



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Оценика: Пусть $a = a_0 \cdot 3^{\alpha_1} 7^{\beta_1}$, $b = b_0 \cdot 3^{\beta_2} 7^{\gamma_2}$, $c = c_0 \cdot 3^{\gamma_1} 7^{\delta_2}$,
где $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{N} \setminus \{3, 7\}$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

По условию, $ab : 3^{11} 7^{11} \Rightarrow a_0 b_0 \cdot 3^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2} : 3^{11} 7^{11} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 11 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 11 \end{cases}$

$bc : 3^{18} 7^{16} \Rightarrow b_0 c_0 \cdot 3^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\delta_2 + \beta_2} : 3^{18} 7^{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 18 \\ \delta_2 + \beta_2 \geq 16 \end{cases}$

$ac : 3^{21} 7^{38} \Rightarrow a_0 c_0 \cdot 3^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\delta_2 + \gamma_2} : 3^{21} 7^{38} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 21 \\ \delta_2 + \gamma_2 \geq 38 \end{cases}$

Получаем:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 11 & (1) \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 18 & (2) \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 21 & (3) \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 16 \\ \delta_2 + \beta_2 \geq 16 \\ \gamma_2 + \alpha_2 \geq 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 50 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \alpha_2 + \gamma_2 \geq 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 25 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 38 \end{cases}$$

$abc = a_0 b_0 c_0 \cdot 3^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2 + \delta_2} \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

Пример: Пусть $a = 3^7 \cdot 7^{19}$,
 $b = 3^4 \cdot 7^{10}$,
 $c = 3^{14} \cdot 7^{19}$

Тогда $ab = 3^{11} \cdot 7^{29} : 3^{11} \cdot 7^{11}$, $bc = 3^{18} \cdot 7^{29} : 3^{18} \cdot 7^{16}$,

$ac = 3^{21} \cdot 7^{38} : 3^{21} \cdot 7^{38}$

$abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$

Ответ: $3^{25} \cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

Пусть $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

$D = 9 - 32 = -23 < 0$. Значит, $f(x)$ не имеет корней.

Коэффициент при наибольшей степени $2 > 0$. Значит, $\forall x \in \mathbb{R} f(x) > 0$.

Пусть $g(x) = 2x^2 + x + 3$

$D = 1 - 24 = -23 < 0$. Значит, $g(x)$ не имеет корней.

Коэфф. при x^2 равен $2 > 0$. Значит, $\forall x \in \mathbb{R} g(x) > 0$.

~~$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x \Rightarrow 2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = (1-4x)^2$$~~

~~$$4x^2 - 2x + 7 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1 - 8x + 16x^2 \Rightarrow$$~~

~~$$4x^2 - 2x + 7 - 1 - 16x^2 + 8x = 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}$$~~

Пусть $a = 2x^2 - 3x + 4$, $b = 2x^2 + x + 3$

Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \\ \sqrt{a} = \sqrt{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases}$$

Вернемся к x :

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3} = 1 & (1) \\ 2x^2-3x+4 = 2x^2+x+3 \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3$$

Решим (1)

$$\sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3} = 1 \Rightarrow 2x^2-3x+4 + 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} + 2x^2+x+3 = 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 2x - 6 = -2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} \quad | : (-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x^2 + 3 - 2x)^2 = (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^4 + 9 + 4x^4 + 12x^3 - 12x^2 = 4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 6x^3 - 3x^2 - 9x +$$

$$+ 8x^2 + 4x + 12 \Rightarrow 4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 6x + 9 = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11x^2 + 6x + 9 - 11x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow 22x^2 - 11x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset \quad D = 121 - 264 < 0$$

Вернемся к совокупности:

$$\begin{cases} x \in \emptyset \\ -4x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Проверка: $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{8} + 3\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{8} + 3\frac{1}{4}} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{Верно}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2
□3

4
☒

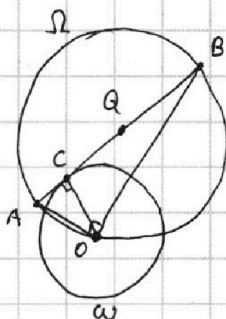
5

6
□7
□

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

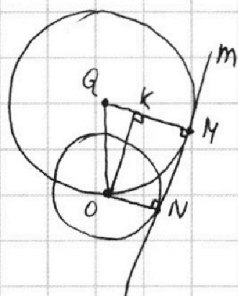


Пусть O - центр окр. ω , r - её радиус,
 Q - центр окр. Ω , R - её радиус.

Проведём отрезки AO и BO .
 AB - диаметр окр. Ω , $O \in \Omega$. Значит,
 $\angle AOB = 90^\circ$ и $\triangle AOB$ - прямоугольный

AB касается ω , OC - радиус окр. $\omega \Rightarrow$
 $\Rightarrow OC \perp AB$.

Пусть $\angle ABO = \beta$. Тогда $\angle COB = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle AOC = 90^\circ - \angle COB = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta = \angle ABO$

$$\Delta CBO \sim \Delta COA \text{ по двум углам} \Rightarrow \frac{CB}{CO} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow r = CO = \sqrt{BC \cdot AC} \Rightarrow$$
$$AB - \text{диаметр окр } \Omega \Rightarrow AB = 2R \Rightarrow R = \frac{AC + BC}{2} = \frac{14 + 6}{2} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$$


Пусть t — ^{прямая, содержащая} общая касательная к двум окружностям и окр. Ω касается t в точке M , а окр. ω касается t в точке N .

Значит, $OM \perp m$ и $ON \perp m$, как радиусы

Вспустим перпендикуляр OK из точки O на QM .
 $K \in [QM]$, т.к. $R > r$.

$$OK \perp KM, KM \perp m, ON \perp m \Rightarrow OKMN - \text{прямоугольник} \Leftrightarrow \Rightarrow MN = OK$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник QKO .

$$QK = R - r, \quad QO = R, \quad OK = MN.$$

По теореме Пифагора, $OK^2 = OQ^2 - QK^2 \Rightarrow MN^2 = R^2 - (R-r)^2 =$
 $= (R-R+r)(R+R-r) = \underline{2Rr - r^2}$

$$MN = \sqrt{2 \cdot \frac{12}{2} \cdot 4 - 4^2} = \sqrt{17 \cdot 4 - 16} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

Общие касательные к двум данным окружностям равны

Amberm: $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

По условию, $x, y, z \in \mathbb{R}$ и $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ (3x+2y)(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}) = 2 \cdot \frac{2}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ 9+3\frac{x}{y} + 6\frac{y}{x} + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ (x+2y)(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -4y = z \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \quad (2)$$

Разберем два случая:

① Пусть $\begin{cases} x = -2y \\ z = -4y \end{cases}$. Тогда $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} =$
 $= \frac{-16y^2 + 12y^2 - 4y^2}{-2y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$

② Пусть $\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$. Тогда $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} =$
 $= \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$

~~$\frac{2}{5} < 4$~~ Знаем ^{значим} наибольшее возможное выражение $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$

равно ~~$\frac{2}{5}$~~ 4

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Пусть расстояние между пунктами А и В равно S (км),
 v_M (км/ч) - скорость мотоциклиста, v_B (км/ч) - скорость велосипедиста

По условию,

$$\begin{cases} \frac{S}{v_B} - \frac{S}{v_M} = 2 \\ v_M \cdot \frac{S}{v_B} - v_B \cdot \frac{S}{v_M} = 96 \\ \frac{S}{v_B+6} - \frac{S}{v_M+6} = 1\frac{15}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \left(\frac{v_M - v_B}{v_M v_B} \right) = 2 \quad (1) \\ S \left(\frac{v_M^2 - v_B^2}{v_M v_B} \right) = 96 \quad (2) \xrightarrow{(2):(1)} \\ S \left(\frac{v_M - v_B}{(v_B+6)(v_M+6)} \right) = \frac{5}{4} \quad (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S \frac{v_M - v_B}{v_M v_B} = 2 \\ \frac{(v_M - v_B)(v_M + v_B)}{v_M - v_B} = 48 \quad \text{т.к. } v_M \neq v_B \\ \frac{(v_B+6)(v_M+6)}{v_M v_B} = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2 v_M v_B}{v_M - v_B} \\ v_M + v_B = 48 \\ \frac{v_M v_B + 6 v_B + 6 v_M + 36}{v_M v_B} = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{2 v_M v_B}{v_M - v_B} \\ 1 + \frac{6 \cdot 48 + 36}{v_M v_B} = \frac{8}{5} \quad (4) \\ v_M + v_B = 48 \end{cases}$$

Решим (4): $\frac{36 \cdot 9}{v_M v_B} = \frac{3}{5} \quad | :3 \Rightarrow \frac{36 \cdot 3}{v_M v_B} = \frac{1}{5} \Rightarrow v_M v_B = 36 \cdot 3 \cdot 5$

вернёмся к системе:

$$\begin{cases} S = \frac{2 v_M v_B}{v_M - v_B} \\ v_M + v_B = 48 \quad (5) \\ v_M v_B = 36 \cdot 15 \quad (6) \end{cases} \xrightarrow{(5)^2 - 4 \cdot (6)} \begin{cases} S = \frac{2 v_M v_B}{v_M - v_B} \\ v_M v_B = 36 \cdot 15 \\ v_M^2 + 2 v_M v_B + v_B^2 - 4 v_M v_B = 48^2 - 4 \cdot 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2 v_M v_B}{v_M - v_B} \\ (v_M - v_B)^2 = 36 \cdot 4 \\ v_M v_B = 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2 v_M v_B}{v_M - v_B} \\ v_M - v_B = 12 \\ v_M v_B = 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{2 \cdot 36 \cdot 15}{12} \Rightarrow S = 90 \text{ (км)}$$

Ответ: 90 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) = CD = a \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$(2) \rightarrow (3): \frac{2\sqrt{2}a}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{CD}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{a \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sin(45^\circ + \alpha)}$$

$$\frac{2\sqrt{2}a}{\sin 2(45^\circ + \alpha)} = \frac{a \sin \alpha}{\sin 2\alpha \sin(45^\circ + \alpha)} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2 \sin(2 - 45) \cos(2 - 45)} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha \sin(45^\circ + \alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cdot \sin(2 - 45^\circ) \cos(2 - 45^\circ)}$$

$$\text{Значит, } ED = 2\sqrt{2}a \cdot \frac{2\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(2 - 45^\circ) \cos(2 - 45^\circ)}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = 8$$

Ответ: 8.



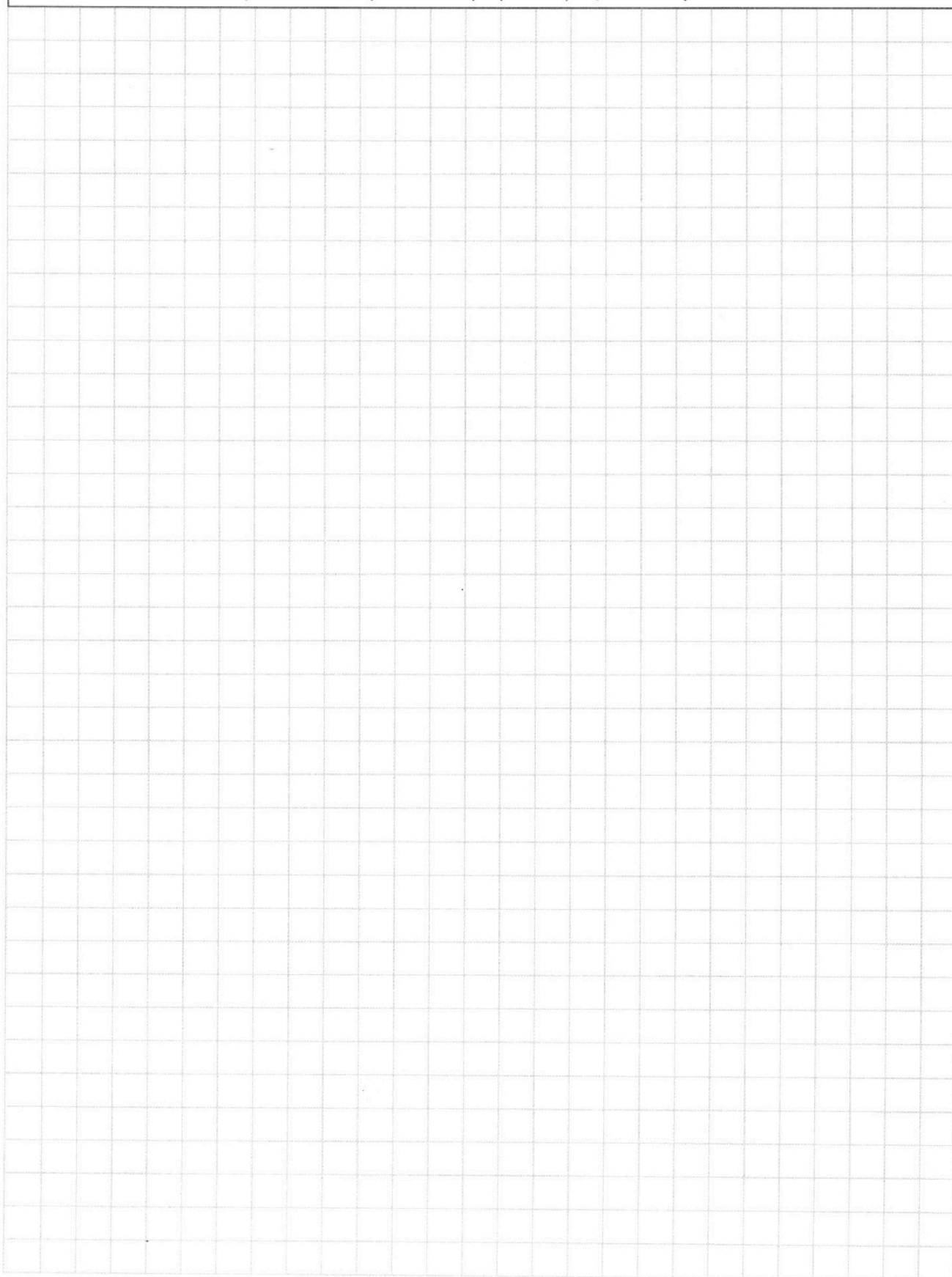
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 3^{11} 7^{11} \\ bc &: 3^{18} 7^{16} \\ ac &: 3^{21} 7^{38} \\ a &= a' 3^{d_1} 7^{d_2} \\ c &= c' 3^{d_1} 7^{d_2} \\ a'c' &: 3^{d_1} 7^{d_2} \end{aligned}$$

$$b = b' 3^{p_1} 7^{p_2}$$

$$\begin{aligned} a &= 3^{26} \\ b &= 7^{11} \\ c &= 7^{38} \end{aligned}$$

$$3^{25} 7^{33}$$

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 3 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

$$d_1 + d_2 \geq 21$$

$$d_2 + d_2 \geq 38$$

$$d_1 + p_1 \geq 11$$

$$d_2 + p_2 \geq 11$$

$$p_1 + p_2 \geq 18$$

$$p_2 + p_2 \geq 16$$

$$2(d_1 + p_1 + p_2) \geq 50 \Rightarrow d_1 + p_1 + p_2 \geq 25$$

$$2(d_2 + p_2 + p_2) \geq 65 \Rightarrow d_2 + p_2 + p_2 \geq 33$$

$$38 + 11 + 16 = 49 + 16 = 65$$

$$d_2 + p_2 \geq 38$$

$$d_2 + p_2 + p_2 \geq 27$$

$$a^2 - 8ab + 16b^2 - 15b^2$$

$$(a - 4b)^2 - 15b^2 : m$$

$$ab : m$$

$$a^2 - 8ab + b^2 : m$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$10ab : m$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$$a+b : m \Rightarrow a^2 + ab : m$$

$$a^2 - 8ab + b^2 : m$$

$$ab + b^2 : m$$

$$b^2 - 9ab : m$$

$$b(b - 9a) : m$$

$$a(a - 9b) : m$$

$$a^2 - b^2 : m$$

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow 3yz + xz = 2xy$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$a^2 - 8ab + b^2$$

$$\frac{D}{4} = 16b^2 - b^2 = 15b^2$$

$$(a, b) = 1$$

$$a+b : m$$

$$a^2 - 8ab + b^2 : m$$

$$a^2 - b^2 : m$$

$$(a^2 - b^2)^2 = 6ab : m$$

$$6ab : m$$

$$18ab : m$$

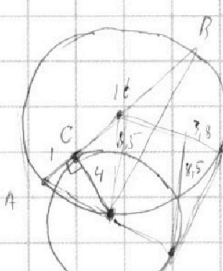
$$4ab : m$$

$$2ab : m$$

$$\frac{17}{5} a = \frac{4b \pm b\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{17}{2} \cdot 4$$

$$\sqrt{2549}$$

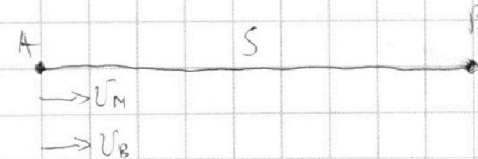


$$6 \cdot 6 \cdot 8 = 36 \cdot 8 = 36 \cdot 4$$

$$\frac{2 \cdot 36 \cdot 15}{x} = 15 \cdot b$$

$$(2a - 2b + 1)^2 = a^2 + b^2 - 8ab + 4a - 4b$$

$$2a - 2b + 1 : m$$



$$-\frac{S}{U_M} + \frac{S}{U_B} = 27$$

$$-\frac{8}{U_M} \cdot U_B + \frac{S}{U_B} \cdot U_M = 96$$

$$S \left(\frac{U_M}{U_B} - \frac{U_B}{U_M} \right) = 96$$

$$S \left(\frac{U_B - U_M}{U_M U_B} \right) = 27$$

$$6 \cdot 8^2 = 36 \cdot 64 - 4 \cdot 36 \cdot 15 = 36(64 - 60)$$

$$S \left(\frac{U_M - U_B}{U_M U_B} \right) = 96$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $a, b, c \in \mathbb{N}$

№2 $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$, нечетн.

№3 $\text{по корням } \geq 0, \text{ значения, максимум}$

№4

№5 $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \neq 0, x^2 - 6y^2 \neq 0$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$(2x^2 - 3x + 4) / (2x^2 + x + 3) =$$

$$D = 9 - 2 \cdot 4 \cdot 4 < 0$$

$$= 4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 6x^3 - 3x^2 - 9x +$$

$$2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}) + 4 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16})^2 - 1\frac{1}{8} + 4 + 8x^2 + 4x + 12 =$$

$$2(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16})^2$$

$$= 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$4x^2 - 8x + 7 = 2\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12} = 1 + 16x^2 - 8x$$

$$6x - 12x^2 + 6 = 2\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12} \quad \sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$36x^2 + 144x^4 + 36 = 144x^3 + 72x - 144x^2 \quad 2x^2 - 8x + 15x + 4 \quad 2x^2 - 8x + 9x + 3$$

$$6(-2x^2 + x + 1) = 2\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12}$$

$$3(x - 2x^2 + 1) = \sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12}$$

$$9(x^2 + 4x^4 + 1 - 4x^3 + 2x - 4x^2) = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$36x^4 - 36x^3 - 27x^2 + 18x + 9 = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = 0$$

	32	-32	-38	23	-3
$\frac{1}{2}$	32	-16	-46	$\frac{23}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$	32	-48	-14	30	
$\frac{1}{4}$	32	-24	-50		
$-\frac{1}{4}$	32	-40	-28	30	

$$a = 3^{20}$$

$$b = 3^{19}$$

$$c = 3^{18}$$

$$a^2 + ab + b^2$$

$$a = 3^{20}$$

$$b = 3^{19}$$

$$c = 3^{18}$$

$$ab : 3^{27}$$

$$bc : 3^{18} 7^{16}$$

$$ac : 3^{21} 7^{28}$$

$$ab = x 3^{27}$$

$$bc = y 3^{18} 7^{16}$$

$$ac = z 3^{21} 7^{28}$$

$$b^2 = \frac{x}{z} y 3^{87}$$

$$22 \cdot 3 \cdot 4 = 11 \cdot 2 \cdot 12$$

$$\frac{18}{264}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{z} \frac{1}{3^{10} 7^{12}}$$

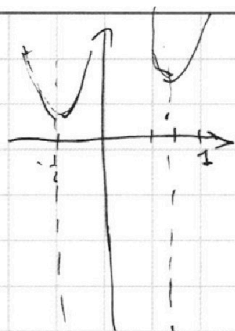
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{37}{8}$$

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{7}{8}$$

$$a = 2x^2 - 3x + 4$$

$$b = 2x^2 + x + 3$$

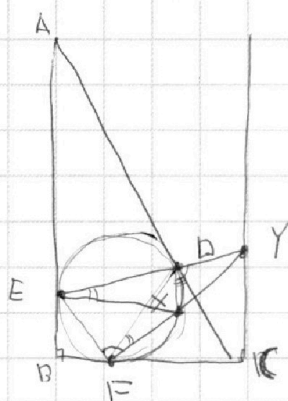
$$a - b = 1 - 4x$$

$$a + b - \sqrt{ab} = a - b$$

$$2b = 2\sqrt{ab}$$

$$b = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$



$$\text{НОД}(a^2 - 8ab + b^2, a + b)$$

$$(a^2 - 8ab + b^2, a + b) = (a^2 - 8ab + b^2,$$

$$a^2 + ab) = (b^2 - 9ab, a^2 + ab) =$$

$$= (-10a, -10ab) (a + b, +10ab)$$

$$(a^2 - 8ab + b^2, a + b) = (b^2 - 9ab, a + b) =$$

$$(10ab, a + b)$$

$$(a, b) = 1$$

$$10ab - 10a - 10b = 10a(b - 1) - 10b + 10 \equiv 10$$

$$(a - 1)(b - 1) \equiv$$

$$(10a - 10b)$$

$$10(a - 1)(b - 1) \equiv 10$$

$$4x^2 - 2x + 7 - 1 = -2\sqrt{ab}$$

$$a + b - 1 + 2\sqrt{ab} = 0$$

$$4ab = 1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2ab$$

$$a^2 + b^2 + 1 - 2a - 2b + 2ab = 4ab$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 - 2ab - 1$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + 1 - 2(a + b)$$

$$(a - b)^2 - 2(a + b) + 1 = 0$$

$$-2a - 2b - 2ab = 2b(a + 1) - 2a - 2 + 3$$

$$4x^2 - 2x + 7 - 1 = -2\sqrt{ab}$$

$$2x^2 - x + 3 = -\sqrt{ab}$$

$$4x^4 + x^2 + 9 - 4x^3 - 12x^2 - 6x = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$2x^2 + x + 3 = 0$$

$$D = 1 -$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$$a + b \equiv m$$

$$a^2 - 8ab + b^2 - 15b^2 = (a - 4b)^2 - 15b^2 \equiv m$$

$$a^2 - b^2 \equiv m$$

$$15a^2 - 15b^2 \equiv m$$

$$16a^2 - 8ab + 16b^2$$

$$8(4a^2 - 2ab + 4b^2) \equiv m$$

$$8($$

$$38, 3/4$$

$$38 - 28 = 10$$

$$10(a - 1)(b - 1) \equiv 10$$

$$10(a - 1)(b - 1) - 1 \equiv 0$$

$$a + b \equiv 10ab \equiv 0$$

$$a + b - 10ab \equiv 0$$

$$a(1 - 10b)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2$$

$$g + 2 + \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} = 2$$

$$(a+b, +10ab) = (a+b, 10((a-1)/(b-1) - 1))$$

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = -3$$

$$10abx - 10a - 10b = 10a(b-1) - 10b + 10 - 10$$

$$x^2 + 2y^2 = -3xy$$

$$10(a-1)/(b-1) - 10$$

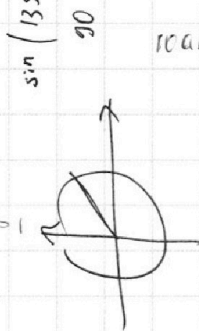
$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$10((a-1)/(b-1) - 1) : m$$

$$a = g - 8 = 1$$

$$10(a-1)/(b-1) - 1 = m$$

$$(x - 2y)(x - y) = 0$$



$$0.6 + 7.2 - 0.6$$

$$0.6 + 7.2 - 0.6$$

$$0.6 + 7.2 - 0.6$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin(45^\circ + t)} = \frac{x}{\sin t}$$

$$\frac{DY}{FY} = \frac{XY}{EY}$$

$$DY + ED$$

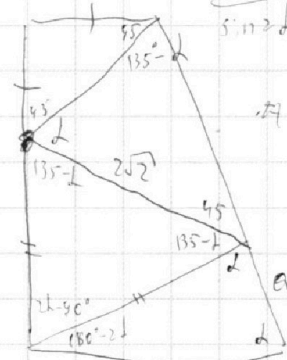
$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$$

$$\frac{EX}{FD} = \frac{XY}{DY}$$

$$\frac{FD}{DY} = 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + x^2 + y^2$$

$$2x^2 + 2y^2$$



$$180^\circ - 115^\circ$$

$$135^\circ - t$$

$$180^\circ - 2t$$

$$90^\circ - (180^\circ + 2t)$$

$$2t - 90^\circ$$

$$180^\circ -$$

$$270^\circ - 2t$$

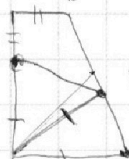
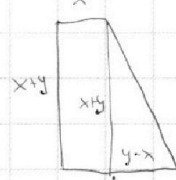
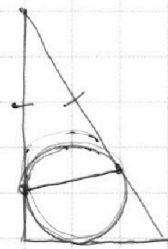
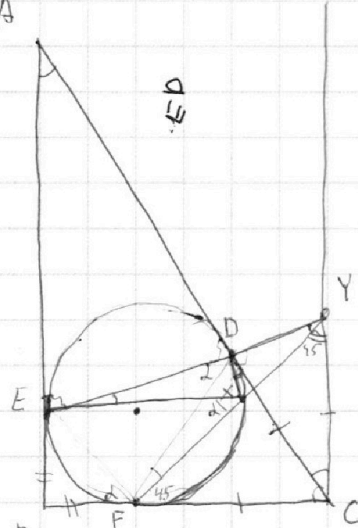
$$4, 135^\circ - t$$

$$\frac{ED}{\sin t} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sin(135^\circ + t)}$$

$$ED \cos(180^\circ - 2t) = -\cos 2t$$

$$\frac{CD}{\sin(45^\circ + t)} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sin(2t - 90^\circ)}$$

$$\frac{CD}{\sin(45^\circ + t)} = \frac{a}{\sin 2t}$$



$$\frac{a}{\sin 2t} = \frac{CD}{\sin t} = \frac{2\sqrt{2}a \sin 45^\circ \sin 2t}{\cos 2t \sin 2t}$$

$$\frac{CD}{\sin(45^\circ + t)} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sin \cos 2t}$$



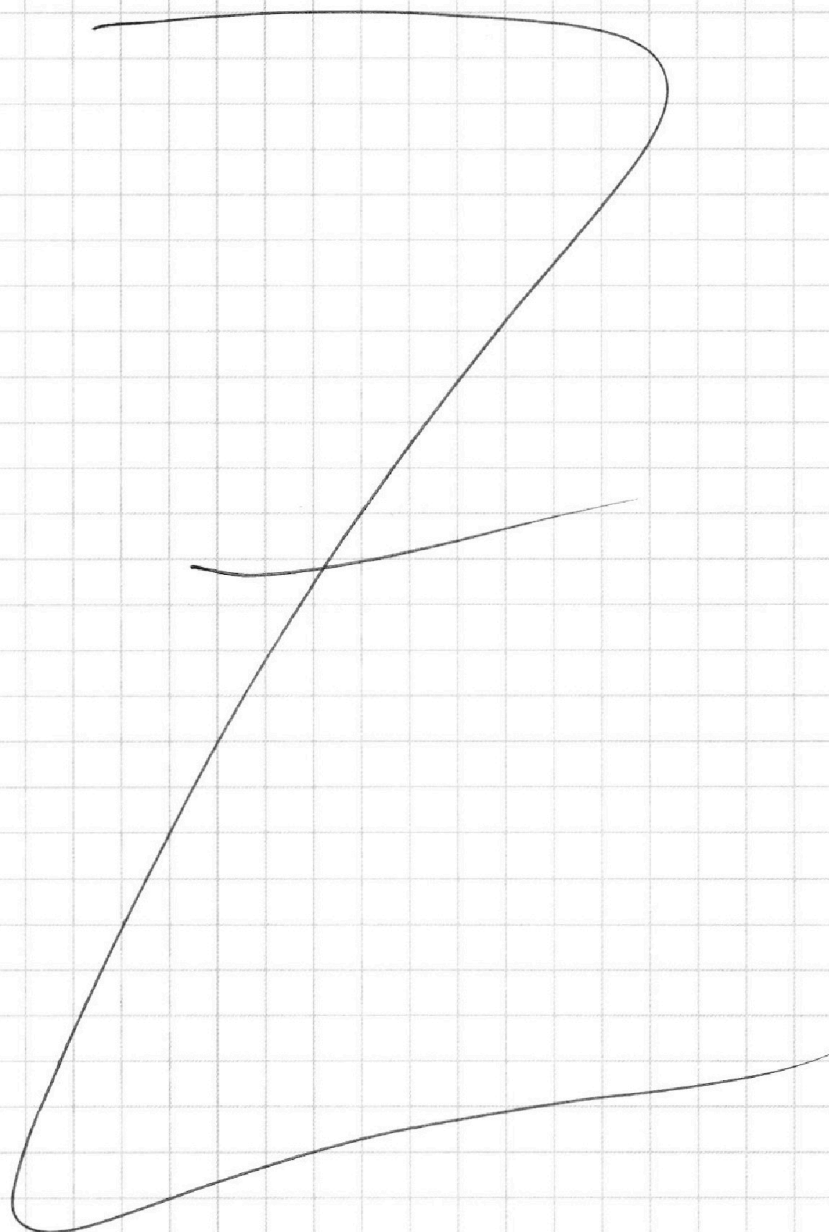
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

