^2, \quad t + 9 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3q^2 + 9 = 1 \quad \times$$

Итак, ! подх. пара $(m, n) = (7, 3)$

Прим.: " \times " значит "противоречие"

Ответ: $(7, 3)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(m, n) - ?$

\mathbb{N}^3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n; B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$\{A, B\} = \{13p^2, 3q^2\}; p, q \in \mathbb{P}$$

т.е. ~~$A = 13p^2, B = 3q^2$~~ $A = (m-n)(m-n+9)$

$$B = mn(m-n+3)$$

т.е. $A = 13p^2, B = 3q^2$: $(m-n)(m-n+9) = 13 \cdot p \cdot p$ (1)
 $m \cdot n \cdot (m-n+3) = 3 \cdot q \cdot q$ (2)

~~$A, B > 0 \Rightarrow m > n \Rightarrow m-n+3 > 3$~~

~~$m-n+3 \in \mathbb{N}, 3 \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \Rightarrow m-n+3 = 3q$~~

~~$(m-n+3) \in \{q, q^2, 3q, 3q^2\}$~~

~~1.1. $m-n+3 = q \Rightarrow m-n+9 = q+6$~~

~~1.1.1 $m = q, n = 3 \Rightarrow m = q - 3 + n$~~

~~1.1. $m-n$ - простое или 1, т.к. (1)~~

~~$A, B > 0 \Rightarrow m > n \Rightarrow m-n+3 > 3$~~

~~$\Rightarrow m-n+3$ - простое, т.к. (2)~~

~~но $m-n \in \mathbb{P} \cup \{1\}$, $m-n+3 \in \mathbb{P}$, только если $m-n = 2$.~~

~~$\Rightarrow p = 2$ (т.к. (1)) \Rightarrow ~~т.к.~~~~

~~(2) $\Rightarrow mn \cdot 5 = 3q^2$ ($\Rightarrow q = 5$) $\Rightarrow mn = 15$~~

~~$\begin{cases} m-n=2 \\ mn=15 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (5, 3)$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.е. для сл. 1 обяз. $(m, n) = (5, 3)$

Проверка: $(m-n)(m-n+9) = 13p^2$

$mn(m-n+3) = 3q^2$

~~$p: 2 \cdot 11 = 13p^2 (p \in \mathbb{P})$~~

1.2. m, n - сосл. $m-n = p^2$, т.к. иначе только больше $m-n+9$.

Обозн. $t = m-n$.

1сл. $t(t+9) = 13 \cdot p \cdot p$, $mn(t+3) = 3q^2$

1.1. $t = 13$, $t+9 = p^2 \Rightarrow p^2 = 22$

~~$\forall m, n \in \mathbb{N} (2mn \rightarrow m-n, \text{ т.е. } mn > t)$~~

~~\Rightarrow 1.2. $t = p$, $t+9 = 13p \Rightarrow 12p = 9$~~

1.3. $t = 13p$, $t+9 = p \Rightarrow 12p = -9$

1.4. $t = 13p^2$, $t+9 = 1$

1.5. $t = 1$, $t+9 = 10 = 5 \cdot 2$

2сл. $t(t+9) = 3q^2$, $mn(t+3) = 13p^2$

1.1. $t = 3$, $t+9 = q^2 \Rightarrow q^2 = 12$

1.2. $t = 1$, $t+9 = 10 = 5 \cdot 2 = 3q^2$

1.3. $t = q$, $t+9 = 3q \Rightarrow q = 2q$

1.4. $t = 3q$, $t+9 = q \Rightarrow 2q = -9$

~~т.е.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 36 + 144 - 144 \cos 2\alpha = 36 + 144 + 144 \cdot \frac{1}{9} =$$
$$= 180 + \frac{144}{9} = 180 + 16 = 196$$

$$\Rightarrow BC = 14$$

Ответ: 14.



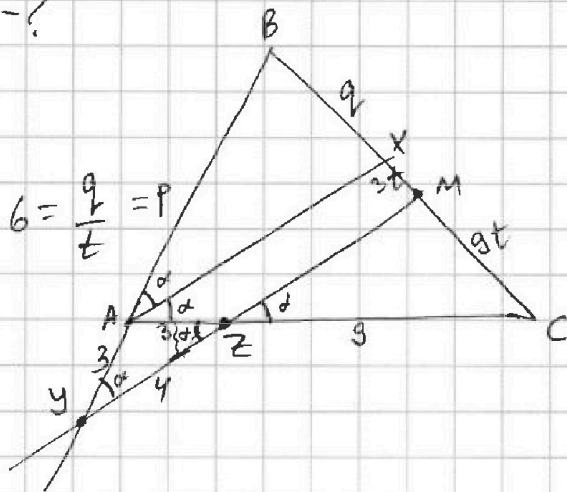
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

BC-?



нч

$$BM = MC$$

$$\begin{aligned} AC &= 12 \\ AZ &= 3 \end{aligned} \Rightarrow ZC = 9$$

$$YZ = 4$$

$$\begin{aligned} (AX) \parallel (ZM) &\Rightarrow \\ \angle XAC &= \angle MZC \\ &'' \\ \angle AZY & \end{aligned}$$

нчтб $XM = 3t$. $(AX) \parallel (ZM) \Rightarrow \frac{XM}{MC} = \frac{AZ}{ZC} = \frac{3}{9} \Rightarrow MC = 9t$

нчстб $AB = p$, $BX = q$.

$[AX]$ - ссс. в $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} \Rightarrow \frac{12}{p} = \frac{12t}{q} \Rightarrow$

$$p = \frac{12q}{12t} = \frac{q}{t}$$

$(AX) \parallel (YM) \Rightarrow \frac{AB}{AY} = \frac{BX}{XM} \Rightarrow \frac{q/t}{3} = \frac{q}{3t} \Rightarrow$

$$AY = \frac{3t \cdot \frac{q}{t}}{q} = 3 \Rightarrow \triangle YAZ - \text{р/ф.}$$

нчстб $\angle BAX = \alpha$.

Т. син. гмв в $\triangle YAZ$: $\frac{3}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 2\alpha}$

$BM = MC \Rightarrow q + 3t = 9t \Rightarrow q = 6t. \Rightarrow p = \frac{q}{t} = 6$

Т. кос. гмв в $\triangle YAZ$: $4^2 = 3^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos 2\alpha \Rightarrow$

$$16 = 18 + 18 \cos 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

Т. кос. гмв в $\triangle BAC$: $BC^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos 2\alpha$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & (1) \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y} & (2) \end{cases}$$

заметьте, что $x=y$ ур. (2)

решим (1) для $y=x$:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \quad (3)$$

~~з.п. $a = x+6, b = 5-x$~~

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 5 = 2\sqrt{ab} \quad \leftarrow 5 \rightarrow$$

$$a^2 - 2\sqrt{ab} + b^2 + 10\sqrt{ab} + 25 = 4ab - 20\sqrt{ab} + 25$$

~~$a, b \geq 0$~~

о.р. $\therefore x \geq -6, x \leq 5, x \in [-6; 5]$

$30-x-x^2$ - пар. ветвь вниз. $x_p = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

заметьте, что $f(x) = \sqrt{x+6} \nearrow$ на $[-6; 5]$

$g(x) = -\sqrt{5-x} \nearrow$ на $[-6; 5]$

$5 = \text{const}$

$h(x) = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \nearrow$ на $[-6; -\frac{1}{2}]$

\searrow на $[-\frac{1}{2}; 5]$.

т.е. на $[-\frac{1}{2}; 5]$ не более 1 рещ.

з.п. ~~$a = x+6, b = 5-x$~~ т.к. левая часть \nearrow , правая \searrow .

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 5 = 2\sqrt{ab}$$

$$a^2 + b^2 - 4ab - 25 = -18\sqrt{ab}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = \sqrt{5\frac{1}{2}} - \sqrt{5\frac{1}{2}} + 5 = 5$$

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\left(5\frac{1}{2}\right)\left(5\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2} \cdot 2 = \frac{11}{2} \cdot 2 = 11$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right) + 5 < h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(5) + g(5) + 5 = \sqrt{11} + \sqrt{0} + 5 = \sqrt{11} + 5$$

$$h(5) = 2\sqrt{11 \cdot 0} = 0$$

$$f(5) + g(5) + 5 > h(5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{на } \left[-\frac{1}{2}; 5\right] \exists! x, \text{ yg. (3).}$$

$$f(x) + g(x) + 5 = S(x)$$

$$S(-6) = 0 - \sqrt{11} + 5 = 5 - \sqrt{11} > 0 = h(-6)$$

$$h(-6) = 0$$

~~$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{2\sqrt{11}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{2\sqrt{11}}$$~~

~~$$S(x) = \sqrt{10} - 1 + 6$$~~
~~$$h(x) = 2\sqrt{10}$$~~



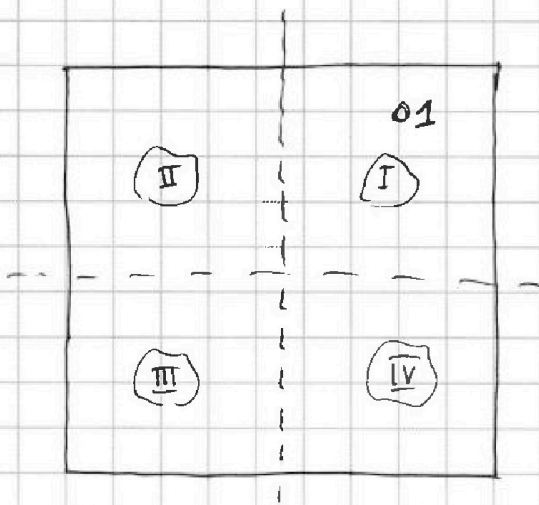
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



всего 100 узлов.

~~$$\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$~~
~~столько вар-в разместить 2 узла при фикс. полож. доски.~~
~~перекр.~~

разд. кв. на 4 области, в кажд. по 25 узлов (см. рис.)
 Сначала посчитаем, как будто 2 разных узла отлич. гр. от гр. (узел 1 и узел 2)
 Обл. I выбираем так, что в ней узел 1.
 Ост. области нумеруем пр. ч/с.
 вар-в для 1-го узла: 25; для 2-го: 99
 Итого $25 \cdot 99$ вар-в разместить узлы 1 и 2.
~~с учетом поворота, т.к. никакое разм. не полук.~~
~~из гр. поворотом, ибо уже зафикс. обл. I, и при приведении раскр. к тому, что узел 1 в той же области, раскр. полук. разные~~

1) Посчитаем кол-во вар-в, что 2 б. узла в ~~одной~~ обл. Это кол-во равно кол-ву выбрать 2-места из 25-ти $= \frac{25 \cdot 24}{2} = 25 \cdot 12$, т.к.
 д.о.о. выбираем в I обл. 2 места, поворотом можно получить любые 2 места в II, III или IV обл.
 И любые так посчитанные раскр. разные, т.к. они разные при приведении к тому, что



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если повернуть их так, чтобы оба д. узла были справа сверху (т.к. ~~25.12~~ так посчитано)

2) пост. кол-во вар-в выбрать 2 места для дельных узлов среди сосед. областей (д.о.о. I и II, т.к. поворотом получим левые сосед. области, и при этом все раскр. равные, т.к. они все их посчитаем с учетом, что в фикс. сосед. обл. они разные)

$$\text{Итак, } \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot \frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 \text{ вар-в.}$$

3) пост. кол-во вар-в выбрать 2 узла для обл. раск. наискосок. (Посчитаем, аналогично п.1) и п.2), кол-во взять 2 места из I и III)

$$\frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 \text{ вар-в}$$

$$\begin{aligned} \text{Всего } 25 \cdot 12 &= 25 \cdot 49 + 25 \cdot 49 = \\ &= 25(12 + 49 + 49) = 2750 \end{aligned}$$

Ответ: 2750.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 26 \Rightarrow \angle B = 13 \Rightarrow MS = \frac{1}{2} \angle B = \frac{13}{2} \text{ (т.к. } [MS] \text{ - ср. линия } \triangle LBC)$$

$$\text{пусть } BM = MC = y, \quad HN = NC = x.$$

$$LR = \frac{1}{2} BM = \frac{y}{2}, \text{ т.к. } [LR] \text{ - ср. лин. } \triangle ABM.$$

$$AN = AN - x = 20 - x$$

$$\begin{aligned} BH^2 &= 26^2 - (20-x)^2, \quad BH^2 = \cancel{(2y)^2} - (2x)^2 \\ \Rightarrow 26^2 - (20-x)^2 &= 4y^2 - 4x^2 \quad (1) \end{aligned}$$

продлим ~~ML~~ CL за L: $C' \in [CL], CL = LC'$.

$$2AC^2 + 2BC^2 = AB^2 + CC'^2 \Rightarrow 2(20+x)^2$$

т.к. $M' \in \Gamma_{AM} \setminus [AM]$ и $AM = MM'$

$$AM'^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 \Rightarrow (2AM)^2 + (2y)^2 = 2(26)^2 + 2 \cdot (20+x)^2$$

$$\text{но } AM^2 = AN^2 + NM^2 = AN^2 + \left(\frac{BH}{2}\right)^2$$

$$[CL] \text{ - мед. и бисс.} \Rightarrow AC = CB \Rightarrow 20+x = 2y \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow 26^2 - 400 + 40x - x^2 = 4y^2 - 4x^2 \Rightarrow$$

$$3x^2 + 26^2 - 400 + 40x = 4y^2 \Rightarrow$$

$$(2) \Rightarrow 4y^2 = 400 + 40x + x^2 \Rightarrow$$

$$3x^2 + 26^2 + 400 + 40x = 400 + 40x + x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 = 800 - 26^2 = 800 - 676 = 124 \Rightarrow x^2 = 62 \quad (x \geq 0)$$

$$x = \sqrt{62}, \quad y = \frac{20+x}{2} = 10 + \frac{\sqrt{62}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = 20 + x = 20 + \sqrt{62}$$

$$~~AB~~ BC = 2y = 20 + \sqrt{62}$$

$$\text{Ответ: } AC = 20 + \sqrt{62}, BC = 20 + \sqrt{62}.$$

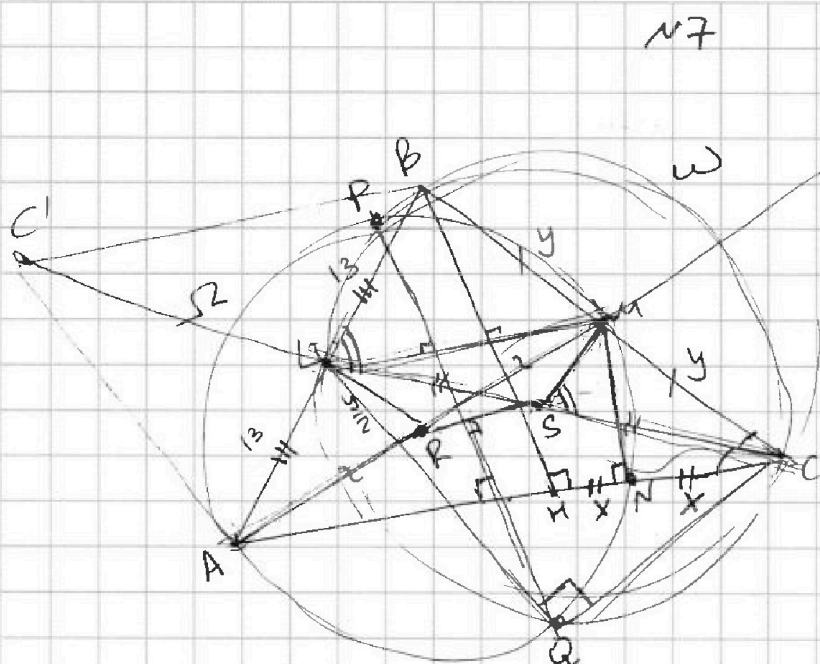


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N7

AC-? BC-?

AB = 26, AN = 20

BH - выс. $\triangle ABC$

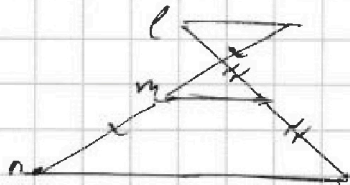
(PQ) - рад. окк σ и ω , (PQ) \perp (RS), $\angle \alpha$
 P - сер. [AM], S - сер. [LC].

но (PQ) \parallel (BH) \perp (AC) \Rightarrow (RS) \parallel (AC)

$N \in \omega$, [AM] - diam. $\omega \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow (NM) \parallel (BH) \Rightarrow$

HN : NC = BM : MC = 1 : 1

(LM) \parallel (AC), т.к. AR = RM, LS = SC, (RS) \parallel (AC):



(такое) получ при движении стороны \triangle вдоль ср. линии и \parallel (но Т. Фалеса)

(LM) \parallel (AC) $\Rightarrow \frac{BL}{LA} = \frac{BM}{MC} = 1$

LM - ср. линия $\triangle ABC \Rightarrow LM = \frac{1}{2} AC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Arithmetic: $\frac{54}{18} = \frac{36}{36}$
- Equations: $1 - 8 + 17 - 4 - 12 = 10$, $16 - 8 \cdot 8 + 17 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 12 = 20$
- Systems of equations: $\begin{cases} x - \sqrt{6}z = 10 \\ y = 10 \end{cases}$
- Matrix operations: $\begin{array}{c|ccc|c|c} 1 & -8 & 17 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & -6 & 5 & 6 & 0 \end{array}$
- Quadratic equations: $4 \pm \sqrt{16 + 12}$, $2 \pm \sqrt{4 + 3}$
- Linear inequalities: $3y \geq \frac{4x - 8}{4}$, $3y \leq \frac{4x - 6}{3} = \frac{4}{3}x - 2$
- Graphical solution: A coordinate system showing a feasible region bounded by lines $3y = \frac{4x - 8}{4}$ and $3y = \frac{4x - 6}{3}$.
- Final result: $x = 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

