



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

Два различных действительных корня  $\Rightarrow D > 0$

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = -4t^2 + 16 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2 + 4 > 0 \Rightarrow 4 > t^2 \Rightarrow t \in (-2; 2)$$

Пусть  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4$ ,  $c = 4t^2 - 4$ .

По теореме Виета:

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$\text{По условию } x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow 4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow t^2 - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{или } t^2 > 1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} t \in (-2; 2) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Ответ: при  $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$  уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, и их графика полны.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$a^4 - 2ab + b^4 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

Если  $(a-b)$  - четное, то  $(a-b+15)$  - нечетное. Если  $a-b$  - нечетное, то  $(a-b+15)$  - четное. Следовательно  $(a-b)(a-b+15)$  в любом случае четное, тогда  $17p^5$  тоже четное, тогда  $p^5$  четное. Единственное простое четное число это 2, значит  $p=2$ ,  $p^5=32$ .

Пусть  $(a-b)$  - четное, а  $(a-b+15)$  - нечетное. Тогда:

$$\begin{cases} a-b+15 \geq 1 \\ a-b+15 \leq -1 \\ a-b+15 \geq 17 \\ a-b+15 \leq -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = -14 \\ a-b = -16 \\ a-b = 2 \\ a-b = -32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)(a-b+15) = -14 \neq 17 \cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15) = 16 \neq 17 \cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15) = 34 \neq 17 \cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 32 = 17 \cdot 32 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a-b+15 = -17$ ,  $a-b = -32$ . По условию  $a+b \geq 40$ . Тогда  $\begin{cases} a+b \geq 40 \\ a-b = -32 \end{cases} \Rightarrow 2a \geq 8 \Rightarrow a \geq 4$ ,  $b = 36$ . Пара  $(4; 36)$  подходит.

Пусть  $(a-b)$  - нечетное, а  $(a-b+15)$  - четное. Тогда:

$$\begin{cases} a-b \geq 1 \\ a-b \leq -1 \\ a-b \geq 17 \\ a-b \leq -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+15 \geq 16 \\ a-b+15 \geq 14 \\ a-b+15 \geq 32 \\ a-b+15 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)(a-b+15) \geq 16 \neq 17 \cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15) \geq 14 \neq 17 \cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15) \geq 17 \cdot 32 = 17 \cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15) = 34 \neq 17 \cdot 32 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a-b = 17$ ,  $a-b+15 \geq 32$ . По условию  $a+b \geq 40$ . Тогда  $\begin{cases} a+b \geq 40 \\ a-b = 17 \end{cases} \Rightarrow 2a \geq 57 \Rightarrow a \geq \frac{57}{2}$ .  $\frac{57}{2}$  - нецелое, а по условию числа  $a, b$  - целые  $\Rightarrow$  не подходит. Таким образом, решением можно считать пару  $(a, b)$  равную  $(4, 36)$ .

Ответ:  $a = 4$ ,  $b = 36$ .



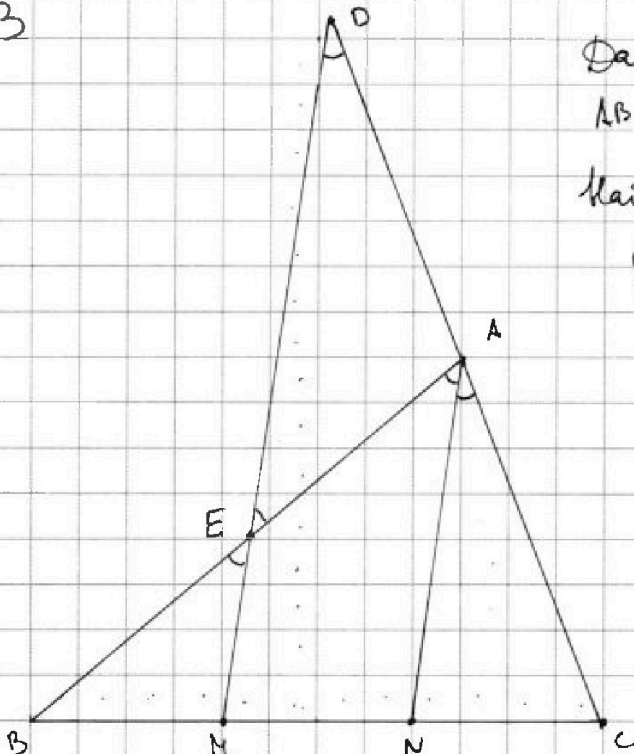
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3



Дано:  $BM = MN = NC$ ,  $AN \parallel MD$   
 $AB = CD$ ,  $BC = 12$ ,  $\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

Найти:  $AB$ .

Решение:  $BM = MN = NC$ ,  $BC = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow BM = MN = NC = \frac{1}{3} BC = 4.$$

$\angle NAC = \angle MDC$  (как соотв

при  $AN \parallel MD$  и сеч.  $DC$ ),

$\angle NCA$  - общий  $\Rightarrow \triangle NAC \sim \triangle MDC$

по двум углам  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{NC}{MC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \text{половина } CD \Rightarrow AN = \text{половина } CD$$

$\angle BEM = \angle BAN$  (как соотв при  $MD \parallel AN$  и сеч.  $AB$ ),  $\angle MBE$  - общ  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle BEM \sim \triangle BAN \text{ по двум углам} \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BA}{BN} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow BE = \text{половина } AB \Rightarrow AE = \text{половина } AB.$

$$AB = CD = 2AE = 2AD \Rightarrow AE = AD \Rightarrow \angle AED = \angle ADE.$$

$$\angle AED = \angle MEB \text{ как вертикальные} \Rightarrow \angle CAN = \angle CDM = \angle AED =$$

$$= \angle MEB = \angle NAB \Rightarrow \angle BAC = 2 \angle CAN.$$

По теореме косинусов для треугольника  $ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$AC = AD = AE = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AC^2 = \frac{1}{4} AB^2, AB^2 = 4AC^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{BC^2 = AB^2} \quad BC^2 = 4AC^2 + AC^2 - 2 \cdot 2 \cdot AC \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 - 2 \cdot 2 \cdot AC \cdot AC \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$\cos \angle C = \frac{1}{2}$

$$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6AC^2$$

$$AC = \sqrt{\frac{BC^2}{6}} = \sqrt{\frac{12^2}{6}} = \sqrt{24} \Rightarrow AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot \sqrt{24} = 4\sqrt{6}$$

Ответ:  $AB = 4\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Зададим граф: пусть деревья - вершины, ребро - дорога между деревьями. По условию из наборов деревьев можно добраться в любую точку единичным образом, тогда наш граф связный и наш граф - дерево. Рассмотрим вершину  $y$ , которая имеет степени 3, 4, 5 или 7. Она соединяется с набором - то вершина имеет степени 3, 4, 5 или 7. При этом степень  $y$  не может быть, т.к. по условию степень вершины равна 1 или 2. Если это не так, то из нашей вершины ребра ведут только в вершину, со степенью 1. Тогда  $y$  наш граф несвязный, но нет других точек вершин из набора 3, 4, 5, 7. Пусть  $z$  нашей вершины степень  $x$ . Тогда количество деревьев не меньше  $x+1$ , т.к. наша вершина соединена с  $x$  вершинами и  $+1$  это она сама. Мы знаем что и  $z$  вершин нашей вершины соединяется с вершинами из набора 3, 4, 5, 7 и имеет степень  $y$ . Тогда количество деревьев равно  $x+1 + y - 1$ , т.к. вершина  $y$  соединяется с  $y$  вершинами, но  $-1$ , т.к. мы уже считали вершину со степенью  $x$ . Тогда количество деревьев отталкиваясь от вершин из набора 3, 4, 5, 7 получается. Тогда всего вершин  $x+1 + y - 1 + z - 1 + w - 1$ , где  $x, y, z, w$  - число из набора 3, 4, 5, 7. Таким образом количество деревьев равно  $3+4+5+7 + 1 - 1 - 1 - 1 = 17$ .

Ответ: на острове может быть 17 деревьев

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 7

$x$  и  $y$  - целые  $\Rightarrow 2x+2y-x^2-y^2$  и  $1-|x+y-2|$  - целые.

Эти выражения могут быть неотрицательными. Ближайшие функции

$\sqrt{x}$  - возрастающая.  $f_0 \geq 0$ ,  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = f_2 > 1$ . Все целые

меньше больше 1 по крайней мере будут равны или больше 1.

Ближайший образ найдем путем перебора:

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 = 1 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases}$$

Решим каждую систему по отдельности, ответы объединим.

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow |x+y-2| \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 2 \Rightarrow 2x+2y-x^2-y^2 \geq$$

$$= 2(x+y) - (x+y)^2 + 2xy = 2 \cdot 2 - 2^2 + 2xy = 2xy \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy \geq 0 \\ x+y \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 2 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 1 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 3 \\ x+y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x+y) - \\ 2(x+y) - \end{cases}$$

$$-(x+y)^2 + 2xy \geq 2 \cdot 3 - 3^2 + 2xy = -3 + 2xy \geq 1$$

$$-(x+y)^2 + 2xy \geq 2 \cdot 1 - 1^2 + 2xy = 1 + 2xy \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 2xy \geq 4 \\ 2xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy \geq 2 \\ xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy \geq 2 \\ x+y \geq 3 \\ xy \geq 0 \\ x+y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ближайший образ найдем перебором точек:  $(0;2), (2;0), (1;2), (2;1), (0;1), (1;0)$

Ответ:  $(0;2), (2;0), (1;2), (2;1), (0;1), (1;0)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 4t^2 - 4 = 0$$

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$$

$$\cancel{12t^2} - 4t^2 + 16 > 0 \Rightarrow -t^2 + 4 > 0 \Rightarrow 4 > t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \in (-2; 2)$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{-4t^2 + 16}}{2}$$

$$3 + 4 + 5 + 4 + 5 =$$

$$= 21 \Rightarrow M = 21 / 31$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{-4t^2 + 16}}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left( \frac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{-4t^2 + 16}}{2} \right) \left( \frac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{-4t^2 + 16}}{2} \right) =$$

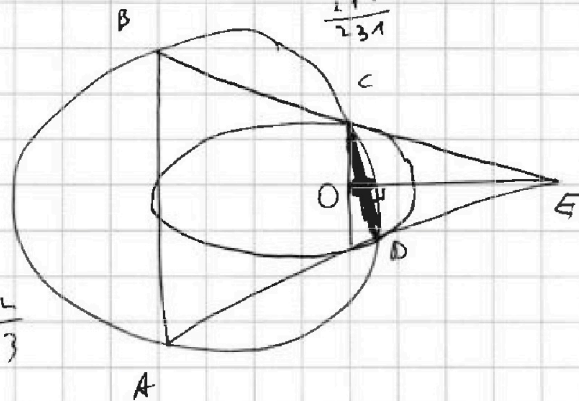
$$= \frac{12t^2 + 2\sqrt{3}t\sqrt{16-4t^2} - 2\sqrt{3}t\sqrt{16-4t^2} - (16-4t^2)}{4}$$

$$= \frac{12t^2 - 16 + 4t^2}{4} = \frac{16t^2 - 16}{4} = 4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{И.о. } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\frac{21}{31}$$



$$\sim 1 \quad \text{I. A}$$

$$\frac{11}{21}$$

$$\text{или } \frac{21}{31}$$

$$\frac{6}{21} \quad \frac{11}{30}$$

$$240 \quad 231$$

$$\frac{21}{31}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$BE \cdot CE = AE \cdot DE$$

$$63$$

$$62$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5 \Rightarrow (a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$\cos(2 \angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} a-b &= 2 & a-b &= 4 \\ a-b+15 &= 4 & a-b+15 &= 4 \end{aligned}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = a^2 + 2ab + b^2 + 15a - 15b - 4ab =$$

$$= (a+b)^2 + 15(a-b) - 4ab = 17p^5$$

$$p=2 \Rightarrow p^5=32$$

$$a-b - \text{решение} \Rightarrow a-b+15 - \text{нерешение} \Rightarrow a-b+15=17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-b=2 \Rightarrow 2 \cdot 17=34 \neq 17 \cdot 32$$

$$a-b - \text{нерешение} \Rightarrow a-b+15 - \text{решение} \Rightarrow a-b=17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-b+15=17+15=32 \Rightarrow 17 \cdot 32=17 \cdot 32$$

$$\begin{cases} a-b=17 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow 2a=57 \Rightarrow a=\frac{57}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$a-b+15=1 \Rightarrow a-b=-14$$

$$a-b - \text{решение}$$

$$(-14) \cdot 1 \neq 17 \cdot 32$$

$$a-b+15=1 \Rightarrow a-b=-14 \quad \times$$

$$a-b=1 \Rightarrow$$

$$a-b+15=1 \Rightarrow a-b=-14 \quad \times$$

$$a-b - \text{нерешение}$$

$$a-b+15=17 \Rightarrow a-b=2 \quad \times$$

$$a-b=1 \Rightarrow a-b+15=16 \quad \times$$

$$a-b=-1 \Rightarrow a-b+15=14 \quad \times$$

$$a-b=17 \Rightarrow a-b+15=32$$

$$a-b=-17 \Rightarrow a-b+15=-2 \quad \times$$

$$\begin{cases} a-b=12 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{40+17}{2} \quad \times$$

$$\begin{cases} a-b=-32 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{40-32}{2}=4$$

$$b=36$$



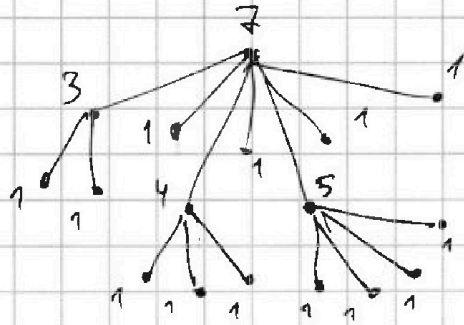
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

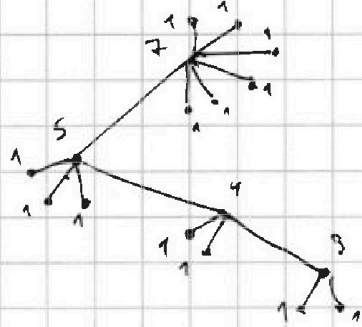
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если заданы маршруты  $\rightarrow$  граф-дерево

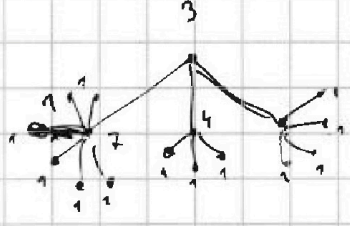


17

$ans = 17.$



17



17



$1 + 7 + 9 + 3 + 2$

11/31  
maxb

$$\begin{aligned} &\sqrt{2(x+y) - (x^2+y^2)} + \sqrt{1 - |x+y-2|} \geq 1 \\ &\sqrt{2(x+y) - (x^2+y^2) - 2xy + 2xy} + \sqrt{1 - |x+y-2|} \geq 1 \\ &\sqrt{2(x+y) - (x+y)^2 + 2xy} + \sqrt{1 - |x+y-2|} \geq 1 \\ &\sqrt{(x+y)(2-x-y) + 2xy} + \sqrt{1 - |x+y-2|} \geq 1. \end{aligned}$$

~~$x+y \neq 2$~~

$$\sqrt{(x+y)(2-x-y) + 2xy} + \sqrt{1 - |x+y-2|} \geq 1$$

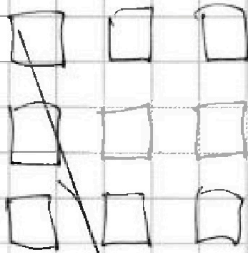
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

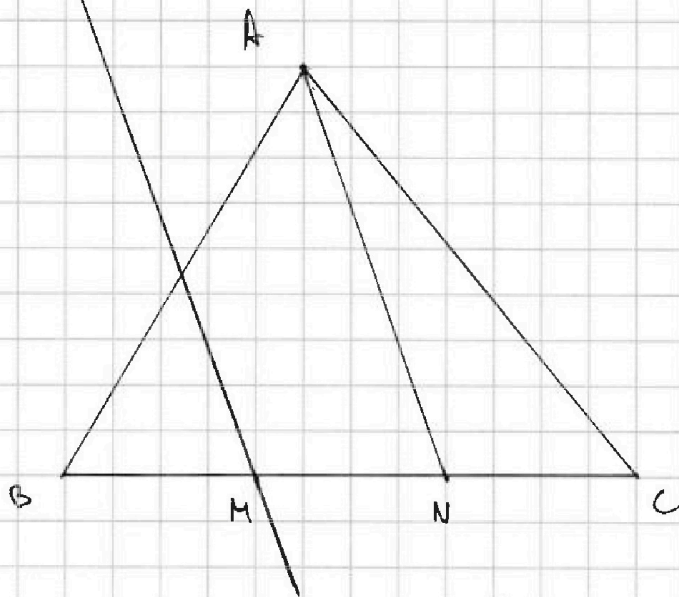
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_8$$

Всего 9!



31

$$\frac{6}{11} \rightarrow \text{или} \frac{16}{31}$$

$$6 \cdot 31 = 16 \cdot 11$$

$$186 = 176 = 10$$

$$-(x^2 + y^2) = -(x+y)^2 + 2xy = -x^2 - 2xy - y^2 + 2xy$$

$$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 = 2 \cdot 2AC = AC \cdot \frac{1}{4}$$

$$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 = 5AC^2 = 6AC^2$$

$$144 = 6AC^2 \Rightarrow AC^2 = \frac{144}{6} = 24 \Rightarrow AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AB = 4\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 - (x+y)^2 = 2xy$$

$$x+y = a, \quad xy = b$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2b$$

$$a(2-a)(1-|a-2|) =$$

$$a \geq 2 \quad \leftarrow 2b(1+2-a) =$$

$$= (3-a)(a(2-a)+2b)$$

$$\sqrt{2a - a^2 + 2b} + \sqrt{1 - |a-2|} = 1$$

$$\sqrt{a(2-a) + 2b} + \sqrt{1 - |a-2|} = 1$$

$$a(2-a) + 2b + 1 - |a-2| + \sqrt{(a(2-a) + 2b)(1 - |a-2|)} = 1$$

$$a(2-a) + 2b + 1 - (a-2) + \sqrt{(a(2-a) + 2b)(1 - (a-2))} = 1$$

$$a(2-a) + 2b + 1 + (2-a) + \sqrt{(a(2-a) + 2b)(1 + (2-a))} = 1$$

$$(a+1)(2-a) + 2b + 1 + \sqrt{a(2-a) + a(2-a)^2 + 2b + 2b(1-a)} = 1$$

$$(a+1)(2-a) + 2b + 1 + \sqrt{(3-a)(a(2-a) + 2b)} = 1$$

$$\sqrt{(3-a)(a(2-a) + 2b)} = (a+1)(a-2) - 2b$$

$$(3-a)(a(2-a) + 2b) = (a+1)(a-2) - 2b$$

$$\begin{cases} 2(xy) - (x^2 + y^2) \geq 0 & \Rightarrow 2(xy) - (x^2 + y^2) + 2xy = 0 & \begin{matrix} x=0 & x=2 \\ y=2 & y=0 \end{matrix} \\ 4 - 4 + 2xy = 0 & \Rightarrow xy = 0 \end{cases}$$

$$1 - |xy - 2| \geq 1 \Rightarrow xy = 2$$

$$2(xy) - (x^2 + y^2) = 1$$

$$1 - |xy - 2| \geq 0$$

$$2(xy) - (x^2 + y^2) + 2xy = 1$$

$$xy = 1$$

$$2 - 1 + 2xy = 1$$

$$2xy = 0$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 & x=0 \\ y=0 & y=1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x=1 & x=0 \\ y=0 & y=1 \end{matrix}$$

$$2(xy) - (x^2 + y^2) + 2xy = 0$$

$$x+y=3 \quad 6 - 9 + 2xy = 1 \Rightarrow 2xy = 4$$

$$\begin{cases} xy = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-x)x \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x=1 \text{ или } x=2$$

$$y=2 \quad y=1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

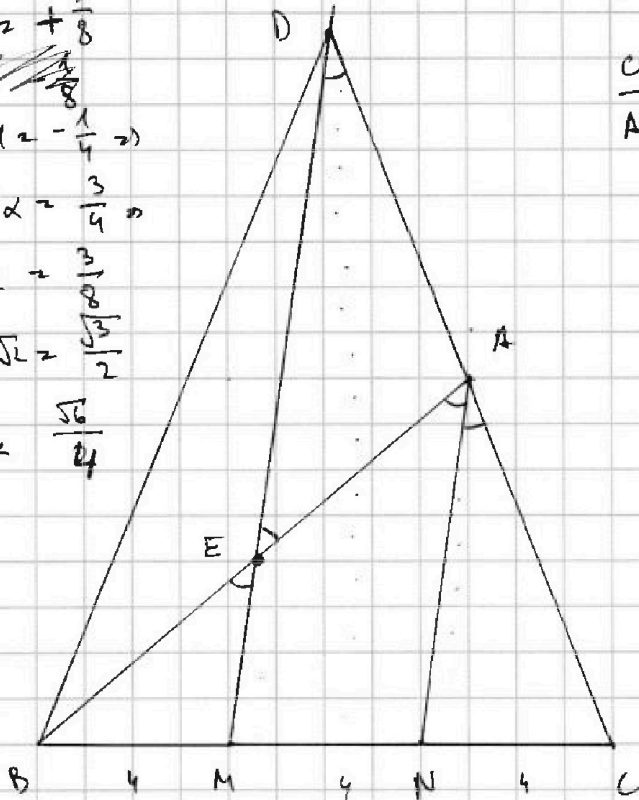
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

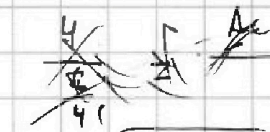
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$      $\cos(\alpha) = \cos\alpha$      $\sin(\alpha) = \sin\alpha$   
 $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$   
 $= -\frac{1}{4} = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2\alpha = +\frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = +\frac{3}{8}$   
 ~~$\cos^2\alpha = \frac{3}{8}$~~   
 $2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{8}$   
 $\cos\alpha \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$   
 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$



$\triangle CMD \sim \triangle CAN$

$\frac{CD}{AC} = \frac{CN}{NC} = \frac{8}{4} = 2$



$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$   
 $= \sqrt{1 - \frac{6}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$AD = AC = \frac{1}{2} AB$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8+2+1}{8} = \frac{11}{8}$

$\frac{144}{11 \cdot 8} = \frac{12^2 - 2^2}{11}$   
 $= 24 \cdot \frac{\sqrt{11}}{11}$

$16 = AN^2 + AC^2 - 2AN \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}$

$16 = AN^2 + AC^2 - AN \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$144 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 - AB \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 144 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 - \frac{1}{8} AB^2$

$144 = AB^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = AB^2 \cdot \frac{11}{8}$

$AB^2 = \frac{144 \cdot 8}{11} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{144 \cdot 8}{11}}$

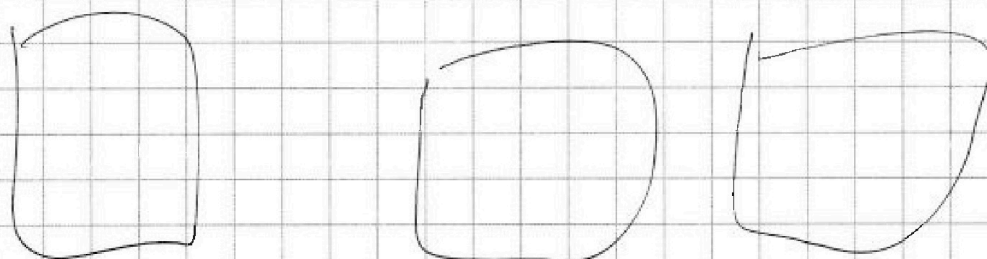
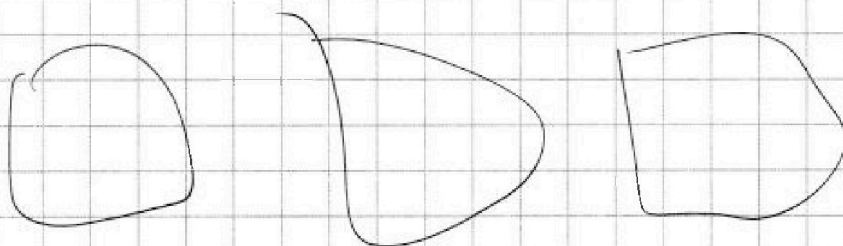
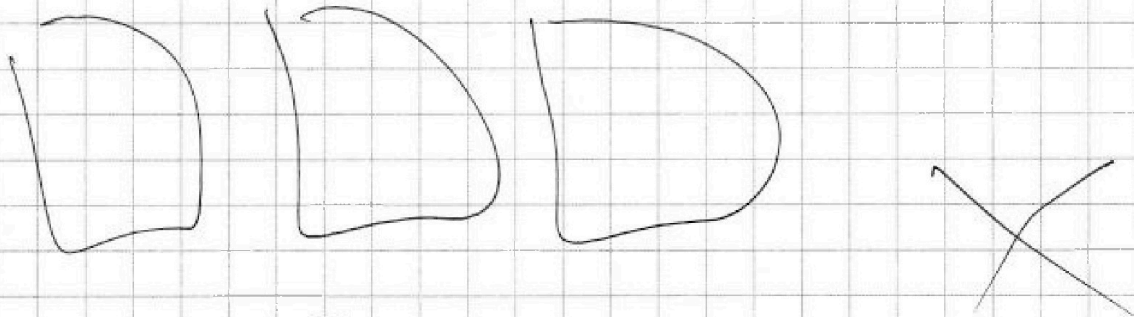


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

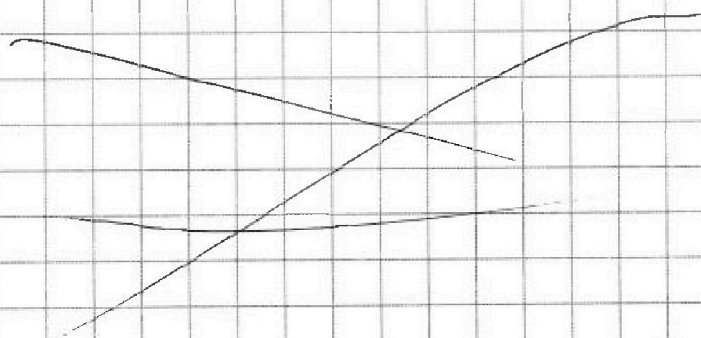
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$9! - 3 \cdot 4 \cdot 5$$

---

$$3!$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

