



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA$ ,  $AB$ ,  $BC$  в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

Если  $ab$  делится на  $3^{14} \cdot 7^{13}$ , то  
в разложении  $ab$  на множители  
есть  $3^{14} \cdot 7^{13}$ , а значит  
для  $bc$  и  $ac$ . Перемножив  
 $ab \cdot bc \cdot ac$ , мы в разложении  
этого числа на множители  
будем  $3^{14+13+13} \cdot 7^{13+14+14} = 3^{40} \cdot 7^{41}$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2$$

$$abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2}$$

значит  $abc$  делится на  
 $3^{\frac{40}{2}} \cdot 7^{\frac{41}{2}} = 3^{20} \cdot 7^{20.5}$

Наименьшее натуральное  
число, деленное

на  $3^{20} \cdot 7^{20.5}$  —  $3^{20} \cdot 7^{21}$  ( $a, b, c$  — натуралы)

Ответ:  $3^{20} \cdot 7^{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

Заметим, что градус <sup>написаны</sup> многочлена  
сопоставим на канонический  
одному элементу множеств  
и знаменателю.

~~Выводим~~ его по алгоритму  
Евклида

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 1ab + b^2) = (a+b, a - 1ab)$$

Мы взяли из правой части  
( $a+b$ ) при этом из НОД не

изменился, заметим, что  
 $\text{НОД}(a, -b) = \text{НОД}(a, b)$

$$\text{НОД}(a+b, -1ab) = \text{НОД}(a+b, 1ab)$$

Пусть  $a$  и  $b$  делятся на простое  $p$ ,  
тогда  $a$  или  $b$  делится на  $p$ .

Пусть это  $a$ , но тогда  $b$  на него  
не делится, иначе  $a$  сократимо.

Оно из нас делится на  $p$ , а другое - нет.

Значит и их сумма не делится.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

аналогично если в глоссарии  
на р. значим  $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$ ,

если  $a$  и  $b$  взаимно просты  
 $a+b$  не имеет общих множителей с  
 $ab$ , но помет глоссария "р. 11",  
получается  $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$   
и  $m = 11$

Пример  $a = 5$   $b = 6$

$$\frac{5+6}{5^2 - 9 \cdot 5 \cdot 6 + 6^2} = \frac{11}{-209} = -\frac{1}{19}$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad | \cdot \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6}^2 - \sqrt{3x^2 + x + 1}^2 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$-3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$-6x + 5 = (-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

Значит, переносим в левую часть, так как  
 $3x^2 - 5x + 6$  и  $3x^2 + x + 1$  — многочлены

при заданных значениях  $x$ ,  
 так как  $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0$  и  $D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 < 0$ , то корни

нет, и многочлены не факторизуются

$$0 = (-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1)$$

Правая часть выражения равна 0

при  $(-6x + 5) = 0$  или  $(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1) = 0$   
 $-6x + 5 = 0$  при  $x = \frac{5}{6}$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6}\right) + 6} = \sqrt{\frac{25}{12} - \frac{25}{6} + 6} = \sqrt{\frac{25}{12} - \frac{50}{12} + \frac{72}{12}} = \sqrt{\frac{47}{12}} > 1, \sqrt{3x^2 + x + 1} > 0,$$

$$\text{значит } \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1 > 0$$

Получается  $x = \frac{5}{6}$

Ответ:  $\frac{5}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение

$$OO'^2 = O'C'^2 + OC'^2$$

$$OC = \sqrt{OO'^2 - O'C'^2} = 4$$

И

$$OC = \sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$OC = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow OC = 5$$

Проведем окружность касательную  
 $DE$  на  $\omega$  и  $E$  на  $\Omega$

Окружность перпендикулярна  $\omega$   
и  $O$  на  $O'E$ . Получается про

прямоугольник  $DEKO$

Углы  $\angle ODE, \angle DEK$  равны  $90^\circ$  между  
радиусом и касательной.

$\angle EKO = 90^\circ$  перпендикуляр к  $O'E$

$$DE = KO = \sqrt{OO'^2 - KO'^2} \text{ по теор. Пифагора.}$$

$$OO' = 13 \quad KO' = 13 - EK = 13 - OD = 13 - 5 = 8$$

$$DE = KO = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$$

Ответ.  $\sqrt{105}$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

умножим

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \quad \text{и} \quad 5x - y = 3z$$

$$\left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y}\right)(5x - y) = \frac{15}{2} \cdot 3z$$

$$40 - \frac{8y}{x} - 1 + \frac{5x}{y} = 45$$

$$6 = \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} \quad | \cdot \frac{x}{y}$$

$$6 \frac{x}{y} = \frac{5x^2}{y^2} - 8$$

введём замену  $\frac{x}{y} = t$

$$5t^2 - 6t - 8 = 0$$

$$(5t + 4)(t - 2) = 0$$

$$\begin{cases} t = -\frac{4}{5} \\ t = 2 \end{cases}$$

введём  
обратную замену

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{4}{5} \\ y = 2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 3z$$



$$5x = 3z + y$$

$$\frac{8}{-x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$



$$\frac{1}{y} = \frac{15}{z} - \frac{8}{x} \quad \frac{8}{x} = \frac{15}{z} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{8}{5} = 5 + \frac{15y}{z} - 1 - \frac{3z}{y} \quad | \cdot \frac{y}{z}$$

$$0 = \frac{12y}{5z} + \frac{15y^2}{z^2} - 3$$



Введем замену  $\frac{y}{z} = q$

$$0 = \frac{12}{5}q + 15q^2 - 3$$



$$0 = 12q + 75q^2 - 15$$



$$0 = q^2 - \frac{4}{15}q - \frac{1}{5}$$



$$0 = (q - \frac{2}{15})^2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{225}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и б

Пусть расстояние от А до В  $l$ ,  
скорость велосипедиста  $v$   
моториста  $v_0$  и  $v_m$  соответственно.  
Когда ~~после~~  $\frac{l}{v_0}$  и  $\frac{l}{v_m}$  - время,  
за которое велосипедист и  
мотористы проехали от А до  
В соответственно

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{l}{v_0} - \frac{l}{v_m} = 17 \cdot l \cdot v_0 \cdot v_m \\ \frac{l}{v_0} \cdot v_m - \frac{l}{v_m} \cdot v_0 = 49 \text{ км} \cdot l \cdot v_0 \cdot v_m \\ \frac{l}{v_0 + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} - \frac{l}{v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = 0,67 \cdot (v_0 + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} l v_m - l v_0 = 17 \cdot l \cdot v_0 \cdot v_m \\ l v_m^2 - l v_0^2 = 49 \text{ км} \cdot l \cdot v_0 \cdot v_m \\ l (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) - l (v_0 + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) = 0,67 \cdot (v_0 + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \end{cases}$$

$$l v_m^2 - l v_0^2 = 49 \text{ км} \cdot l \cdot v_0 \cdot v_m \quad | : v_0^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~прогнозировать~~

~~$$l \frac{v_m^2}{v_b^2} - l = 49 \text{ км} \frac{v_m}{v_b}$$~~

~~В обеих замеры  $\frac{v_m}{v_b} = k$~~

~~$$l k^2 - l - 49 \text{ км} k = 0$$~~

В обеих замеры

$$\frac{l}{v_m} = t_m \quad \frac{l}{v_b} = t_b$$

из пропорции  $v_m = \frac{l}{t_m} \quad v_b = \frac{l}{t_b}$

$$t_b - t_m = 17$$

$$t_b \cdot \frac{l}{t_m} - t_m \frac{l}{t_b} = 49 \text{ км}$$

$$t_b = 17 + t_m$$

$$17 + t_m \frac{l}{t_m} - t_m \frac{l}{17 + t_m} = 49 \text{ км}$$

$$t_b = 17 + t_m$$

$$17 \frac{l}{t_m} + l - t_m \frac{l}{17 + t_m} = 49 \text{ км}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

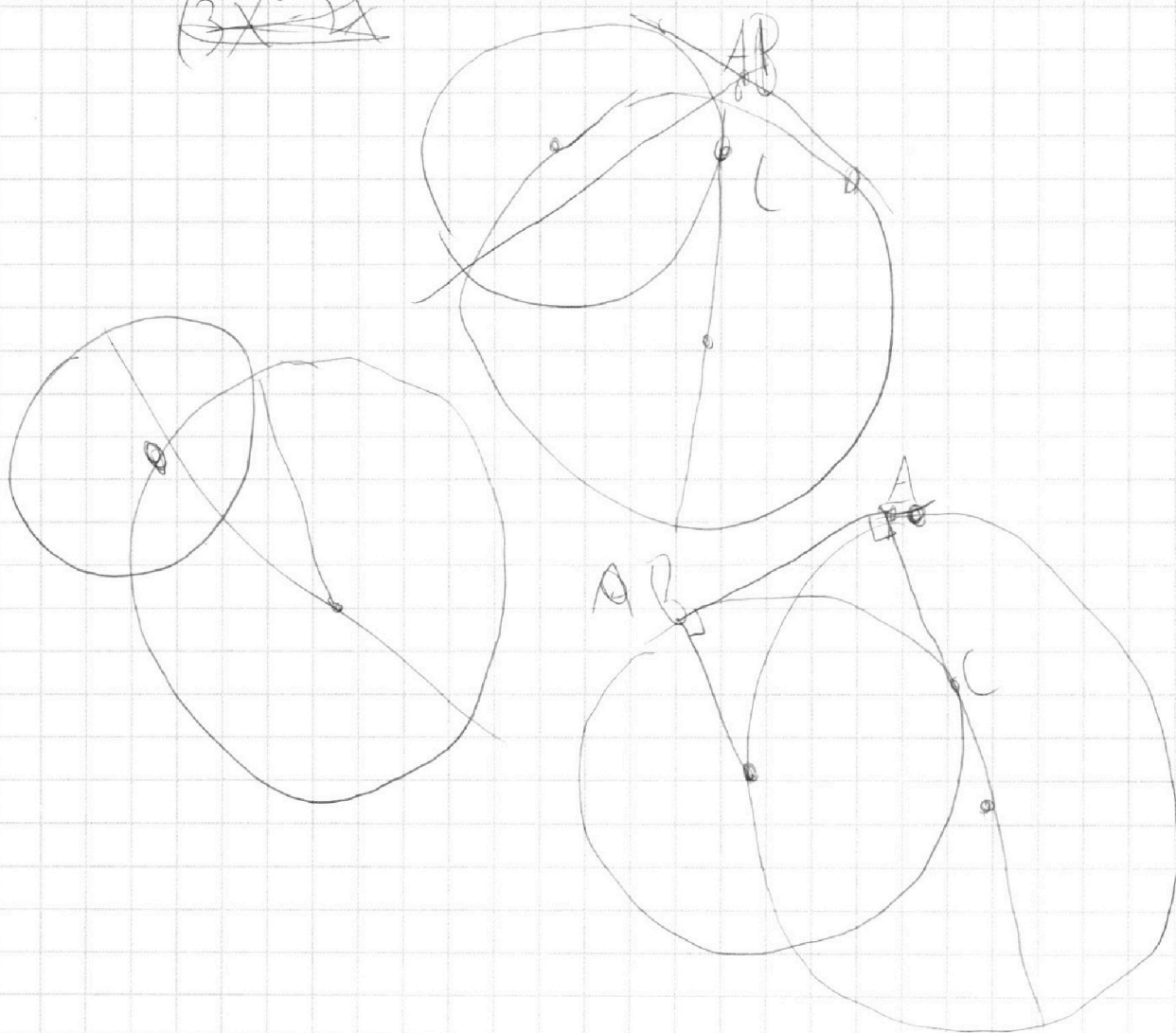
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(3x^2 - 5x + 6) / (3x^2 + x + 1)$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$(3x^2 - 2x)$$



$$-6x + 5 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \frac{x^2 - 5x + 2}{(\sqrt{3}x - \frac{5}{\sqrt{3}})^2 + 3}$$





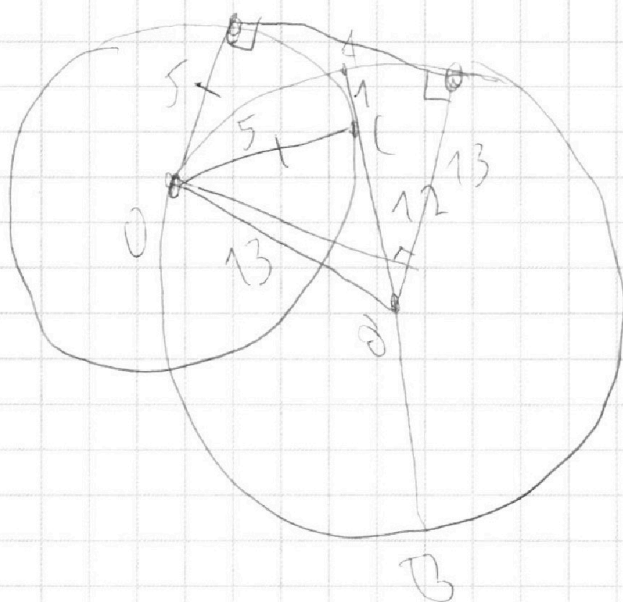
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 1 \frac{5}{6} \\ 7 \frac{1}{6} \\ 4 \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{b} \quad \sqrt{m} \\ l \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ 61 \\ 209 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{\sqrt{b}} - \frac{l}{\sqrt{m}} = 1 \\ \frac{l}{\sqrt{b}} \sqrt{m} - \frac{l \sqrt{b}}{\sqrt{m}} = 49 \\ \frac{l}{\sqrt{b}+7} - \frac{l}{\sqrt{m}+7} = 0,6 \end{array} \right.$$