



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC ; пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть первый элемент равен a , второй $a+d$, третий $a+2d$ и т.д.

$$\begin{aligned} 1) a+2d &= 3x+3 \Rightarrow 3 \text{ элемент арифм прогрессии} \\ 2) a+4d &= (x^2+2x)^2 \Rightarrow 5 \text{ элемент арифм прогрессии} \\ 3) a+8d &= 3x^2 \Rightarrow 9 \text{ элемент арифм прогрессии} \end{aligned}$$

Вычтем из 3 равенства первое:

$$0+8d - a - 2d = 3x^2 - 3x - 3 \Rightarrow 6d = 3x^2 - 3x - 3$$

$$2d = x^2 - x - 1$$

$$a + 8d = 3x^2 \Rightarrow a + 4x^2 - 4x - 4 = 3x^2$$

$$a = -x^2 + 4x + 4$$

Подставим a и d во второе равенство

$$-x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 2x - 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{Разложим на средние члены равенство.}$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$$

Значит либо $x = -1$ либо $x^2 + 2x - 2 = 0$

$$1) x = -1 \text{ то } d = \frac{1}{2} \quad a = -x^2 + 4x + 4 = -1 - 4 + 4 = -1$$

Проверим подходит ли оно

$$-1 + 1 = -3 + 3 = 0 \quad \checkmark$$

$$-1 + 2 = (1 + 2)^2 = 9 \quad \checkmark$$

$$-1 + 4 = 3 \cdot 1^2 = 3 \quad \checkmark$$

Вариант $x = -1$ подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x^2 + 2x - 2 = 0 \quad D = 4 + 8 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{3}$$

~~$$d = \frac{1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{2 + 3\sqrt{3} + 2}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}$$~~

Если подставить x_1 то все будет выполняться и к все x

~~$$a = x^2 + 4x + 4 = 1 + 2\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} + 4 = 9 + 6\sqrt{3}$$~~

~~$$4 + 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3} = 3 \cdot x + 3 = 3 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$$~~

$$d = \frac{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

~~$$4 + 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} = a = -x^2 + 4x + 4 = -1 + 2\sqrt{3} - 3 - 4 + 4\sqrt{3} + 4 =$$~~

~~$$= 6\sqrt{3} - 4$$~~

~~$$a + 2d = 3x + 3 \Rightarrow 6\sqrt{3} - 4 + 4 - 3\sqrt{3} = -3 + 3\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3}$$~~

Аналогично с другой x_2 если подставить равенство будет выполняться

$$3) x_2 = -1 - \sqrt{3}; 2d = x^2 - x - 1 \Rightarrow 2d = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 4 + 3\sqrt{3}$$

~~$$a = -x^2 + 4x + 4 = -4 - 6\sqrt{3} + 4 - 4 - 4\sqrt{3} + 4 = -4 - 6\sqrt{3}$$~~

Третий вариант тоже возможен из за равенствострени переходов во время решения.

Ответ: $x = -1; x = -1 + \sqrt{3}; x = -1 - \sqrt{3}$ при каких a и d указано в решении.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$|x-3y| \leq 3$ Нужно максимизировать $4y+8x$
 $|3x-y| \leq 1$

Сделаем замену, то есть пусть $a = x-3y$

$b = 3x-y$
 Тогда $\begin{cases} |a| \leq 3 \\ |b| \leq 1 \end{cases}$

$$4y+8x = \frac{7b-5a}{2} = \frac{21x-7y-5x+15y}{2} = \frac{16x+8y}{2} = 8x+4y$$

Нужно максимизировать $\frac{7b-5a}{2}$

$7b \max$ то $7 \cdot 1 = 7$
 $5a \min$ при $a = -3$ то $5 \cdot (-3) = -15$

то $\frac{7b-5a}{2}$ самое маленькое $\frac{7+15}{2} = \frac{22}{2} = 11$
 Получим оценку, что больше 11 не получится
 приведем пример где $4y+8x = 11$

$$\begin{cases} 3x-y = 1 \\ x-3y = -3 \Rightarrow x = -3+3y \end{cases}$$

$$3x-y = -9+9y-y = 1 \Rightarrow 8y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

$$x = -3 + 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Проверка

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -1$$

$$4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5+6 = 11$$

$$\frac{3}{4} - \frac{15}{4} = -3$$

Получим пример на 11

Ответ: $4y+8x$ максимум 11 достигается при $x = \frac{3}{4}$ и $y = \frac{5}{4}$, докажем, что больше 11 получить невозможно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Заметим что $75q^2$ это может быть

$$\text{Пусть } B = 75q^2 \text{ тогда}$$

$$3mn(m+n-3) = 75q^2 \text{ Тогда } 25q^2$$

Заметим пусть что $3mn$ и $m+n-3$ будут
простыми, тогда заметим и либо $3mn = 3 \cdot 25$ либо $3mn = 3 \cdot 9$

$$m+n-3 = 25 \text{ или } 9$$

$$3mn = 3 \cdot 25 = mn = 25$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

Заметим что $m+n-9$ и $m+n-3$ это разные
разности в 6. Заметим, что это может быть
даже быть разными числами.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$YZ = 8 \quad AZ = 6, \quad AC = 18$$

$\angle ZAX = \angle XAC$ т.к. AX - биссектриса

$\angle BZM = \angle BAX$ т.к. $ZM \parallel AX$

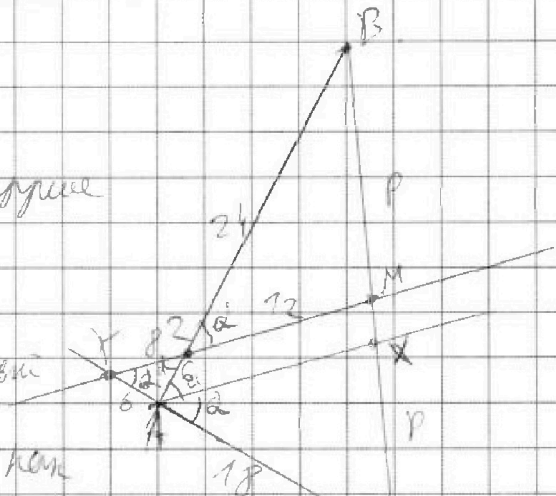
$\angle BZM = \angle ZYA$ как вертикальные

$\angle ZYA = \angle XAC$ т.к. $ZM \parallel AX$ как

соответственных углы

Значит: $\angle ZYA = \angle XZA \Rightarrow \triangle YZA \sim \triangle XZA$

$ZA = YA = 6$ (точка M лежит за точкой X к прямой AX и точка M между точками B и X т.к. прямая AZ параллельна AX пересекает AB, AC соответственно, а не наоборот. Иначе была бы параллельная).



Применим теорему Менелая для $\triangle YMC$

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{MB}{BC} = 1 = \frac{18}{6} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{YZ}{ZM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{6}{ZM} = \frac{2}{3} \Rightarrow ZM = 12$$

Применим теорему Менелая для $\triangle ABC$

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AT}{TC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{7} \cdot \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1 \Rightarrow BZ = 24$$

Теперь рассмотрим треугольники BZM и $\triangle YMC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Применим теорему косинусов для треугольников

$\triangle BZM$ и $\triangle YMC$. Безусловно $BM = MC = p$

А также $\angle ZYC = \angle BZM = 2$

Тогда $\triangle BZM$:

$$BM^2 = BZ^2 + ZM^2 - 2 \cdot BZ \cdot ZM \cdot \cos 2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos 2$$

и $\triangle YMC$ теорема косинусов:

$$CM^2 = YM^2 + YC^2 - 2 \cdot YM \cdot YC \cdot \cos 2 = 20^2 + 24^2 - 2 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \cos 2$$

Приравняем и $BM^2 = CM^2$

$$24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos 2 = 20^2 + 24^2 - 2 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \cos 2$$

$$144 - 576 \cos 2 = 400 - 960 \cos 2$$

$$\cos 2 = \frac{256}{384} = \frac{256}{384} = \frac{2}{3}$$

$$BM^2 = p^2 = 144 + 576 - 576 \cdot \frac{2}{3} = 144 \cdot \frac{1}{3} \cdot 576 = 144 + 192 = 336$$

$$BC = 2BM = 2 \cdot \sqrt{336} = \sqrt{1344} = 8 \cdot \sqrt{21}$$

$$\text{Ответ: } BC = \sqrt{1344} = 8 \cdot \sqrt{21}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 + 2\sqrt{y} = y^4 + 5y^2 + 2\sqrt{x} \end{cases}$$

Заметим, что $\sqrt{y} \geq 0$ и $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$ и $x \geq 0$

$$x^4 + 5x^2 + 2\sqrt{y} = y^4 + 5y^2 + 2\sqrt{x}$$

$$x^4 + 5x^2 + 2\sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + 2\sqrt{y}$$

Заметим что функция имеет один в вог.

$$f(x) = x^4 + 5x^2 + 2\sqrt{x}$$



Из этого следует м.к. x и $y \geq 0$

то $x^4 + 5x^2 + 2\sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + 2\sqrt{y}$ если x равен нулю то то то единственное значение y нуль корень уравнения равен нулю то $x=y$ м.к.

Если $y < x$ то $y^4 + 5y^2 + 2\sqrt{y} < x^4 + 5x^2 + 2\sqrt{x}$

наоборот если $x < y$ то $y^4 + 5y^2 + 2\sqrt{y} > x^4 + 5x^2 + 2\sqrt{x}$

Значит из второго равенства в системе уравнений получаем, что $x=y$

Мы знаем, что $\sqrt{6-y} > 0 \Rightarrow 6-y > 0 \Rightarrow y < 6$

ОДЗ: $x \geq 0$ и $x \leq 6$ м.к. $x=y$ как мы выяснили.

Подставим $y=x$.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5$$

Возведем обе части в квадрат, получим:

$$x+1+6-x-2\sqrt{x+1}\sqrt{6-x} = 4(6+5x-x^2) - 20\sqrt{6+5x-x^2} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{5x+6-x^2} = 4(6+5x-x^2) - 20\sqrt{6+5x-x^2} + 25$$

Перенесем все в одну часть.

$$4(6+5x-x^2) - 18\sqrt{6+5x-x^2} + 18 = 0$$

Сделаем замену $d = \sqrt{6+5x-x^2}$

$$4d^2 - 18d + 18 = 0 \quad \text{и} \quad d \geq 0$$

$$D = 18^2 - 4 \cdot 18 = 18 \cdot 2 = 36$$

$$d_1, d_2 = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{8} = \frac{18 \pm 6}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{18+6}{8} = 3$$

1) $d_2 = 3$ то: $\sqrt{6+5x-x^2} = 3$

$$6+5x-x^2 = 9 \Rightarrow -x^2+5x-3=0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{-2} \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{-2} = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6$$

но $x_1 < 6$ по к. $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6 \Rightarrow 5 + \sqrt{13} < 12$
 $2 - 5 + \sqrt{13} < 9 < 12 \quad \#$

x_1 подходит

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{-2} = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{по к.} \quad \sqrt{13} < 4 \quad \text{и} \quad \text{это} \quad \text{меньше} \quad 6$$

x_2 подходит. по к. $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6$ и $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ меньше 6

2) $d_1 = \frac{3}{2}$

$$\sqrt{6+5x-x^2} = \frac{3}{2}$$

$$6+5x-x^2 = \frac{9}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 + 5x - x^2 = \frac{9}{4}$$

$$-x^2 + 5x + \frac{15}{4} = 0$$

$$D = 25 + 15 = 40$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{40}}{-2}; \quad x_1 = \frac{-5 - \sqrt{40}}{-2} = \frac{5 + \sqrt{40}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{40}}{2} \leftarrow \text{не подходит} \quad x_1 = \frac{5 + \sqrt{40}}{2} \leftarrow \frac{1}{2}$$

$$x_1 \approx 3.5 \rightarrow \frac{25}{4} + 10 + 5\sqrt{40} \approx 36 \text{ м}^2$$

$5.5 \cdot 10 < \frac{4.5}{4} \rightarrow 40 < 4.5$ поэтому $x_1 < 6$ и $x_1 > 0$
подходит под ОДЗ.

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{40}}{-2} = \frac{5 - \sqrt{40}}{2} < 0 \text{ т.к. } 5 < \sqrt{40} \text{ значит}$$

x_2 не подходит под ОДЗ.

$$\text{Значит ответом это } |x; y| = \left(\frac{5 - \sqrt{40}}{2}, \frac{5 - \sqrt{40}}{2} \right);$$
$$\left(\frac{5 + \sqrt{40}}{2}, \frac{5 + \sqrt{40}}{2} \right); \left(\frac{5}{2} + \sqrt{10}, \frac{5}{2} + \sqrt{10} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

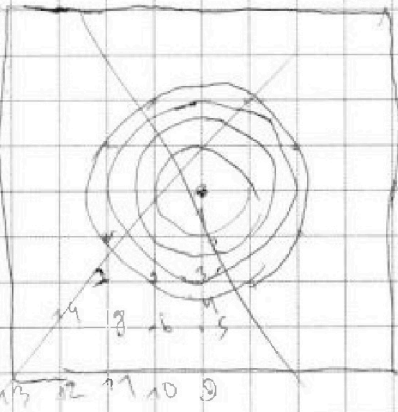
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Докажем, что на дуге Y нет точек, возвращающихся. Пусть мы вернулись на какой-то угол $X < 90^\circ$. Если бы было до точки, то бы вернулись несравненно раньше, т.е. бы $X < 90^\circ$.~~

~~У нас ~~есть~~ есть 14 окружностей~~

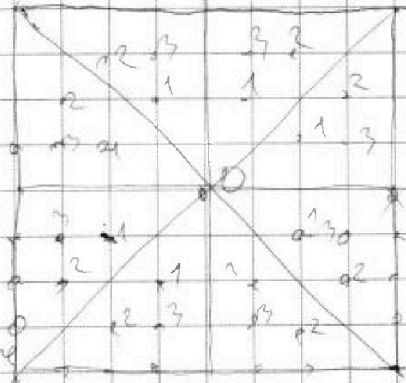
~~Два радиуса еще без точек лежат на одной и той же окружности по любой вариации~~



~~такая точка пересечения сама~~

~~в себя. Другой вариант $X-1$ вариант из всех возможных вариантов, т.е. бы~~

~~Заметим, что у углов 1, 2, 3 и вариант один вариант, а остальные симметричны друг другу. И к 180° переходят сам в себя.~~



~~Значит $40 - 12 = 28$ вариантов у них всего 2 разных варианта при 180° и углах 90° .~~

~~Но да нам надо $\frac{81 \cdot 40 - 28}{4} + \frac{28}{2} = 81 \cdot 10 - 7 + 14 = 81 \cdot 10 + 4 = 814$~~

~~Ответ: 814 вариантов разделить 2 угла в себя угол или при повороте рисунка симметрично~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

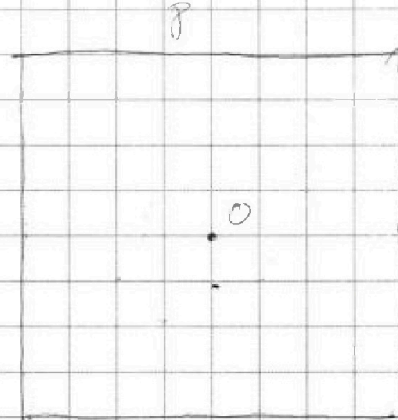
Задача 6

Пусть у нас есть поле 8×8

Узел всего у нас $9^2 = 81$

Всего способов выбрать две клетки это:

$$\frac{81 \cdot 80}{2} = 81 \cdot 40$$



Заметим все две клетки симметричны относительно узла O , то есть центра тяжести узла, то при повороте на 180° все пары клеток просто поменяются по сторонам точки O , то есть ее мы не учитываем как раз.

Если заданная точка центр тяжести не находится на 90° не кратное 90° от центра тяжести и узел не перейдет в другую точку поля.

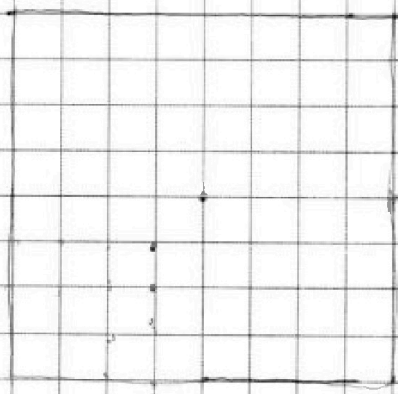
Сейчас рассмотрим только

Пусть тогда рассмотрим количество раскладок, что симметричны друг от друга или центра тяжести симметричны. Это число $40 \cdot 81$ т.е.

и тогда мы при центре

весь центр тяжести симметрично метка. $\frac{80}{2} = 40$.

У всех остальных пар будет и не равны взаимно при повороте на 90° .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b \in a = x - 3y \quad b = 3x - y$$

$$\frac{7b - 5a}{2} = \frac{7(3x - y) - 5(x - 3y)}{2} = \frac{16x + 8y}{2} = 8x + 4y$$

$$|a| \leq 3$$

$$|b| \leq 1$$

$$3x - y = 1$$

$$x - 3y = -3$$

$$x = 3 + 3y$$

$$-9 + 9y - y = 1$$

$$8y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{15}{4} = -3$$

$$5 + 6 = 11$$

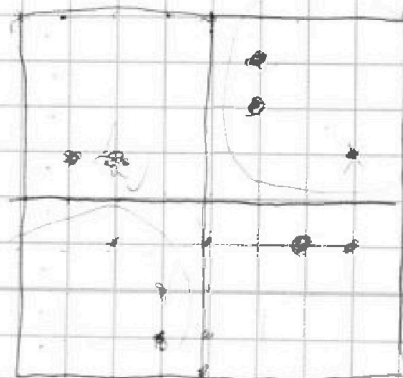
$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 1392$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = 7592$$

$$mn(m+n+3) = 7592 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9^2$$

$$(n+1)^2 = 8192$$

$$\frac{8180}{2} = 8140$$



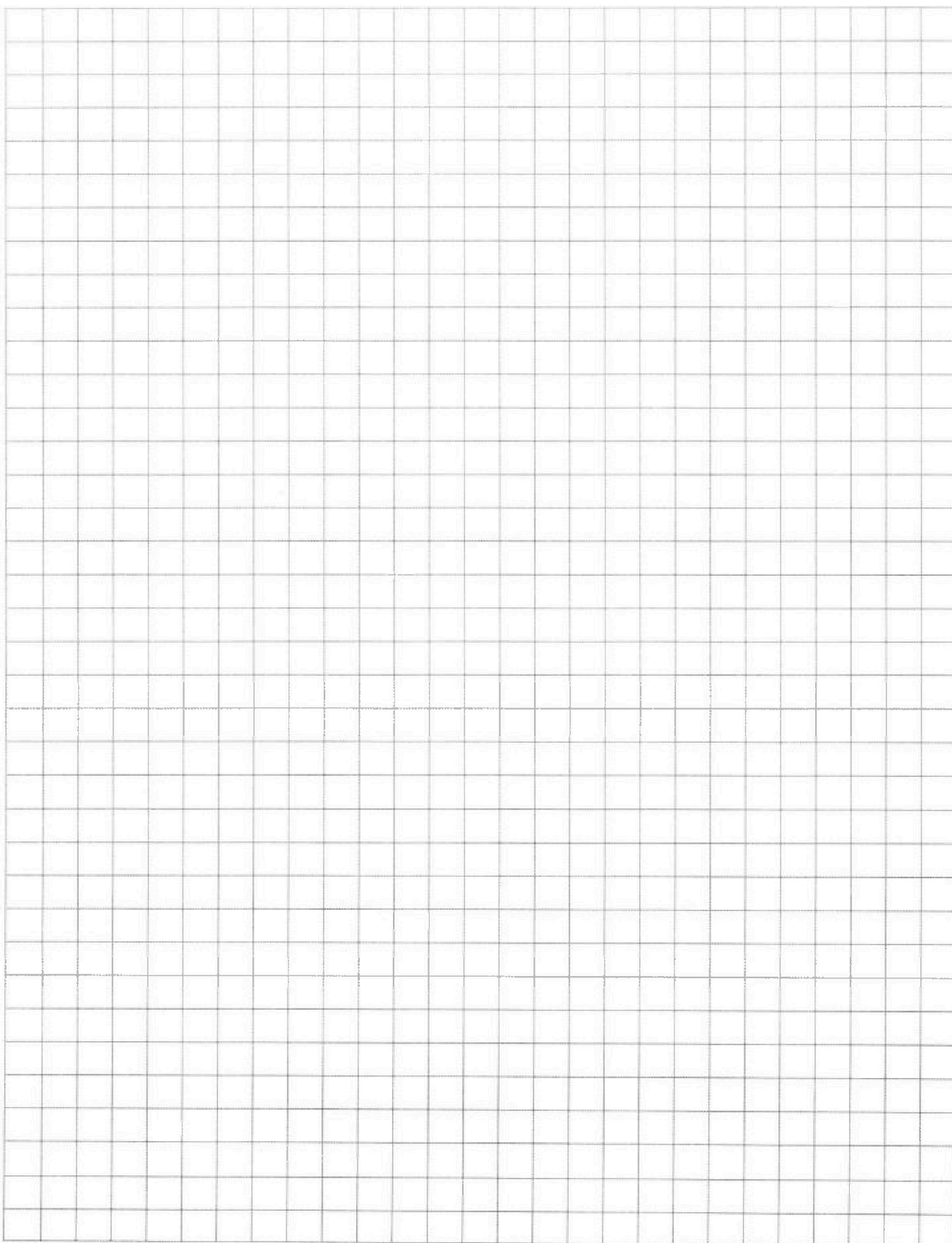


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$x > 3y$$

$$\begin{aligned} x-3y &= a & \cancel{4x+8y} &= \\ 3x-y &= b & 4y+8 &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \quad / \quad \begin{cases} |a| \leq 3 \\ |b| \leq 1 \end{cases}$$

$$x-3y \leq 3$$

$$3x-3y$$

$$\begin{aligned} x+2x-3y+2y &\leq 1 \\ 3x+2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4b &= 12x-4y-3a = \\ &= 12x-4y-3x+9y = \end{aligned}$$

$$3x-y-x+3y =$$

$$= 2x+2y$$

$$= 2x+2y$$

$$4b-4a = 12x-4y-4x+12y =$$

$$4x+4y$$

$$= 8x+8y$$

$$3b-a = 3x-3y \quad a-x+3y = 3x$$

$$3b-a = 8x$$

$$\frac{3b-a}{2} = 4x$$

$$15x-5y-3x+9y =$$

$$b-a + \frac{3b-a}{2} = 8x+4y$$

$$= \frac{12x+4y}{2}$$

$$\frac{3b-3a}{2} = 15x-5y-3x$$

$$\frac{3b-a}{2} = \frac{3x-3y-x+3y}{2} = 4x$$

$$2(b-a) = 3x-y-x+3y = 2x+2y = 4x+4y$$

$$2b-2a + \frac{3b-a}{2} = \frac{4b-2a+3b-a}{2} =$$



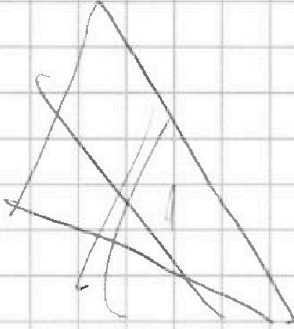
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K^2 + K^2 = 1$$



$$2K^2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos x = \frac{256}{384} = \frac{2}{3}$$

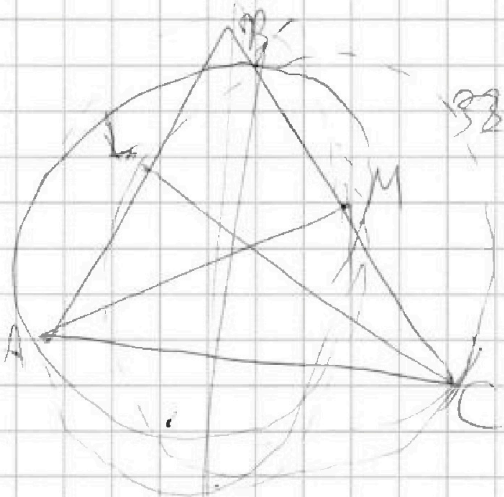
$$24(40-24) = 24 \cdot 16 = 240 + 624 = 240 + 120 = 360$$

$$a^2 = 400 + 576 - 960 \cdot \frac{2}{3} = 976 - 640 = 336$$

$$a = \sqrt{336}$$

$$576 + 144a^2 = 576 + 144 - 576 \cdot \frac{2}{3} = 720 - 384 = 336$$

$$2\sqrt{a} = \sqrt{672}$$



$$16 \cdot 7 = 3 \cdot 16 \cdot 3$$

$$21 \cdot 56 = 4$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 18} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 18} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 18} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 128} \\ 36 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{6+5x-x^2}=3$$

$$x \geq \sqrt{6} \quad x \leq 6$$

$$6+5x-x^2=9$$

$$\sqrt{6+5x-x^2} \neq 0$$

$$-x^2+5x-3=0$$

$$D=25-12=13$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{-2}$$

$$= \frac{-5 - \sqrt{13}}{-2}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx \sqrt{6}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{-2}$$

$$\frac{25+13}{8\sqrt{13}}$$

$$\sqrt{24}$$

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad \times \quad \sqrt{6}$$

$$25 - 10\sqrt{13} + 13$$

$$25 \quad 38 - 10\sqrt{13}$$

$$\frac{25 - 5\sqrt{13}}{2} - 3$$

$$\frac{10\sqrt{13} - 38}{4}$$

$$+ \frac{50 - 10\sqrt{13}}{4}$$

$$-3=0$$

$$6 - \frac{5 + \sqrt{13}}{2} = \frac{12 - 5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{6+5x-x^2}=6$$

$$6+5x-x^2=36$$

$$-x^2+5x-30=0$$

$$D=25-120 < 0$$

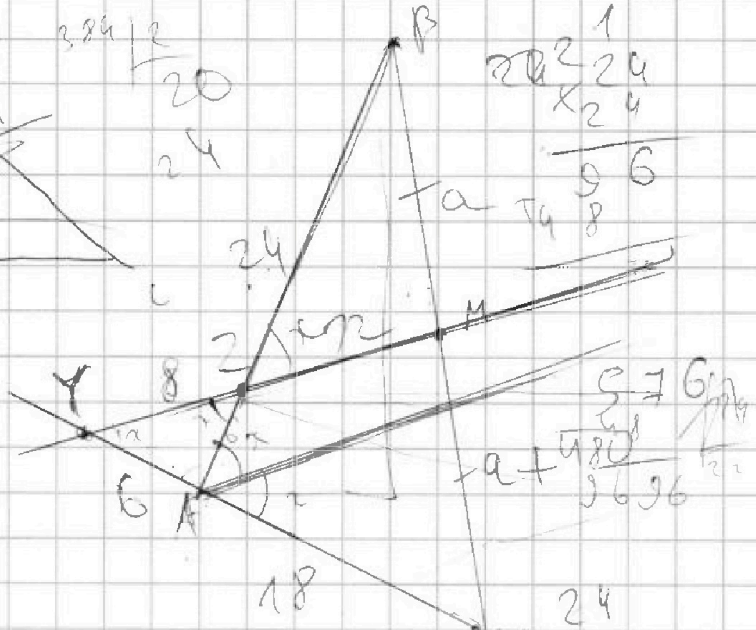
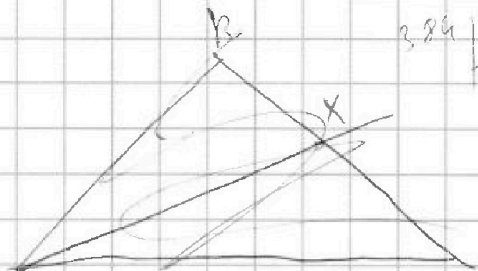


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ΔYMC Menelaus

$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1$$

$$\frac{18}{6} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{2M} = 1 \Rightarrow \frac{8}{2M} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2M = 12$$

$\Delta ABC = CM \cdot BZ \cdot AY$

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{2B}{6} \cdot \frac{8}{18} = 1 \Rightarrow \frac{2B}{18} = 1 \Rightarrow B = 18$$

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{2B}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1 \Rightarrow \frac{2B}{24} = 1 \Rightarrow B = 24$$

$$a^2 = 20^2 + 24^2 - 2 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \cos X$$

$$a^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos X$$

$$20^2 + 24^2 - 2 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \cos X = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos X$$

$$400 + 576 - 960 \cos X = 576 + 144 - 576 \cos X$$

$$400 - 144 = (576 - 576) \cos X$$

$$256 = 984 \cos X \Rightarrow \cos X = \frac{256}{984}$$

Handwritten calculations on the right side of the page, including a multiplication table:

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 24 \\ \hline 80 \\ 400 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 12 \\ \hline 48 \\ 288 \\ \hline 288 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} 3x+3 \\ (x^2+2x)^2 \\ 3x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a \\ a+d \\ a+2d \\ a+3d \\ a+4d \\ a+5d \\ a+6d \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+2d = 3x+3 \\ a+4d = (x^2+2x)^2 = x^4+4x^3+4x^2 \\ a+6d = 3x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a-1 = 6 \rightarrow a=7 \\ a+2d = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2d = x^4+4x^3+4x^2-3x-3 \Rightarrow d = \frac{1}{2}x^4+2x^3+2x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2} \\ 4d = 2x^4+4x^3+4x^2-3x-3 \\ -x^4-4x^3-x^2 = 2x^4+8x^3+8x^2-6x-6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+2d = 6x+3-3x \\ a+6d = 3x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} -x^2+4x+12+2x^2-2x-6 = (x^2+2x)^2 \\ x^2+2x+6 = (x^2+2x)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a+10d = (\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2 = 3x^2+2\sqrt{3}x+3 \\ a+5d = 3x^2-3x-3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^4+4x^3+3x^2-2x-6 = 0 \\ 3x^2-3x-3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6d = 3x^2-3x-3 \\ 2d = x^2-x-3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6d = -3 \\ d = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+4x^2-4x-12 = 3x^2 \\ a = -x^2+4x+12 \\ -x \end{array} \quad \begin{array}{l} a+2d = 3x+3 \\ a+d = 3 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 a + 2d &= 3x + 3 \\
 a + 4d &= (x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^2 + 4x^2 \\
 a + 8d &= 3x^2 \\
 0d &= 3x^2 - 3x - 3 \\
 2d &= x^2 - x - 1 \\
 d &= \frac{x^2 - x - 1}{2} \\
 a + 6x^2 - 6x - 4 &= 3x^2 - x^4 + 4x^2 - 2x - 2 = 0 \\
 a &= -x^4 + 6x^2 + 4 - 2x - 2 = -x^4 + 6x^2 - 2x + 2 \\
 a = 2d &= 1 + 1 - 1 = 1 \\
 d &= \frac{1}{2} \\
 a &= -1 \\
 a &= -1 + 4 = 3 \\
 x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 &= 0 \quad | x + 1 \\
 \underline{x^4 + x^3} & \\
 \hline
 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & \\
 \underline{3x^3 + 3x^2} & \\
 \hline
 -2x - 2 & \\
 \underline{-2x - 2} & \\
 \hline
 0 & \\
 (x^3 + 3x^2 - 2)(x + 1) &= 0 \\
 (x + 1)^2 (x^2 + 2x - 2) &= 0 \\
 D = 4 + 8 = 12 \\
 x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \\
 (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 2) &= 0 \\
 &= x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 - 4x + 2x^2 - 2 = 0 \\
 &= x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^4 + 5x^2\sqrt{y} = y^4 - 5x + 5y^2$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \text{отсюда } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0$$

$$\sqrt{6-y} \geq 0 \Rightarrow 6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 6$$

$$\sqrt{6+5x-y^2} \geq 0 \Rightarrow 6+5x-y^2 \geq 0$$

$$6+5x \geq y^2 \Rightarrow x \geq \frac{y^2-6}{5} = y^2/5 - 6/5 \geq 0$$

$$y^2 \geq 6 \Rightarrow y \geq \sqrt{6} \quad \text{отсюда}$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$x \geq 0, y \geq 0$

$$36 + 30 + \sqrt{6} = 76 + \sqrt{6}$$

$$x = y$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x+1+6-x + \sqrt{(x+1)(6-x)} + 5 = 4\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 6-5x$$

$$x+1+6-x - \sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(6+5x-x^2) + 25 - 10\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$7 - \sqrt{6+5x-x^2} = 4(6+5x-x^2) + 25 - 10\sqrt{6+5x-x^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7 - \sqrt{6+5x-x^2} = 4(6+5x-x^2) + 29 - 10\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$-18 = 4(6+5x-x^2) - 9\sqrt{6+5x-x^2}$$

~~-18~~

$$9\sqrt{6+5x-x^2} = 24+20x-4x^2+18$$

$$9\sqrt{6+5x-x^2} = -4x^2+20x+42$$

$$81(6+5x-x^2) = (-4x^2+20x+42)^2$$

$$4(6+5x-x^2) - 9\sqrt{6+5x-x^2} + 18 = 0$$

$$y = 6+5x-x^2 \geq 0$$

$$D = 81 - 18 \cdot 4 \cdot 4 = 81 - 18 \cdot 16$$

$$4y^2 - 9y + 18 = 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 8 = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5$$

$$x+1+6-x - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x}$$

$$x-7-2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(6+5x-x^2) - 20\sqrt{6+5x-x^2} + 29$$

$$4(6+5x-x^2) - 18\sqrt{6+5x-x^2} + 18 = 0$$

$$D = 18^2 - 18 \cdot 16 = 2 \cdot 18 = 36 = 6$$

$$y_1, y_2 = \frac{18 \pm 6}{4} = \frac{24}{4} = 6; \quad \frac{18-6}{4} = 3$$

$$\sqrt{6+5x-x^2} = 6, 3$$