



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



- [4 балла] Натуральные числа a, b , с таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$.

- [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклиstu на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

- [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

Пусть k - наименьшая степень тройки, на которую делится a , l - наименьшая степень тройки на которую делится b , m - наименьшая степень тройки, на которую делится c ($a = 3^k \cdot k_1$, $b = 3^l \cdot l_1$, $c = 3^m \cdot m_1$,

где $k_1, l_1, m_1 \in \mathbb{N}$ и $k \leq l \leq m$)

Если ab делится на 3^n , то $k+l \geq n$ если не делится на 3^n то $k+l < n$, если ac делится на 3^n , то $k+m \geq n$

Составим систему неравенств

$$\begin{cases} k+l \geq n \\ k+m \geq n \\ klm \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l+m \geq 2n \\ k+m \geq n \\ klm \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l+m \geq 25 \\ k+m \geq 18 \\ klm \geq 27 \end{cases}$$

Значит, что так как $k+l+m=25$, то наименьшая степень тройки, на которую делится число abc равна 25

Значит, что так как число abc делится на 3^{28} , то число abc тоже будет делится на 3^{28}

Значит, так как $abc = 3^{25}$ и $abc = 3^{28}$ и $\text{НОД}(3, 7) = 1$, то наименьшее значение abc равно $3^{25} \cdot 7^{28}$

Пример для $abc = 3^{25} \cdot 7^{28}$

$$a = 3^7 \cdot 3^2 \quad b = 3^4 \quad c = 7^{24} \cdot 3^2 \quad \text{тогда}$$

$$ab = 3^7 \cdot 3^2 : 3^7 \cdot 3^2 = 1, \quad bc = 3^4 \cdot 3^{24} : 3^2 \cdot 3^2 = 3^{22}, \quad ac = 3^7 \cdot 3^2 : 3^{24} \cdot 3^2 = 1,$$

$$abc = 3^{25} \cdot 7^{28}$$

Объем: наименьшее значение abc равно $3^{25} \cdot 7^{28}$



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

?

Пусть m - наименьшее натуральное число такое, что
умножить и уделить этим уроки $\frac{a+b}{m=ab+b^2}$ можно скрестить
на m , то есть $a+b : m$ и $a^2 - ab + b^2 : m$

$$\frac{a+b : m}{a^2 - ab + b^2 : m} \Leftrightarrow (a+b)^2 = a^2 - ab + b^2 : m$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 : m \\ a^2 - ab + b^2 : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 : m \\ 10ab : m \end{cases}$$

Получаем, что $a+b : m$ и ~~10ab : m~~ $10ab : m$

Пусть p - простой делитель числа m (p не делит a и b)
(если m) (если $m=1$, то $p=1$)

$10ab : m \Leftrightarrow 10ab : p$, так как p простой и $10ab : p$,
то кроме единицы:

$$10 : p$$

$$a : p$$

$$b : p$$

~~10ab : m~~

$$a+b : m \Leftrightarrow a+b : p$$

~~10ab : m~~ $\Leftrightarrow a : p$, $b : p$

Таким образом мы получаем \star

1. $a : p$

$$\begin{cases} a : p \\ a+b : p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases}$$

но условие $\text{HOD}(a, b) = 1$ (так как уроки $\frac{a}{b}$ скрестить),
если $a : p$ и $b : p$ и $\text{HOD}(a, b) = 1$, то $p = 1 \Rightarrow m = 1$

2. $b : p$

$$\begin{cases} b : p \\ a+b : p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases}$$

но условие $\text{HOD}(a, b) = 1$, если $a : p$ и $b : p$ и $\text{HOD}(a, b) = 1$,
то $p = 1 \Rightarrow m = 1$

3. $10 : p$

$$10 : p \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = 2 \\ p = 5 \end{cases}$$

Значит, что скрестить можно кроме трех простых
делителей числа $m \Rightarrow$ если $m > 1$, то $m = k \cdot 5$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Значит, что (если для каждого простого p , скрестить
число m , кроме, что $10 : p = \begin{cases} p = 2 \\ p = 5 \end{cases}$)



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 (проверено)

$m = k \cdot 5$, значит, что $k \leq 1, l \leq 1$

При условии, что $k > 1$ или $l > 1$, тогда $m \geq 5^2$ или $m \geq 5^2$,
так как $10 \leq m \leq 25$, то или $m \geq 25$ или $m \geq 5^2$, то
 $m \geq 25$ или $m \geq 5^2$ (так как $10 = 2 \cdot 5^2$) =>

$$\Rightarrow (a \geq 2 \text{ или } b \geq 2) \text{ или } (a \geq 5 \text{ или } b \geq 5) \Rightarrow \cancel{\text{противоречие}}$$

~~Несколько противоречий, значит получаем, что $m=4$,~~

~~и это противоречит тому, что $m > 1$~~

~~противоречие, потому что $m \geq 2$, то $a \geq 2$ или $b \geq 2$,~~

~~или $m \geq 5$, то $a \geq 5$ или $b \geq 5$~~ , значит $a+b \geq m$,

~~то $a+b \geq m$, и это противоречие, что $(a \geq 2 \text{ и } b \geq 2)$~~

~~или $(a \geq 5 \text{ и } b \geq 5)$, но $\text{HOD}(a, b) = 1 \Rightarrow$ противоречие~~ =>

$\Rightarrow k \leq 1 \text{ и } l \leq 1 \Rightarrow$ максимальное m равно $2 \cdot 5 = 10$

пример для $m = 10$

$$a = 5, b = 2$$

3

$$\frac{3}{4} - \text{искомое значение уравнения}, \quad a+b=10, \quad a^2-8ab+b^2 = \\ = 15+4^2-8 \cdot 3 \cdot 2 = 9+16-48 = 56-168 = -110$$

уравнение $a^2-8ab+b^2 = -110$ можно скратить на 10 = m

⊕ шаги, когда a и b удаляются из уравнения

Ответ: при $m = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^4 + x + 3} &= 1 - 4x \Rightarrow \\ \Rightarrow (2x^2 - 3x + 4) + (2x^4 + x + 3) - 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^4 + x + 3)} &= 1176x^2 - 8x \Rightarrow \\ \Rightarrow (4x^2 - 2x + 4) - (1176x^2 - 8x) &= 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^4 + x + 3)} \Rightarrow \\ \Rightarrow -1172x^2 + 6x + 6 &= 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^4 + x + 3)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cancel{4x^2} - \cancel{8x^2} + \cancel{4} + \cancel{3} &= \sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^4 + x + 3)} * \\ + (2x^2 - 3x + 4)(2x^4 + x + 3) &= 4x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x^3 - 3x^2 + 4x + 6x^2 - 9x + 12 = \\ = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 & \\ -2x^2 + x + 1 &= \cancel{\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12}} = \cancel{4x^4 + x^2 + 1 - 4x^3 + 2x - 4x^2} = \\ = \cancel{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12} &= -5x^2 + 2x + 1 = 11x^2 - 5x + 12 = \\ \Rightarrow 14x^2 - 4x + 11 &= 0 \\ -6x^2 + 3x + 3 &= \sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12} = 36x^4 + 9x^2 + 9 - 36x^3 - 36x^2 + 16x = \\ = 36x^4 - 36x^3 - 27x^2 + 16x + 9 &= 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 = \\ = 32x^4 - 32x^3 - 36x^2 + 23x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

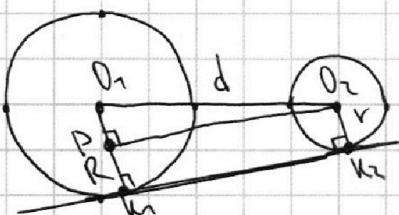


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

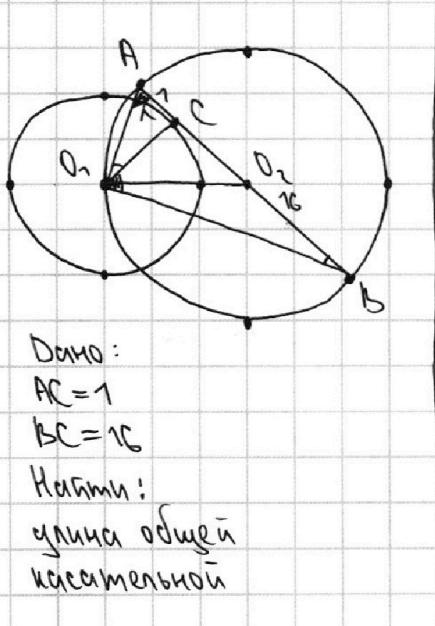
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4



найти формулу для радиусов общих касательных
одной окружности

пусть O_1, O_2 - центры данных окружностей, d - расстояние
между центрами, R и r - радиусы этих окружностей,
угол между перпендикуляром O_1P к O_1k_1 , тогда $P O_2 k_2 K_2$ -
прямоугольник $\Rightarrow P O_2 = K_2 K_2$, $P O_2^2 = O_2 O_2^2 - O_1 P^2 =$
 $= d^2 - (R-r)^2$ (по ТП теоремы Пифагора)



Дано:

$$AC = 1$$

$$BC = 16$$

Найти:

радиусы общей
касательной

Решение:

~~Запишем, что $\angle AOB = 90^\circ$, так как~~

~~AOB - угловой, $\angle O_1CA = 90^\circ$, так как~~

~~AOB - касательный, C - точка касания~~

~~тогда $\angle O_1AO_2 = l$ тогда $\angle AOB = 90^\circ - l$,~~

~~$\angle O_1AB = l$, $\angle C_2B_2O_2 = 90^\circ - l$~~

~~$\sin 90^\circ - l = \frac{OA}{AB} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow OA^2 = AB \cdot AC =$~~

$$= 1 \cdot (1+16) = 17$$

$$\operatorname{tg} l = \frac{AC}{AB} = \operatorname{ctg} 90^\circ - l = \frac{AC}{OC} =$$

$$\Rightarrow OC^2 = AC \cdot CB = 1 \cdot 16 = 16$$

$$\sin l = \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB} = \Rightarrow AB = AC \cdot BC =$$

$$= 16 \cdot (1+16) = 16 \cdot 17 = 272$$

запишем, что O_1O_2 - диагональ $\triangle O_1AB$ (т.к. AB - диаметр и
 O_2 - центр) \Rightarrow ~~$O_1O_2^2 = AB^2 + O_1A^2 = AB^2 + AC^2 =$~~

$$\approx O_1O_2 = \frac{AB}{2} \quad (\text{но мы знали при } \Delta) \Rightarrow O_1O_2 = \frac{AB^2}{l} =$$

$$= \frac{m}{n}$$

Получили что разделив на радиус $O_1C = 4$, получим Ω
радиус $\frac{m}{n} = \frac{17}{2}$, расстояние между центрами O_1O_2 радиус $\frac{m}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ч (продолжение)

запишем формулу общей касательной радиус

$$\sqrt{\frac{172}{4} - \left(\cancel{\frac{17}{4}} \frac{17}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{172}{4} - \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{172-169}{4}} = \\ = \sqrt{\frac{(17-13)(17+13)}{4}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 26}{4}} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Ответ: длина общей касательной равна $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5

но условие $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$\begin{cases} 3x+2y = z \\ 3x + \frac{1}{z}y = \frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y = z \\ 3y + xz = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y = z \\ z = \frac{2xy}{3y+x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y + x \neq 0 \\ 3x + 2y = \frac{2xy}{3y+x} \\ 3x + 2y = z \end{cases}$$

$$3x + 2y = \frac{2xy}{3y+x} \Rightarrow \begin{cases} 3y + x \neq 0 \\ ((3y+x)(3x+2y)) = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + x \neq 0 \\ 3x^2 + 6y^2 + 9xy = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y + x \neq 0 \\ x^2 + 6y^2 + 3xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + x = 0 \\ (x+2y)(x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x+2y = 0 \end{cases}$$

$$3x+2y = z \Rightarrow z = 3x+4y^2+12xy$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - (3x+4y^2+12xy)}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2}$$

разделить на y^2 и упростить

$$1. x+y=0$$

$$\frac{x+y=0 \Rightarrow y=-x}{-6x^2 - 8y^2 - 12xy} = \frac{-6x^2 - 8(-x)^2 - 12x(-x)}{x^2 - 6(-x)^2} = \frac{-6x^2 - 8x^2 + 12x^2}{x^2 - 6x^2} = \frac{-2x^2}{-5x^2} = \frac{2}{5}$$

$$2. x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$$

$$\frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6(-2y)^2 - 8y^2 - 12(-2y)y}{(-2y)^2 - 6y^2} = \frac{-24y^2 - 8y^2 + 24y^2}{4y^2 - 6y^2} =$$

$$= \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

$y > \frac{2}{5} \Rightarrow$ наименьшее значение $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ равно 4

Пример

$$y = 1, x = -2, z = -4, 3x+2y = -6+2 = -4 = z, \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{12 - 4 - 16}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Ответ: 4

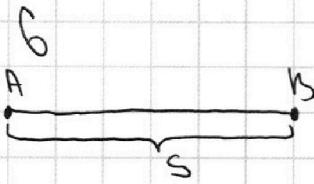
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



пусть V_1 - скорость ~~мотоциклиста~~
 V_2 - скорость ~~мотоциклиста~~,
 S - расстояние между A и B

тогда время, которое потребовалось мотоциклисту на путь
 от A до B равно $\frac{S}{V_1}$, а мотоциклист $\frac{S}{V_2}$
 составил систему уравнений по часам

$$\begin{cases} \frac{S}{V_1} = h + V_2 \\ \frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2} + gG = V_2 \cdot \frac{S}{V_1} \\ \frac{S}{V_1+G} = \frac{S}{h} + V_2 + G \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

$$(1) : V_1 = h + V_2 \Leftrightarrow SV_2 = 2V_1V_2 + SV_1 \Leftrightarrow 2V_1V_2 = SV_2 - SV_1 \quad (5)$$

$$(2) : \frac{S}{V_1+G} = \frac{S}{h} + V_2 + G \Leftrightarrow S(V_2+G) = \frac{S}{h} \cdot (V_1+G) + S(V_1+G) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SV_2 + GS = SV_1 + GS + \frac{S}{h} (V_2+G)(V_1+G) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SV_2 = SV_1 + \frac{S}{h} (V_2+G)(V_1+G) \quad (4)$$

$$(4) - (1) : 0 = \frac{S}{h} (V_2+G)(V_1+G) - 2V_1V_2 \Leftrightarrow 2V_1V_2 = \frac{S}{h} (V_2+G)(V_1+G) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8V_1V_2 = S(V_1+G)(V_2+G) \Leftrightarrow 3V_1V_2 = 180 + 30V_1 + 30V_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_1V_2 = 60 + 10V_1 + 10V_2 \quad (6)$$

$$(2) : V_1 \cdot \frac{S}{V_2} \neq gG = V_2 \cdot \frac{S}{V_1} \Leftrightarrow SV_1^2 \neq gG V_1 V_2 = SV_2^2 \Leftrightarrow gG V_1 V_2 = SV_2^2 - SV_1^2 \quad (7)$$

$$(6) : \frac{gG V_1 V_2}{2V_1 V_2} = \frac{SV_2 - V_1}{S(V_2 - V_1)} \Leftrightarrow 4g = V_2 - V_1 \Leftrightarrow V_1 = 4g - V_2 \quad (4)$$

известно (4) и (6): $V_1(4g - V_2) = 60 + 10(V_1 + V_2) = 60 + 10 \cdot 4g - 5g0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V_1^2 - 4gV_2 + 5g0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} V_2 = 30 & (\text{по теореме Виета}) \\ V_1 = 18 \end{cases}$$

так как $V_1 < V_2$, то $V_1 = 18 \text{ (км/ч)}$, $V_2 = 30 \text{ (км/ч)}$

$$(5) : 2V_1V_2 = S(V_2 - V_1) \quad \text{или} \quad V_1 = 18, V_2 = 30, \text{ то}$$

$$S = \frac{2V_1V_2}{V_2 - V_1} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{30 - 18} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{12} = 90 \text{ (км)}$$

Минимум расстояние между A и B равно 90 км

Объем: 40 км



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$32 - 32 - 36 + 23 - 3 \quad 76 - 36 = 62$$

$$52 + 32 - 36 + 23 - 3$$

$$64 - 62$$

$$\begin{array}{r} 32 - 32 - 36 \quad 23 - 3 \\ -2 \quad 32 \quad 32 \quad 23 \\ \hline 64 - 36 = 28 \end{array}$$

$$32 - 32 - 36 = 28$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ -2 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3122 \\ -23 -312 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 - 32 - 36 \quad 23 \\ -2 \quad 32 - 36 \quad 156 \\ \hline -64 \quad +402 = 156 \\ 152 - 36 = 162 - 156 \\ 156 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + 11x + 3} = 1 - 4x \quad (x=)$$

$$2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + 11x + 3)} = 116x^2 - 8x$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = -6(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{8} - \frac{9}{8}$$

$$2\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = -4x^2 + 16x + 16 - 3(x + \frac{3}{2})^2 + -4x^2 + 3x + 3$$

$$(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + 11x + 3) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{6}{8}x - \frac{432}{8}$$

$$= 4x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x^3 - 3x^2 + 4x + 8x^2 - 9x - 72 =$$

$$= 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x - 72 - 9?$$

$$\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x - 72} = 16x^2 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 24x^2 + 16x$$

$$4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x - 72 = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 24x^2 + 16x$$

$$12x^4 - 20x^3 - 16x^2 + 23x + 72 = 0$$

$$12 - 20 - 26 + 23 + 72$$

$$4 \cdot 4644$$

$$2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + x + 3 = (4x^2 - 2x + 4) - 1 + 16x^2 - 8x$$

$$-12x^2 + x + 1^2 = 4x^4 + x^2 + 1 - 4x^3 - 4x^2 + 7x$$

$$4x^4 + 11x^2 - 4x^3 - 4x^2 + 7x - 2(x^2 - \frac{1}{4})^2$$

$$\frac{1}{16} - 2$$

$$672 = 3^3 \cdot 13^3 \cdot 2^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

v_1 - скорость первого бегущего

v_2 - скорость второго

t_1 - время бегущего, t_2 - время второго.

$\frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_2}$

$$v_1 = v_2 + h$$

1,25

$$t_1 = v_1 t_2$$

$$v_1 t_2 + gS = v_2 t_1$$

$$\frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_2} + 1,25$$

$$\frac{5}{4} (v_1 v_2 + 6 v_1 v_2 + 36)$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = 9$$

$$s v_2 = s v_1 + 2 v_1 v_2$$

$$s v_2 + 6S = s v_1 + 6S + 1,25 (v_1 v_2) =$$

$$\Rightarrow s v_2 = s v_1 + 45 + \frac{5}{4} v_1 v_2 + \frac{15}{2} v_1 + \frac{15}{2} v_2$$

$$2 v_1 v_2 = 45 + \frac{5}{4} v_1 v_2 + \frac{15}{2} v_1 + \frac{15}{2} v_2$$

$$\frac{3}{4} v_1 v_2 = 45 +$$

$$3 v_1 v_2 = 180 + 30 v_1 + 30 v_2 \quad v_1 (v_2 - v_1) = 60 + 10 (v_1 v_2)$$

$$v_1 v_2 = 60 + 10 v_1 + 10 v_2 \quad 4 v_1 v_2 - v_1^2 = 60 + 10 v_1 + 10 v_2 - 10 v_1$$

$$s v_2 \neq s v_1 + 2 v_1 v_2$$

$$540 =$$

$$v_1^2 - 4 v_1 v_2 + 540 = 0$$

$$-\frac{540}{2} : 4 = 135$$

$$\sqrt{270} = \sqrt{135}$$

$$v_1 = 135 \quad v_2 = 135$$

$$v_1 v_2 = 96 \cdot 135 = 135$$

$$s v_2^2 = 96 v_1 v_2 + s v_1^2$$

$$s v_2^2 - s v_1^2 = 96 v_1 v_2$$

$$s v_2 - s v_1 = 2 v_1 v_2$$

$$\frac{s}{v_1 + h} =$$

$$\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{135}{135 + 135}$$

$$v_2 - v_1 = 135$$

$$v_2 v_1 = 135$$

$$v_1^2 - 11 v_1 + 135 = 0 \quad 9$$

$$s = 725 \cdot 135 = 975$$

$$\frac{135}{270} = 15 \cdot 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$r^2 + k^2 = 16^2 \text{ m}^2, \quad k^2 \text{ m}^2 = 14^2$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ - 16 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ - 17 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$256$$

$$255 + 14^2 = k^2$$

$$255 + 196 = k^2$$

$$451 = k^2$$

$$k = \sqrt{451}$$

$$k = 21.2$$

$$k = 21.2$$
</

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} M &= 3^6 \cdot 7^1 \\ a &= 4^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \\ c &= 4^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \\ b &= 4^{16-m} \cdot 5^{11-n} \cdot 7^m \\ b &= 4^{16-m} \cdot 5^{11-n} \end{aligned}$$

24

$$\begin{aligned} a &= 4^1 \cdot 5^6 \\ a &= 4^1 \cdot 5^3 \\ c &= 4^2 \cdot 5^10 \\ b &= 5^8 \end{aligned}$$

25

$$25 - 8^3 = 16^6$$

$$a/b : m$$

$$a^2 - 2ab + b^2 : m$$

$$(a+b)^2 : m$$

$$a^2 + 2ab + b^2 : m$$

$$10ab : m$$

$$10 : p \quad p=2, \quad p=5$$

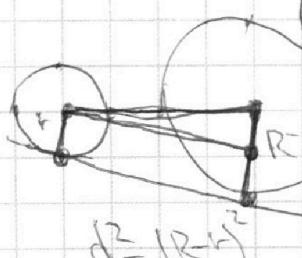
$$\frac{AC}{BC}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$(2x-2)(x-2)$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{AB}{AB}$$



$$d^2 = (R-r)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} &= \frac{c}{b} \\ \sin L &= \cos 90^\circ h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a/b &= 11 & a/c &= 21 \\ c/b &= 18 & \\ a/b/c &= 21 & 21 \cdot 21 &= 50 \\ a = 11 \cdot b & & 21 \cdot 21 &= 50 \\ c = 18 \cdot b & & 25 & \\ 2a - b &= 21 & a/b/c &= 25 \\ b = 8 & & a/b &= 11 \\ c &= 144 & c &= 144 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} : m$$

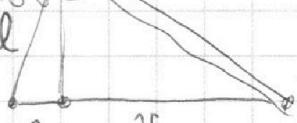
$$10ab : m$$

$$\frac{a}{b} : m$$

$$10ab : m$$

$$21 \cdot 8 = 168$$

$$58 \cdot 168 =$$

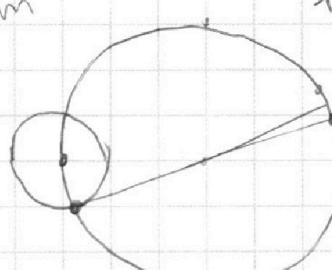


$$\begin{aligned} 10 : m &= m \\ a/m &= m \\ b/m &= m \end{aligned}$$

$$10 : m$$

$$a/m$$

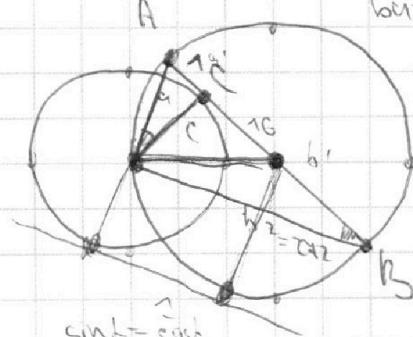
$$b/m$$



$$\frac{b}{b} = \frac{a}{a} =$$

$$ba = ab$$

$$\frac{c}{b} =$$



$$a' =$$

$$\sin L = \cos L$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

