



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что мотоциклистику на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 3^{14} \cdot 7^{13} \quad bc : 3^{19} \cdot 7^N \quad ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

найдем наименьшее значение $a^2 b^2 c^2 : 3^{56} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc : 3^{28} \cdot 7^{42}$

но заметим $ac : 7^{42} \Rightarrow abc$ минимум $: 7^{42} \Rightarrow abc : 3^{28} \cdot 7^{42}$

пример $a = 3^3 \cdot 7^{13}$ $abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$
 $b = 3^5 \cdot 1$
 $c = 3^{14} \cdot 7^{29}$

Ответ: $\min abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

a

b - несократимая $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow a+b - \text{НОД}(a+b; a) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; ab) = 1$$

$$\text{НОД}(a+b; b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}$$

$$\text{НОД}(a+b; ab) = 1 \Rightarrow \text{НОД}((a+b)^2; ab) = 1$$

$$m = \text{НОД}(a+b; \text{НОД}((a+b)^2; ab))$$

$$m \leq \text{НОД}((a+b)^2; 11ab), \text{ но т.к.}$$

$$\text{НОД}((a+b)^2; ab) = 1, \text{ то}$$

$$\text{НОД}((a+b)^2; 11ab) = \text{НОД}((a+b)^2; 11) =$$

$$= \text{мндо } 1 \text{ мндо } 11$$

$$m \in \{1, 11\} \Rightarrow \text{макс } m = 11$$

Пример a=5 b=6

$$\frac{11}{11^2 - 11 \cdot 30} = \frac{1}{11 - 30}$$

Ответ: макс m = 11



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

$\sqrt{3}$

$\sqrt{1}$

$D \neq 0$

если x -целый то сдеба должна $5 - 6x$ -целое \Rightarrow и
правильность корней, но не могут быть целыми квадратами

так как квадраты отличаются на 2н+1, т.е. чётное

$$3x^2 - 5x + 6 = \left(\sqrt{3}x - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{12} \rightarrow \text{квадрат}$$

ненулевые

~~также~~ ~~квадрат~~

$$\Rightarrow \text{только когда равны } 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1$$

$$-6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \text{сдеба } 0 = 5 - \frac{5}{6} \cdot 6 = 0$$

верно

$$\text{ответ: } x = \frac{5}{6}$$

~~решение~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AC + CB = \text{quadrilateral}$$

$$AC fCB = 2EB$$

$$BE = 13 = R$$

$$CE = AE - AC = 12$$

OC + HBr. ~~ice~~-AB-rack n M

$$\Rightarrow OC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 = r$$

КМ-однозадачный

ОКЛКМ — центр оружейной разработки.

ME + km' Ок = 5 ME = 13 ⇒ пробеги ОК 2 ME

T.к МЕ $\geq 0K$, $20K M = c M M K - 90^\circ$, то Газы при $0K$ МЕ

тогда Окні - північного боку т.к сюда не єд

$$\text{Угадано } 98 \Rightarrow MH = Ok = 5 \Rightarrow EA = 13 - 5 = 8$$

$$\Rightarrow \text{no recrease} \quad OI = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$$

$$kM = OH = \sqrt{105} \quad \text{Ответ: единица касательной} = \sqrt{105}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 3z \quad (1) \quad \frac{8}{x+y} = \frac{15}{z} \quad (2)$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{8z^2}{3z^2 + y^2}$$

Ответ: мин $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = 2 \frac{8}{21}$

$$x = \frac{3z+y}{5} \text{ подставим в (2)}$$

$$\frac{40}{3z+y} = \frac{15}{z} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{40}{3z+y} = \frac{15y-z}{zy} \Rightarrow 40zy = 45zy - 3z^2 + 15y^2 - zy$$

$$15y^2 + 4zy - 3z^2 = 0$$

$$D = 16z^2 + 180z^2 = (14z)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-4z \pm 14z}{30}$$

$$\begin{array}{l} 3z+y \neq 0 \\ 3z+5z \neq 0 \end{array}$$

$$y_1 = \frac{z}{3}, y_2 = \frac{z^2}{9}$$

$$y_2 = -\frac{18z}{30} = -\frac{3}{5}z, y_2^2 = \frac{9}{25}z^2$$

$$\frac{8z^2}{3z^2 + y^2}$$

$$\text{если } y_1 \text{ то } \frac{8z^2}{3z^2 + \frac{1}{9}z^2} = \frac{8z^2}{\frac{28}{9}z^2}$$

$$\frac{8 \cdot 9}{28} = \frac{18}{7} = \frac{54}{21}$$

$$\text{если } y_2 \text{ то } \frac{8z^2}{3z^2 + \frac{9}{25}z^2} = \frac{8z^2}{\frac{84}{25}z^2}$$

$$\frac{8 \cdot 25}{84} = \frac{50}{21}$$

$$\frac{50}{21} < \frac{54}{21} \Rightarrow \text{наименшее значение} = \frac{50}{21} = 2 \frac{8}{21}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

U - скорость мотоциклиста

V - скорость велосипедиста $\Rightarrow U > V$

S - путь от А до В

$$\frac{S}{V} - \frac{S}{U} = 1 \quad UU = US - VS = S = \frac{UU}{U-V}$$

$$\frac{S}{V+7} - \frac{S}{U+7} = 0,6 \quad SU - SV = 0,6(VU + 29,4 + 4,2(U+V))$$

$$0,6(VU) = 29,4 + 4,2(U+V)$$

$$2VU = 147 + 21(U+V) = 2US - 2VS = \frac{2VU^2}{U-V} - \frac{2VS^2}{U-V}$$

$$U \cdot \frac{S}{V} - V \cdot \frac{S}{U} = 49 \quad \text{нодставши строка } S = \frac{UU}{U-V}$$

$$\frac{U^2}{U-V} - \frac{V^2}{U-V} = 49 \quad \frac{(U-V)(V+U)}{U-V} = 49$$

$$U+V=49 \quad 2UV = 147 + 49 \cdot 21 = 49 \cdot 24$$

$$\begin{cases} V+U=49 \\ U+V=588 \end{cases} \quad U=49-V \quad \frac{UU}{U-V} = 588 \quad \frac{V^2}{U-V} - 49V + 588 = 0$$

$$U=28 \quad V=21 \Rightarrow S = \frac{588}{49} = 84 \text{ км} \quad \frac{V^2}{U-V} = 49^2$$

$$\text{Проверка: } \frac{S}{U} = 3 \text{ ч} \quad \frac{S}{V} = 4 \text{ ч} \quad V_{12} = \frac{49 \pm 4}{2}$$

$4-3=1$ ч верно

$$\frac{S}{U+7} = 2,4 \text{ ч} \quad \frac{S}{V+7} = 3 \text{ ч} \quad 3 \cdot 2,4 = 0,6 \text{ ч быстр}$$

последнее условие выполняется нормально $\Rightarrow U > V \Rightarrow U=28$

$$U+V=49 \quad \text{и нас } 21+28=49 \Rightarrow \text{быстро}$$

$$V=21$$

Ответ: путь от А до В = 84 км.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

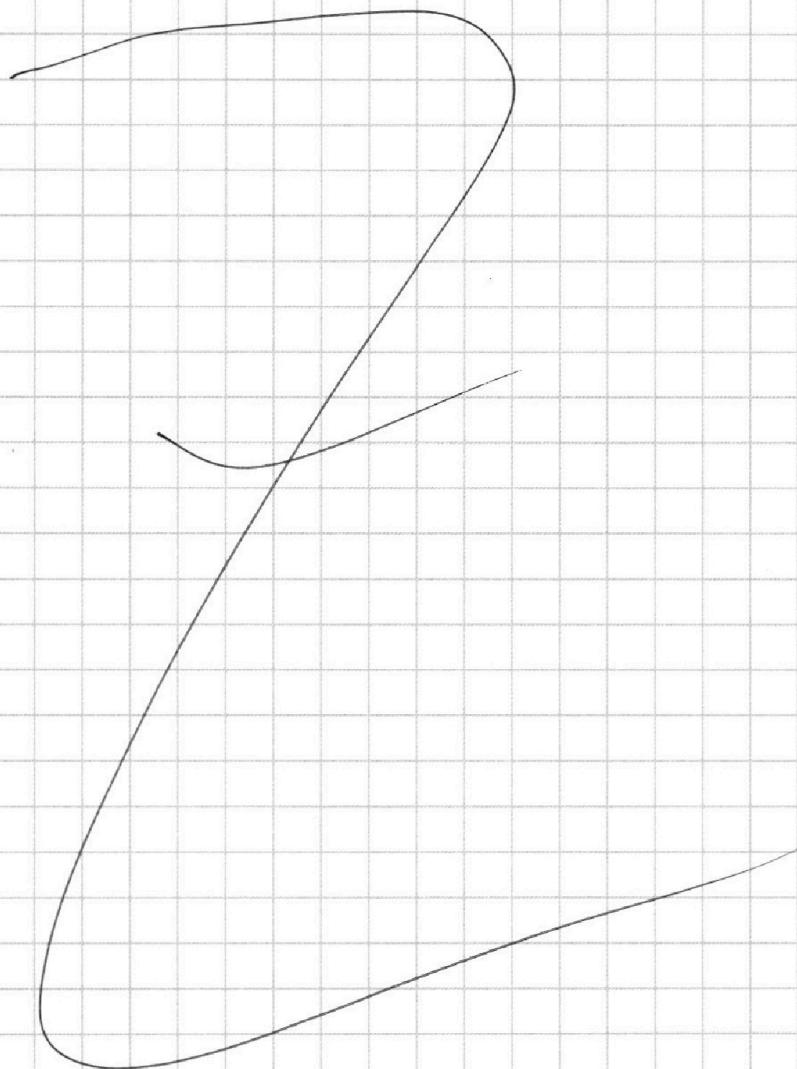
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



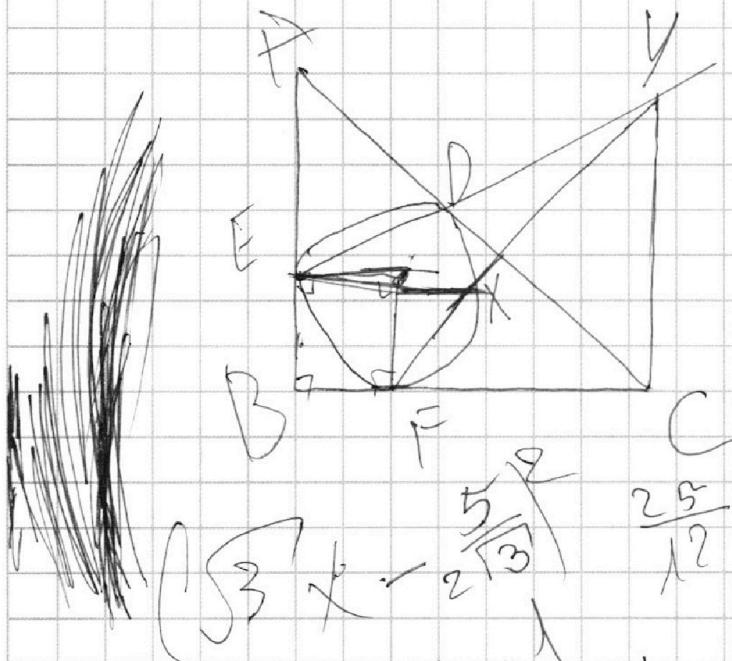
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 8 \\ \hline 2 \\ -3x^2 + x + 2 \\ \hline 2 \\ \leq 5 - 6x. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 6 = 1 \\ 2 \cancel{72} \quad 3x^2 + 4x - 0,5 \leq 0 \end{array}$$

$$x \geq \frac{5}{6}$$

$$-\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$6x^2 - 10x + 12$$

$$2 \cancel{12} \quad 3x^2 - 5x + 7 = \frac{35}{24}$$

$$6x^2 + 2x + 2$$

$$2 \cancel{12} \quad \frac{35}{19}$$

$$2 \cancel{12} \quad x = 2$$

$$\frac{35}{24}$$

Н

$$2 - \cancel{3x^2 - 5x + 4}$$

$$\sqrt{3}x - \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{35}{24}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

u - Скорость мотоциклиста $\Rightarrow u > v$

v - скорость велосипедиста

s - путь от A до B

$$\frac{s}{v} - \frac{s}{u} = 1 \quad vu = us - vs \quad s = \frac{vu}{u-v}$$

$$\frac{s}{v+7} - \frac{s}{u+7} = 0,6 \quad s_v - s_u = 0,6vu + 2,9u + 4,2u + 4,2v$$

$$0,6vu = 2,9u + 4,2(u+v)$$

$$2vu = 14u + 21(u+v) = 2us - 2vs = \frac{2vu^2}{u-v} - \frac{2vu^2}{u-v}$$

$$u - \frac{s}{v} - v \cdot \frac{s}{u} = 4g \quad \text{поставив снова } s = \frac{vu}{u-v}$$

$$\frac{u^2}{u-v} - \frac{v^2}{u-v} = 4g \quad \frac{(u-v)(u+v)}{u-v} = 4g$$

$$u+v = 4g \quad 2vu = 14u + 4g \cdot 2u = 4g \cdot 2u$$

$$vu = 4g \cdot 12 = 588$$

$$u+v = 4g \quad u = 4g - v$$

$$4gV - V^2 = 588 \quad V^2 - 4gV + 588 = 0$$

$$u = 28 \quad v = 21 \Rightarrow s = \frac{588}{7} = 84 \text{ km} \quad D = 4g^2 - 4g \cdot 48 - 4g = 7^2$$

$$\text{проверка: } \frac{s}{u} = 34 \quad \frac{s}{v} = u \quad 4-3=1 \quad V_{1,2} = \frac{4g \pm \sqrt{588}}{2}$$

$$\frac{s}{u+7} = 24 \quad \frac{s}{v+7} = 34 \quad 3-2=1 \quad 0,6vu / vu = 28 \Rightarrow u_1 = 21$$

$$V_2 = 21 \Rightarrow u_2 = 28$$

$$HOU > V \Rightarrow u = 28$$

$$V = 21$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

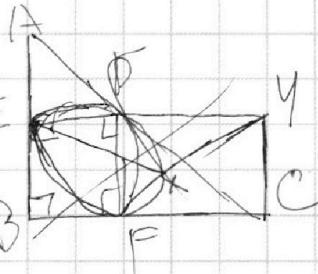
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\frac{\sqrt{3}x + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{но } \frac{6}{10} = \frac{2}{10}$$



$$EX = \sqrt{2}XY$$

$$-5x + 6 - x - 1$$

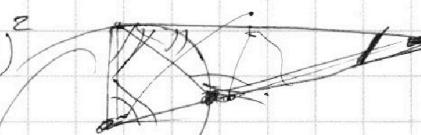
$$-6x + 5$$

49.12

21 28

$$0,4VU = 29,4 + u_2(u+1)$$

$$5 - 6x - 2 \cdot \sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 5 - 6x$$



$$9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6.$$

$$\frac{294}{2} = 147$$

$$3x^2 =$$

$$\frac{84}{35} = \frac{12}{5} = \frac{24}{10}$$

$$S = \sqrt{t(t+1)} = Ut$$

$$\frac{24}{66} = \frac{4}{11}$$

(~~Реш~~)

$$\int \frac{S}{V+7} - \frac{S}{U+7} = 0,6$$

$$\frac{Su - Sv}{(V+7)(U+7)} = \frac{24}{480}$$

~~9~~

~~48~~

~~48~~

~~48~~

$$\frac{S}{V} - \frac{S}{U} = 1$$

$$\frac{Su}{Vs} = \frac{4}{1}$$

$$0,6VU = U^3 - \frac{VS}{U-V}$$

$$\frac{uS - vS}{Vu} = 1 \quad S = \frac{Vu}{U-V}$$

$$uS - vS = Vu$$

$$Su - Sv = 0,6Vu + 0,6 \cdot 49 \frac{Vu}{U-V}$$

