



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

МОТОЦИКЛИСТ

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = 2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$a \in \mathbb{N}$$

$$b \in \mathbb{N}$$

$$c \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} ab : 3^1 \cdot 7^1 \\ bc : 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac : 3^{21} \cdot 7^{38} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc : 3^{11+18+21} \cdot 7^{11+16+38} \\ a^2 b^2 c^2 : 3^{50} \cdot 7^{65} \\ abc : 3^{25} \cdot 7^{32,5} \end{cases}$$

Или  $ac : 7^{38}$ , но  $abc : 7^{38}$ , (знаменн.)

$$abc : 3^{25} \cdot 7^{38} \Rightarrow \min(abc) = 3^{25} \cdot 7^{38}$$

Или  $a = 3^7 \cdot 7^{22}$ ,  $b = 3^4$  и  $c = 3^{14} \cdot 7^{16}$ ,

$$\begin{cases} ab = 3^{11} \cdot 7^{22} \\ bc = 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac = 3^{21} \cdot 7^{38} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab : 3^7 \cdot 7^{11} \\ bc : 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac : 3^{21} \cdot 7^{38} \end{cases}$$

Итого:  $3^{25} \cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2}$

$a \in \mathbb{N}$

$b \in \mathbb{N}$

$a$  и  $b$  - взаимно простые

$$\begin{cases} a+b \equiv m \\ a^2 - 2ab + b^2 \equiv m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 \equiv m \\ (a+b)^2 - 10ab \equiv 0 \\ a+b \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 - 10ab \equiv 0 \\ a+b \equiv 0 \end{cases}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2 - 10ab \equiv -10ab$$

П.к.  $-10ab \equiv 0$ , т.к.  $(-10ab) \equiv m$ , значит  $(10ab) \equiv m$ .

Если  $a \equiv m$ ,  $a \not\equiv b$ :

$a+b \equiv m$  - неверно, т.к.  $b \not\equiv m$

Если  $a \not\equiv m$  и  $b \equiv m$ :

$a+b \equiv m$  - неверно, т.к.  $a \not\equiv m$

Значит  $a \equiv m$  и  $b \equiv 0$ , что невозможно, т.к.  $a \not\equiv b$  либо  $a \equiv m$  и  $b \equiv m$ , что невозможно, т.к.  $a$  и  $b$  - взаимно простые, значит  $a \equiv m$  и  $b \equiv m$ .

$$\begin{cases} 10ab \equiv m \\ a \equiv m \\ b \equiv m \end{cases} \Rightarrow 10 \equiv m \Rightarrow \max(m) = 10$$

Ответ: 10.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 3x + 4} \\ b = \sqrt{2x^2 + x + 3} \\ a - b = a^2 - b^2 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \quad a - b = (a - b)(a + b)$$

1) Если  $a = b$ ;

$$0 = 1 - 4x$$
$$4x = 0,25$$

2) Если  $a \neq b$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 - 4x \end{cases}$$
$$2b = 4x$$
$$b = 2x$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} = 2x$$

$$2x^2 + x + 3 = 4x^2$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ x = -1 \text{ — неверно.} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $x = 1,5$ :

$$\sqrt{2 \cdot 2,25 - 3 \cdot 1,5 + 4} - \sqrt{2 \cdot 2,5 + 1,5 + 3} = 1 - 6$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{9} = -5$$

$$2 - 3 = -5$$

$$-1 = -5 \text{ - неверно} \Rightarrow x \neq 1,5$$

Если  $x = 0,25$ :

$$\sqrt{2 \cdot 0,0625 - 3 \cdot 0,25 + 4} - \sqrt{2 \cdot 0,625 + 0,25 + 3} = 0$$

$$\sqrt{0,125 + 3,75} = \sqrt{0,125 + 3,75} \text{ - верно} \Rightarrow x = 0,25 \text{ - корень}$$

Ответ  $0,25$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

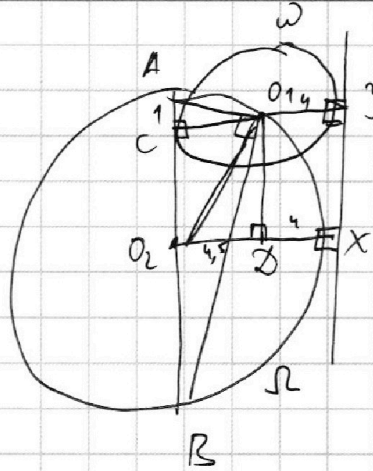
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4



Дано:

$\omega(O_1, R_\omega)$

$\Omega(O_2, R_\Omega)$

$O_1 \in \Omega$

$AB = d_\Omega$

$AB \text{ кас. } \omega \text{ в } C$

$AC = 1$

$BC = 16$

Найти:

$XY$  - длина кас.?

Решение

1) По св-ву вписанного угла, опирающегося на диаметр!

$$\angle AO_1B = 90^\circ$$

2) В  $\triangle AO_1B$

$$\angle AO_1B = 90^\circ$$

$O_1C \perp AB$  (св-во касательной)

св-во вписанного  
 $\Rightarrow$  в прямоугол  
 $\triangle AO_1B$

$$O_1C^2 = AC \cdot CB$$

$$O_1C = 4 \Rightarrow R_\omega = 4$$

3) Проведем  $O_1D \mid D \in O_2X, O_1D \perp O_2X$ .

4)  $AB = 17 \Rightarrow R_\Omega = 8,5$

5)  $O_1Y \perp XY \mid \Rightarrow O_1Y \parallel O_2X$   
 $O_2X \perp XY \mid$

6)  $O_1D \perp O_2X \mid \Rightarrow O_1D \parallel XY$   
 $XY \perp O_2X$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7) Из (5) и (6):

$$\begin{cases} O_1 X \perp O_1 Y \\ \angle O_1 X O_1 Y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow O_1 X \perp O_1 Y \Rightarrow \begin{matrix} \text{двоугольник} \\ O_1 X = X Y \\ O_1 Y = O_1 X = R \omega = 4 \end{matrix}$$

8)  $O_2 D = O_1 X - X D$

$$O_2 D = R \omega - 4$$

$$O_2 D = 9,5 - 4 = 4,5$$

9) В  $\triangle O_1 O_2 D$   $\angle O_1 O_2 D = 90^\circ \Rightarrow$  по Т. Пифагора:

$$O_2 D^2 + O_1 D^2 = O_1 O_2^2$$

$$O_1 D^2 = 8,5^2 - 4,5^2$$

$$O_1 D^2 = 4 \cdot 17 \Rightarrow O_1 D = 2\sqrt{17} \stackrel{4.7}{\Rightarrow} XY = 2\sqrt{17}$$

Ответ  $2\sqrt{17}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$\sqrt{5}$

$$\begin{cases} 3x + 2y = z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \quad (1) \end{cases}$$

$$A = \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$A \rightarrow \max$$

$$(1) \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$2xy = 3y \cdot z + x \cdot z$$

$$2xy = 3y(3x + 2y) + x(3x + 2y)$$

$$2xy = 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy$$

$$3x^2 + 6y^2 + 9xy = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 - 4y^2 - (9x^2 + 4y^2 + 12xy) = -6x^2 - 8y^2 - 12xy =$$

$$= -6x^2 - 8y^2 + 4 \cdot (-3xy) = -6x^2 - 8y^2 + 4(x^2 + 2y^2) = -6x^2 - 8y^2 + 4x^2 + 8y^2 = -2x^2$$

$$x^2 - 6y^2 = x^2 + 3 \cdot (-2y^2) = x^2 + 3(x^2 + 3xy) = x^2 + 3x^2 + 9xy = 4x^2 + 9xy$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть расстояние от А до В равно  $S$ , скорость велосипедиста —  $v_B$ ,  
скорость мотоциклиста —  $v_M$ . Тогда из условий составим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{v_M} + 2 = \frac{S}{v_B} \quad (1) \\ \frac{v_B \cdot S}{v_M} + 96 = \frac{v_M \cdot S}{v_B} \quad (2) \\ \frac{S}{v_M + 6} + 1,25 = \frac{S}{v_B + 6} \quad (3) \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \frac{S + 2v_M}{v_M} = \frac{S}{v_B}$$

$$\begin{aligned} v_B \cdot S + 2v_M \cdot v_B &= S v_M \\ S(v_M - v_B) &= 2 \cdot v_B \cdot v_M \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{v_B \cdot S}{v_M} + 96 = \frac{S \cdot v_M}{v_B}$$

$$\frac{S(v_M^2 - v_B^2)}{v_B \cdot v_M} = 96$$

$$v_M + v_B = 48$$

$$(3) \quad \frac{4S}{v_M + 6} + 5 = \frac{4S}{v_B + 6}$$

$$\begin{aligned} \frac{4S + 5v_M + 30}{v_M + 6} + 5 &= \frac{4S}{v_B + 6} \\ \frac{4S}{54 - v_B} + 5 &= \frac{4S}{v_B + 6} \end{aligned}$$

$$\frac{4S + 270 - 5v_B}{54 - v_B} = \frac{4S}{v_B + 6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$216S - 45v_B = 45v_B + 24S - 5v_B^2 - 30v_E + 240v_B + 1620$$

$$8S(v_B - 24) = 5v_B^2 - 240v_B - 1620$$

$$\frac{S \cdot 4}{48 - v_B} + 2 = \frac{S}{v_B}$$

$$\frac{S + 96 - 2v_B}{48 - v_B} = \frac{S}{v_B}$$

$$S \cdot v_B + 96 \cdot v_B - 2v_B^2 = S \cdot 48 - S \cdot v_B$$

$$S(2v_B - 48) = 2v_B^2 - 96v_B$$

$$S(v_B - 24) = v_B^2 - 48v_B$$

$$8(v_B^2 - 48v_B) = 5v_B^2 - 240v_B - 1620$$

$$8v_B^2 - 384v_B = 5v_B^2 - 240v_B - 1620$$

$$3v_B^2 - 144v_B + 1620 = 0 \quad | :3$$

$$v_B^2 - 48v_B + 540 = 0$$

$$D_1 = 576 - 540 = 36$$

$$v_{B,1} = \frac{24 \pm 6}{1}$$

$$\begin{cases} v_B = 30 \\ v_B = 18 \end{cases}$$

Если  $v_B = 30$ , то  $v_M = 18$ , что неверно, т.к. мотоциклист не  
едет быстрее, значит  $v_B = 18$ .

$$S \cdot (24 - 18) = 18 \cdot (48 - 18)$$

$$S \cdot 6 = 18 \cdot 30$$

$$S = 90$$

Ответ: 90 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

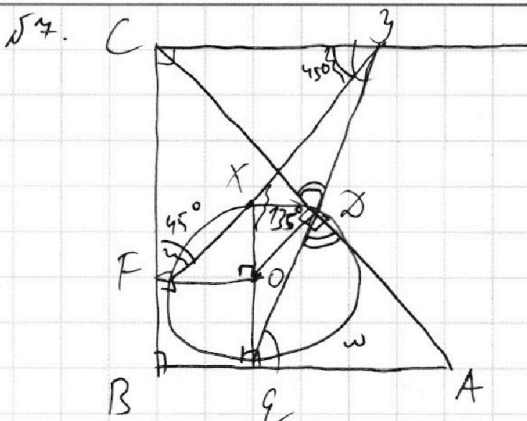
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано)  
 $\triangle ABC$   
 $\angle ABC = 90^\circ$   
 $\omega(O, R)$  - вписана  
 в  $\triangle ABC$

$Y \in ED$   
 му

$CY \perp BC$

$X \in FY$

$X \in \omega$

$\{X = 2\sqrt{2}X\}$

$AD:DC = ?$

Решение

1) По  $\omega$  касательные из одной точки,

$$YX \cdot YF = YD \cdot YE$$

2)  $\angle DEA = \angle DYC$  - как. лет. при  $CY \parallel AB$  и сек.  $YE$

3)  $\angle ADE = \angle YDC$  (верш.)

4) Тассм.  $\triangle AED$  и  $\triangle CYD$

$\cdot) \angle DEA = \angle DYC$  (н.2) | по 1 му  $\triangle CDY \sim \triangle AED$  <sup>о.м.</sup>  $\Rightarrow$   
 $\cdot) \angle ADE = \angle YDC$  (н.3) | <sup>о.м.</sup>  $\Rightarrow$   
 $\triangle$

$$\Rightarrow AD:DC = ED:DY$$

5)  $CF = CD$  (касательн. кас. из одной точки  $\Rightarrow CF = CY \Rightarrow$   
 $CD = CY$  ( $\angle CDY = \angle CYD$ ))

<sup>о.м.</sup>  $\Rightarrow \triangle CYF$  - равнобедр.  $\Rightarrow \angle CFY = 45^\circ \Rightarrow \angle FOK = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow XE$  - диаметр  $\omega$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 3x + 4} \\ b = \sqrt{2x^2 + x + 3} \\ a - b = a^2 - b^2 \end{cases}$$

$$D_1 = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 2 < 0$$

$$D_2 = 2x^2 + x + 3 = 1 - 24 < 0$$

1) Если  $a = b$ :

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$$1 - 4x = 0$$

$$x = 0,25$$

Проверка:

$$\sqrt{2 \cdot 0,0625 - 0,75 + 4} - \sqrt{2 \cdot 0,0625 + 0,25 + 3} = 0$$

$$\sqrt{0,125 + 3,25} - \sqrt{0,125 + 3,25} = 0$$

$$x = 0,25 - \text{верно}$$

2) Если  $a \neq b$ :

$$a - b = (a - b)(a + b) \quad | : (a - b) \neq 0$$

$$1 = a + b$$

$$a \neq b$$

$$(x) \begin{cases} a - b = 1 - 4x \\ a + b = 1 \\ b = 4x \\ b = 2x \end{cases}$$

Проверка значения (x):

$$\sqrt{2 \cdot 0,25 - 3 \cdot 0,25 + 4} - \sqrt{2 \cdot 0,25 + 0,25 + 3} = 1 - 1 = 0$$

$$\sqrt{4,5 - 0,75 + 4} - \sqrt{4,5 + 0,25 + 3} = -3$$

$$2 - 3 = -1$$

$$x \neq 1,5$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} = 2x \quad | \uparrow 2$$

$$2x^2 + x + 3 = 4x^2$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} x = 1,5 \text{ не } \\ x = -1 < 0 - \text{неверно} \end{cases}$$

Ответ: 0,25.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

Оценка)  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab : 3^{11} \cdot 7^{11} \\ bc : 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac : 3^{21} \cdot 7^{38} \end{array} \right. \Bigg| X$$

$$11+18+21 = 29+21 = 50$$

$$11+16+38 = 27+38 = 65$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{50} \cdot 7^{65}$$

$\cdot 7^{37,5}$ , но н.к. это нецелое число, а  $\sqrt{7} \notin \mathbb{I}$ , но  $7^{33}$ .

$$abc : 3^{25} \cdot 7^{33}$$

Система)  $\left\{ \begin{array}{l} x_a + x_b = 11 \\ x_b + x_c = 18 \\ x_a + x_c = 21 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_a + y_b = 22 \\ y_b + y_c = 16 \\ y_a + y_c = 38 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = 14 \\ x_b = 4 \\ x_a = 7 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_a = 22 \\ y_b = 0 \\ y_c = 16 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3^7 \cdot 7^{22} \\ b = 3^1 \cdot 7^0 \\ c = 3^{11} \cdot 7^{16} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow abc = 3^{15} \cdot 7^{38}$$

№2

$a \in \mathbb{N}$   
 $b \in \mathbb{N}$

$a$  и  $b$  - взаимно простые

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$и \left\{ \begin{array}{l} a+b : m \\ a^2 - 2ab + b^2 : m \end{array} \right.$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

~~$a=b$~~

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab}$$

$$\left. \begin{array}{l} a=4 \\ b=3 \end{array} \right| \Rightarrow 49 - 2 \cdot 7 \cdot 3 + 9 = 58 - 56 = 2 = 58 - 168 = -110/10$$

$m \rightarrow \max$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b \equiv 0 \pmod{m} \\ (a+b)^2 - 10ab \equiv 0 \pmod{m} \end{array} \right. \in \mathbb{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b : m(1) \\ 10ab : m \end{array} \right.$$

Может ли  $a$  и  $b$  делиться на  $m$ ?

$$10 \nmid m \Rightarrow \max(m) = 10$$



Если  $a \nmid m$ , то из 1) условия  $b \nmid m$ , что неверно по условию. Также самое если  $b \nmid m$ , но  $a \nmid m$ , что неверно по условию.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

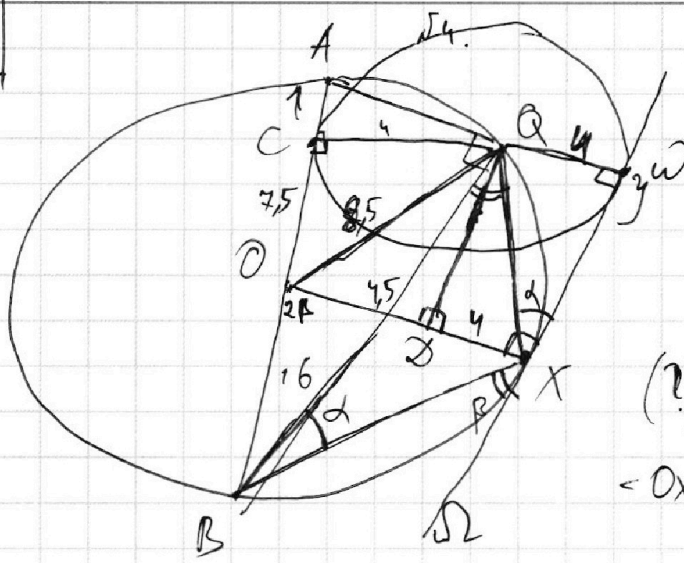
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$XY = ?$



$$\begin{aligned}
 QC^2 &= AC \cdot CB \\
 QC^2 &= 1 \cdot 16 \\
 QC &= 4 \\
 \begin{cases} R_{\Omega} = 8,5 \\ R_{\omega} = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(?)  $QX = ?$   
 $\angle OXQ = 90^\circ$

$QZ = XY$

$QZ^2 = 8,5^2 - 4,5^2$

$QZ^2 = 72,25 - 20,25$

$QZ^2 = 52$

$QZ = \sqrt{52}$

$XY = 2\sqrt{13}$

$$\begin{array}{r}
 75 \\
 \times 75 \\
 \hline
 375 \\
 + 525 \\
 \hline
 5625 \\
 \times 85 \\
 \hline
 425 \\
 + 6800 \\
 \hline
 7325 \\
 45 \\
 \times 45 \\
 \hline
 + 225 \\
 1800 \\
 \hline
 2025
 \end{array}$$

Ответ  $2\sqrt{13}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x, y, z \neq 0.$$

15.

$$A = \left( \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \right) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = (a-b)(a+b)$$

$$-4y^2 - z^2 - 3xy = -8y^2 - 3xy$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{z} \rightarrow \begin{cases} 2xy = 3yz + 3xz \\ z = 3x + 2y \end{cases}$$

$$3x \cdot 3x + 2y + 3y \cdot z = 2xy + z$$

$$x(3x + 2y) + y(2 + 3z) = 2xy + z$$

$$2xy + 3y(3x + 2y) + x(3x + 2y)$$

$$2xy = 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy$$

$$6y^2 + 13xy + 3x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 6y^2 &= x^2 + 3x^2 + 13xy = \\ &= 4x^2 + 13xy \end{aligned}$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 - 4y^2 - (9x^2 + 4y^2 + 12xy) = -6x^2 + 12xy - 6x^2 - 8y^2 - 12xy$$

$$A = \frac{-6x^2 + 12xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6x^2 + 12xy}{4x^2 + 13xy} = \frac{-2x^2 + 3y}{2x + 13y}$$

$$= \frac{-6x + 12y}{4x + 13y} = \frac{-1.5(4x + 13y) + 18y + 13.5y}{4x + 13y} = -1.5 + \frac{31.5y}{4x + 13y}$$

$$6x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 = 144 - 144 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{6x + 2\sqrt{8y}}}{2} = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

$$D = 144 - 4 \cdot 6 \cdot 8 = 144 - 24 \cdot 8 = 144 - 192 = -48$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

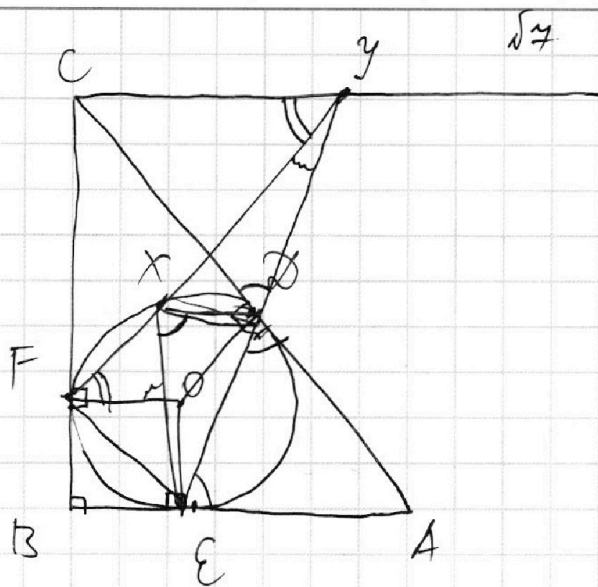
решение которой представлено на странице:



- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = 2\sqrt{2} \cdot XY \quad AD:DC = ?$$

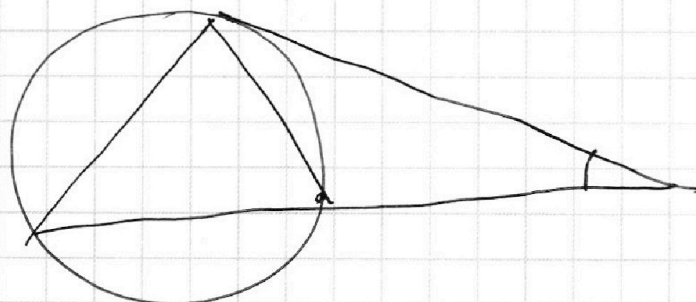
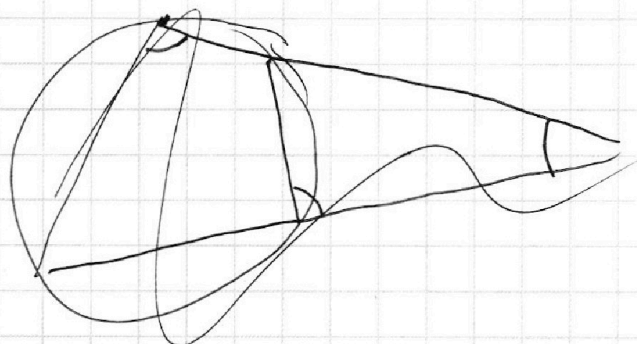
$$yx \cdot yf = yd \cdot ye$$

$$AD:DC = ED:DY$$

$$\triangle EXD \sim \triangle EFD:$$

$$\frac{DX}{FE} = \frac{ED}{FD} = \frac{EX}{FE}$$

$$ED \cdot FE =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проверка  $S=55$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{55}{33} + 2 = \frac{55}{15} \quad (1) \\ 15 \cdot \frac{55}{33} + 96 = 33 \cdot \frac{55}{15} \quad (2) \\ \frac{55}{39} + 1,25 = \frac{55}{21} \end{array} \right.$$

$$t_6 = \frac{55}{15} = 3 \frac{2}{3}$$

$$t_n = \frac{55}{33} = 1 \frac{2}{3}$$

$$\frac{55}{21} + 1,25 = 33 \cdot \frac{11}{3}$$

$$\frac{55}{21} + \frac{55}{21} - \frac{55}{39} = \frac{55 \cdot 4}{3 \cdot 13} = \frac{220}{39}$$

$$\frac{110}{51} = \frac{5}{4} \quad 440 = 455$$

(1)  $3 \frac{2}{3} \neq 3 \frac{2}{3}$  - верно

(2)  $25 + 96 = 121$  - верно

(3)  ~~$\frac{55}{13} + 3,75 = \frac{55}{14}$~~

$$\frac{55}{13} + 3,75 = \frac{55}{14}$$

$$\frac{55}{7} - \frac{55}{13} = \frac{55 \cdot 6}{7 \cdot 13} = \frac{330}{91} = 3 \frac{57}{91}$$

Проверка  $S=234$

(1)  $t_6 = \frac{117}{5} = 2 \frac{3}{5}$

$$t_n = \frac{117}{35} = \frac{93}{5}$$

(3)  $\frac{117}{45} + 1,25 = \frac{117}{9+6}$

$$\frac{117}{5 \cdot 5 \cdot 9} + 1,25 = \frac{117}{5 \cdot 15}$$

(2)  $9 \cdot \frac{3}{5} + 96 = 39 \cdot \frac{13}{5}$

$$27 + 420 = 390 + 117$$

$$507 = 507$$

$$\frac{13}{25} + 1,25 = \frac{39}{25}$$

$$\frac{26}{25} = 1,25$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S(24 - v) = v(48 - v)$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 48 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\frac{4S}{54 - v} + 5 = \frac{4S}{v + 6}$$

$$\frac{4S - 5v + 270}{54 - v} = \frac{4S}{v + 6}$$

$$216S - 4Sv = 4Sv + 24S - 5v^2 - 30v + 270v + 1620$$

$$8Sv - 192S - 5v^2 + 240v + 1620$$

$$8S(v - 24) = 5v^2 - 240v - 1620$$

$$-8v(48 - v) = 5v^2 - 240v - 1620$$

$$-384v + 8v^2 = 5v^2 - 240v - 1620$$

$$3v^2 - 144v + 1620 = 0 \quad | :3$$

$$v^2 - 48v + 540 = 0$$

$$D_1 = 576 - 540 = 36$$

$$v_{1,2} = \frac{48 \pm 6}{2}$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = 33 \\ v = 39 \end{cases}$$

$$\underline{Q_1} \quad S \cdot 5 = 15 \cdot 33 \quad \vee \quad S \cdot 15 = 5 \cdot 39$$

$$S = \frac{8 \cdot 5 - 8 \cdot 11}{2 \cdot 8}$$

$$S \cdot 5 = 117$$

$$S = \frac{117}{5} = 23,4$$

$$S = 55$$

$$t_0 = \frac{90}{18} = 5$$

$$t_4 = \frac{90}{30} = 3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$v_{\text{м}} + v_{\text{в}} = 48$$

$$\begin{cases} \frac{S}{48 - v_{\text{в}}} + 2 = \frac{S}{v_{\text{в}}} \\ \frac{S}{54 - v_{\text{в}}} + 1,25 = \frac{S}{v_{\text{в}} + 6} \end{cases}$$

$$\frac{S + 96 - 2v_{\text{в}}}{48 - v_{\text{в}}} = \frac{S}{v_{\text{в}}}$$

$$S \cdot v_{\text{в}} + 96v_{\text{в}} - 2v_{\text{в}}^2 = 48S - v_{\text{в}}S$$

$$S(2v_{\text{в}} - 48) = 2v_{\text{в}}^2 - 96v_{\text{в}}$$

$$S(v_{\text{в}} - 24) = v_{\text{в}}^2 - 48v_{\text{в}}$$

$$8v_{\text{в}}^2 - 384v_{\text{в}} = v_{\text{в}}^2 - 240v_{\text{в}} - 1620$$

$$7v_{\text{в}}^2 - 144v_{\text{в}} + 1620 = 0$$

$$D_1 = 5929$$

$$490 + 49 = 539$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 48 \\ \hline 288 \\ + 539 \\ \hline 5929 \end{array}$$

$$\frac{45}{54 - v_{\text{в}}} + 5 = \frac{45}{v_{\text{в}} + 6}$$

$$\frac{45 + 270 - 90v_{\text{в}}}{54 - v_{\text{в}}} = \frac{45}{v_{\text{в}} + 6}$$

$$\begin{aligned} 45 \cdot v_{\text{в}} + 270 + 270v_{\text{в}} + 1620 - 50v_{\text{в}}^2 - 36v_{\text{в}} &= \\ &= 216S - 45v_{\text{в}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 \cdot v_{\text{в}} + 4 \cdot 65 + 45 \cdot v_{\text{в}} - 216S &= \\ &= -240v_{\text{в}} - 1620 + v_{\text{в}}^2 \end{aligned}$$

$$S(8v_{\text{в}} - 192) = v_{\text{в}}^2 - 240v_{\text{в}} - 1620$$

$$\begin{cases} \frac{S}{48 - v} + 2 = \frac{S}{v} \\ \frac{S}{54 - v} + 1,25 = \frac{S}{v + 6} \end{cases}$$

$$2 = \frac{S}{v} = \frac{S}{48 - v} = \frac{48S - 0,5S - 0,5}{v(48 + v)}$$

$$24S - 0,5S = v(48 + v)$$

$$S(24 - v) = v(48 + v)$$

$$S = 2v$$

$$\frac{2v}{54 - v} + 1,25 = \frac{2v}{v + 6}$$

$$\frac{6v}{54 - v} + 5 = \frac{6v}{v + 6}$$

$$\frac{30v + 5v + 270}{54 - v} = \frac{8v}{v + 6}$$

$$30v^2 + 18v = -8v^2 + 432v$$

$$11v^2 - 414v = 0$$

$$\frac{S}{40} + 2 = \frac{S}{8} \quad S = 20 \quad v = 8$$

$$0,5 = 2,5 - 2$$

$$\frac{20}{46} + 1,25 = \frac{20}{14}$$

$$\frac{10}{23} + 1,25 = \frac{20}{7}$$

$$\frac{10}{4} - \frac{10}{3} = \frac{230 - 70}{23 \cdot 4} = \frac{160}{161}$$

$$\frac{160}{161}$$

$$11v = 414$$

$$v = \frac{414}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

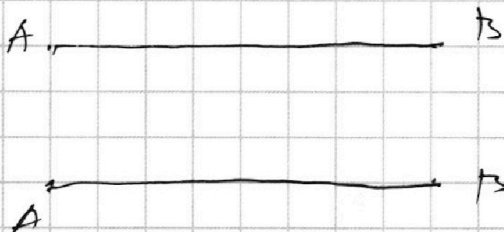
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6.  $AB = S$



$$x^2 - 6y^2 = \frac{-2}{1 - \frac{125}{x}} = -2 \cdot \frac{125x}{x^2 - 6y^2}$$

$$\begin{cases} \frac{S}{v_m} + 2 = \frac{S}{v_b} \\ v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96 = v_m \cdot \frac{S}{v_b} \\ \frac{S}{v_m + 6} + 125 = \frac{S}{v_b + 6} \end{cases}$$

~~$$\begin{aligned} \frac{S(v_m + v_b)}{v_m} &= \frac{S}{v_b} \\ 3 \cdot v_b + 2 \cdot v_b \cdot v_m &= S \cdot v_m \\ S(v_m - v_b) &= 2 \cdot v_b \cdot v_m \end{aligned}$$~~

$$\frac{v_b \cdot S}{v_m} - \frac{v_m \cdot S}{v_b} = -96$$

$$\frac{v_b^2 \cdot S - v_m^2 \cdot S - 2 \cdot v_b \cdot v_m \cdot (v_m + v_b)}{v_m \cdot v_b} = -2 \cdot (v_m + v_b) = -96$$

$$v_m + v_b = 48$$

$$\begin{cases} \frac{S}{v_b + 48} + 2 = \frac{S}{v_b} \\ \frac{S}{v_b + 54} + 125 = \frac{S}{v_b + 6} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &+ 96 \\ &+ 48 \\ &= 144 \\ &\times \frac{48}{152} \end{aligned}$$

$$\frac{S + 2v_b + 96}{v_b + 48} = \frac{S}{v_b}$$

$$\frac{45}{v_b + 54} + 5 = \frac{45}{v_b + 6}$$

$$\frac{45 + 5v_b + 270}{v_b + 54} = \frac{45}{v_b + 6}$$

~~$$\begin{aligned} S \cdot v_b + 2v_b^2 + 26v_b &= S \cdot v_b + 48S \\ v_b^2 + 48v_b - 48S &= 0 \end{aligned}$$~~

~~$$\begin{aligned} 45 \cdot v_b + 245 + 5v_b^2 + 30v_b + 270v_b + 1620 &= 45 \cdot v_b + 216S \\ 525 &= 5v_b^2 + 300v_b + 1620 \end{aligned}$$~~

~~$$v_b = 5 + 48 + 48 = 101$$~~

$$4v_b^2 + 152v_b = 5v_b^2 + 300v_b + 1620$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a) b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 3^m \cdot 7^n$$

$\sqrt{5}$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x, y, z \neq 0$$

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3x}{2y} = \frac{z}{2} \quad (1) \end{cases}$$

$$A = \left( \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \right) \rightarrow \text{учит}$$

$$(1) \quad 2xy = 3y \cdot z + x \cdot z$$

$$2xy = 3y(3x+2y) + x(3x+2y)$$

$$2xy \neq 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy$$

$$3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$2x^2 + 6xy = -6y^2$$

$$A_1 = 3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 12xy = -6x^2 - 8y^2 - 12xy$$

$$A_2 = x^2 - 6y^2 = x^2 + 2x^2 + 6xy = 3x^2 + 6xy$$

$$A = \frac{A_1}{A_2} = \frac{-6x^2 - 12xy - 8y^2}{3x^2 + 6xy} = -2 - \frac{8y^2}{3x^2 + 6xy}$$

$$= -2 - \frac{8y^2}{x^2 - 6y^2}$$