



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклиstu на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между A и B .

мотоциклист

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$a \in N$$

$$b \in N$$

$$c \in N$$

$$\begin{cases} ab : 3^{11} \cdot 7^{11} \\ bc : 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac : 3^{21} \cdot 7^{38} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 b^2 c^2 : 3^{11+18+21} \cdot 7^{11+16+38} \\ a^2 b^2 c^2 : 3^{50} \cdot 7^{65} \\ abc : 3^{25} \cdot 7^{32.5} \end{cases}$$

Птк. $ac : 7^{38}$, то $abc : 7^{38}$, значит

$$abc : 3^{25} \cdot 7^{38} \Rightarrow \min(abc) = 3^{25} \cdot 7^{38}$$

Пусть $a = 3^{4} \cdot 7^{22}$, $b = 3^{4} \cdot 7^{16}$, $c = 3^{14} \cdot 7^{16}$,

$$\begin{cases} ab = 3^{11} \cdot 7^{22} \\ bc = 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac = 3^{21} \cdot 7^{38} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab : 3^{11} \cdot 7^{11} \\ bc : 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac : 3^{21} \cdot 7^{38} \end{cases}$$

Ответ: $3^{25} \cdot 7^{38}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$a \in \mathbb{N}$$

$$b \in \mathbb{N}$$

$a+b$ - взаимно простые

$$\{ a+b : m$$

$$\{ a^2 - 10ab + b^2 : m$$

$$\{ (a+b)^2 - 10ab \equiv 0 : m$$

$$\{ a+b \leq 0 : m$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2 - 10ab \equiv -10ab : m$$

$$\text{П.к. } -10ab \equiv 0 : m, \text{ то } (-10ab) : m, \text{ значит } (10ab) : m.$$

Если $a : m, a+b \nmid b :$

$a+b : m$ - неверно, и.к. $b : m$

Если $a \nmid m$ и $b : m$

$a+b : m$ - неверно, и.к. $a : m$

Значит $a : m$ и $b : m$, ~~что невозможно~~, и.к. $a+b$ ~~нельзя~~ $\leq 0 : m$ и $b : m$,
~~что невозможно~~, и.к. $a+b$ - взаимно простые, значит $a : m$ и $b : m$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 10ab : m \\ a : m \Rightarrow 10a : m \Rightarrow \max(m) = 10 \\ b : m \\ 10 : m \end{array} \right.$$

Ответ: 10.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 3x + 4} \\ b = \sqrt{2x^2 + x + 3} \\ a - b = 1 - 4x \end{cases}$$

$$(1) \quad a - b = (a - b)(a + b)$$

$$1) \text{ Если } a = b;$$

$$0 = 1 - 4x$$

$$4x = 0,25$$

$$2) \text{ Если } a \neq b;$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 - 4x \end{cases}$$

$$2b = 4x$$

$$b = 2x$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} = 2x$$

$$2x^2 + x + 3 = 4x^2$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ x = -1 \end{cases} \leftarrow \text{о-неверно.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $x = 1,5$:

$$\sqrt{2 \cdot 2,25 - 3 \cdot 1,5 + 4} - \sqrt{2 \cdot 2,5 + 1,5 + 3} = 1 - 6$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{9} = -5$$

$$2 - 3 = -5$$

$$-1 = -5 \text{ - верно} \Rightarrow x \neq 1,5$$

Если $x = 0,25$:

$$\sqrt{2 \cdot 0,0625 - 3 \cdot 0,25 + 4} - \sqrt{2 \cdot 0,0625 + 0,25 + 3} = 0$$

$$\sqrt{0,125 + 3,75} = \sqrt{0,125 + 3,75} - \text{верно} \Rightarrow x = 0,25 - \text{корень}$$

Лицем 0,25.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

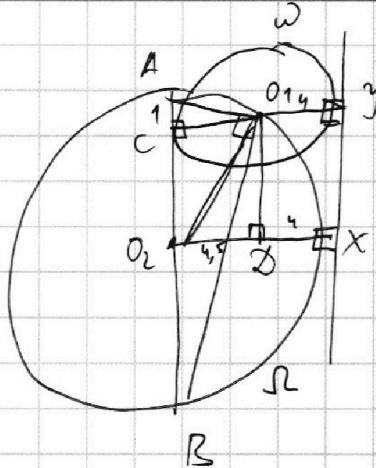


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



Дано:

$$\omega(O_1)R_w$$

$$\Omega(O_2)R_s$$

$$O_1 \in \Omega$$

$$AB = d_s$$

$$AB \text{ кас. } \omega \text{ в } C$$

$$AC = 1$$

$$BC = 16$$

Найти:

XY -однач. кас.-?

Решение

1) $\angle AOB$ by вписанного угла, опирающегося на диаметр!

$$\angle AOB = 90^\circ$$

2) $B \Delta A_1B$

$$\angle AOB = 90^\circ$$

$O_1C \perp AB$ (область касательной)

$$O_1C^2 = AC \cdot CB$$

$$O_1C = 4 \Rightarrow R_w = 4$$

3) Проведем $O_1D | D \in O_2X$, $O_1D \perp O_2X$.

$$4) AB = 17 \Rightarrow R_s = 8,5$$

$$5) O_1Y \perp XY \Rightarrow O_1Y \parallel O_2X$$

$$O_2X \perp XY \Rightarrow O_2D \parallel XY$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7) $\angle y \approx 61^\circ$

$$O_1X \text{ - half-min} \quad | \Rightarrow O_1X \text{ - half-max} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{обо стороны} \\ O_1D = XY \\ DX = O_1Y = R_2 = 4 \end{array}$$

8) $O_2D = O_1X - XD$

$$O_2D = R_1 - 4$$

$$O_2D = 9,5 - 4 = 5,5$$

9) $\triangle O_2O_1D \quad \angle O_2DO_1 = 90^\circ \Rightarrow$ по Т Пирамиды

$$O_2D^2 + O_1D^2 = O_1O_2^2$$

$$O_1D^2 = 5,5^2 - 4,5^2$$

$$O_1D^2 = 4 \cdot 11 \Rightarrow O_1D = 2\sqrt{13} \xrightarrow{h.7} XY = 2\sqrt{13}$$

О т в е т $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}x, y, z &\in \mathbb{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 2 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{array} \right. (1)\end{aligned}$$

№5

$$A = \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$
$$A \rightarrow \max$$

$$(1) \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$2xy = 3y \cdot z + x \cdot z$$

$$2xy = 3y(3x+2y) + x(3x+2y)$$

$$2xy = 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy$$

$$3x^2 + 6y^2 + 9xy = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 - 4y^2 - (9x^2 + 4y^2 + 12xy) = -6x^2 - 8y^2 - 12xy =$$
$$= -6x^2 - 8y^2 + 4 \cdot (-3xy) = -6x^2 - 8y^2 + 4(x^2 + 2y^2) = -6x^2 - 8y^2 + 4x^2 +$$
$$+ 8y^2 = -2x^2$$

$$x^2 - 6y^2 = x^2 + 3 \cdot (-2y^2) = x^2 + 3(x^2 + 3xy) = x^2 + 3x^2 + 9xy = 4x^2 + 9xy$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Кульб фасолине от А до В заби S, скорость велосипедиста - v_B ,
скорость мотоциклиста - v_M . Тогда из условия составим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{v_M} + 2 = \frac{S}{v_B} \quad (1) \\ \frac{v_B \cdot S}{v_M} + 96 = \frac{v_M \cdot S}{v_B} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \frac{S + 2v_M}{v_M} = \frac{S}{v_B}$$

$$\sqrt{B} \cdot S + 2\sqrt{M} \cdot \sqrt{B} = S\sqrt{M}$$

$$S(\sqrt{M} - \sqrt{B}) = 2 \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{M}$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{B} \cdot S}{\sqrt{M}} + 96 = \frac{S \cdot \sqrt{M}}{\sqrt{B}}$$

$$\frac{S(\sqrt{M}^2 - \sqrt{B}^2)}{\sqrt{B} \cdot \sqrt{M}} = 96$$

$$\sqrt{M} + \sqrt{B} = 48$$

$$(3) \quad \frac{4S}{\sqrt{M} + 6} + 5 = \frac{4S}{\sqrt{B} + 6}$$

$$\frac{4S + 5\sqrt{M} + 30}{54 - \sqrt{B}} = \frac{4S}{\sqrt{B} + 6}$$

$$\frac{4S + 170 - 5\sqrt{B}}{54 - \sqrt{B}} = \frac{4S}{\sqrt{B} + 6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$176S - 4S\sqrt{8} = 4S\sqrt{8} + 24S - 5\sqrt{8}^2 - 30\sqrt{8} + 270\sqrt{8} + 1620$$

$$8S(\sqrt{8} - 24) = 5\sqrt{8}^2 - 240\sqrt{8} - 1620$$

$$\frac{S}{48 - \sqrt{8}} + 2 = \frac{S}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{S + 96 - 2\sqrt{8}}{48 - \sqrt{8}} = \frac{S}{\sqrt{8}}$$

$$S \cdot \sqrt{8} + 96 \cdot \sqrt{8} - 2\sqrt{8}^2 = S \cdot 48 - S \cdot \sqrt{8}$$

$$S(2\sqrt{8} - 48) = 2\sqrt{8}^2 - 96\sqrt{8}$$

$$S(\sqrt{8} - 24) = 2\sqrt{8}^2 - 48\sqrt{8}$$

$$8(\sqrt{8}^2 - 48\sqrt{8}) = 5\sqrt{8}^2 - 240\sqrt{8} - 1620$$

$$8\sqrt{8}^2 - 384\sqrt{8} = 5\sqrt{8}^2 - 240\sqrt{8} - 1620$$

$$3\sqrt{8}^2 - 144\sqrt{8} + 1620 = 0 \mid :3$$

$$\sqrt{8}^2 - 48\sqrt{8} + 540 = 0$$

$$\Delta_1 = 576 - 540 = 36$$

$$\sqrt{8}_{1,2} = \frac{24 \pm 6}{1}$$

$$\begin{cases} \sqrt{8} = 30 \\ \sqrt{8} = 18 \end{cases}$$

Если $\sqrt{8} = 30$, то $S = 18$, что неверно, т.к. можно увидеть
изданное выражение, значит $\sqrt{8} = 18$.

$$S \cdot (24 - 18) = 18 \cdot (48 - 18)$$

$$S \cdot 6 = 18 \cdot 30$$

$$S = 50$$

Ответ: 90 км.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

(Sand)

α^{ABC}

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$\omega(0)\mathbb{R}$ -Liegruppen

Y E E D

C3 LBC

$$x \in F^y$$

$x \in \omega$

$$\frac{EX = 2\sqrt{2}X^3}{AD:DC = ?}$$

Pinguine

1) To obay kaskamishha iz ogran' menem,

$$y_x \cdot y_F = y_D \cdot y_E$$

2) $\angle DEA = \angle DYC$ - nach dem Wm Cyl || AB u ex. yE

$$3) \angle ADE = \angle BDC (\text{ верн.})$$

4) *Tacca* s. *GAUDI* (yD)

•) $\angle DCA = \angle DCY$ (h.2) | $\begin{matrix} \text{wegen} \\ \Rightarrow \end{matrix}$ $\triangle CDY \sim \triangle AED$ Oky

•) $\angle ADE = \angle DCY$ (h.3) | $\begin{matrix} \text{wegen} \\ \Rightarrow \end{matrix}$?

$$\Rightarrow AD:DC = ED:DY$$

$$5) CF = C^2 \text{ (онуңдан кас. нұсқаудың мөндерін}) \Rightarrow CF = Cy \Rightarrow \\ C^2 = Cy (\leq C^2 y = \leq C^3 y)$$

\Rightarrow б) CDF - криволин. равнобедр. $\Rightarrow \angle(CF) = 45^\circ \Rightarrow \angle(FD) = 90^\circ = 90^\circ$

\Rightarrow $X \in$ -gruppe w \ddot{u}

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{2x^2 - 3x + 4} \\ b = \sqrt{2x^2 + x + 3} \\ a - b = a^2 - b^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 9 - 4 \cdot 4 \cdot 2 \leq 0 \\ D_2 &= 2x^2 + x + 3 = 1 - 24 \leq 0 \end{aligned}$$

1) Если $a = b$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} &= \sqrt{2x^2 + x + 3} \\ 1 - 4x &= 0 \\ x &= 0,25 \end{aligned}$$

Проверка,

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - 0,0625 - 0,25 + 4} - \sqrt{2 \cdot 0,0625 + 0,25 + 3} &= 0 \\ \sqrt{0,9125 + 3,75} - \sqrt{0,9125 + 3,75} &= 0 \\ x &= 0,25 \text{ - верно} \end{aligned}$$

2) Если $a \neq b$:

$$a - b = (a - b)(a + b) \quad | : (a - b) \neq 0$$

$$\begin{aligned} 1 &= a + b \longrightarrow (k) \begin{cases} a - b = 1 - 4x \\ a + b = 1 \\ a = 4x \\ b = 2x \end{cases} \\ a &\neq b \end{aligned}$$

Проверка системы (k),

$$\sqrt{2 \cdot 1,25 - 3 \cdot 1,5 + 4} - \sqrt{2 \cdot 1,25 + 1,5 + 3} = 1 - 6$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + x + 3} &= 2x \quad | \quad x^2 \\ 2x^2 + x + 3 &= 4x^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{4,5 - 4,5 + 4} - \sqrt{4,5 + 1,5 + 3} = -5$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$2 - 3 = -5$$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 24 = 25$$

$$X \neq 1,5$$

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} x = 1,5 \text{ - } \\ x = -1 < 0 \text{ - неверно} \end{cases}$$

Ответ: 0,25.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

Очевидно

$$\left\{ \begin{array}{l} ab : 3^{11} \cdot 7^{11} \\ bc : 3^{13} \cdot 7^{16} \\ ac : 3^{21} \cdot 7^{38} \end{array} \right| X$$

$$11 + 13 + 21 = 29 + 21 = 50$$

$$11 + 16 + 38 = 27 + 38 = 65$$

$$abc : 3^{25} \cdot 7^{33}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{50} \cdot 7^{65} ; 7^{37.5}, \text{ но н.р. это нецелое число, } -9 \sqrt{7} \notin \mathbb{Z}, \text{ но}$$

$$7^{33}.$$

$$\text{Причина: } \left\{ \begin{array}{l} x_a + x_b = 11 \\ x_b + x_c = 13 \\ x_a + x_c = 21 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_a + y_b = 22 \\ y_b + y_c = 16 \\ y_a + y_c = 38 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = 14 \\ x_b = 4 \\ x_a = 7 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_a = 22 \\ y_b = 0 \Rightarrow a = 3^7 \cdot 7^{22} \\ y_c = 16 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} b = 3^7 \cdot 7^0 \\ c = 3^{11} \cdot 7^{16} \end{array} \right| \Rightarrow abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$a \in \mathbb{N}$$

$$b \in \mathbb{N}$$

a+b - взаимно простые

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$$a^2 - 8ab + b^2 = 0$$

Деление на b

$$\text{и } \left\{ \begin{array}{l} a+b : m \\ a^2 - 8ab + b^2 : m \end{array} \right.$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab}$$

$$m \rightarrow \max$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m} \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)^2 - 10ab \equiv 10ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b : m \\ 10ab : m \end{array} \right.$$

Может ли a+b делиться на m?

$$10|m \Rightarrow (m \times n) = 10$$

\Leftrightarrow Если a+b|m, то либо 1) оба a, b | m, что неверно по условию.
2) a|m, что неверно по условию.
Можно также если b|m, то a|b, что неверно по условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

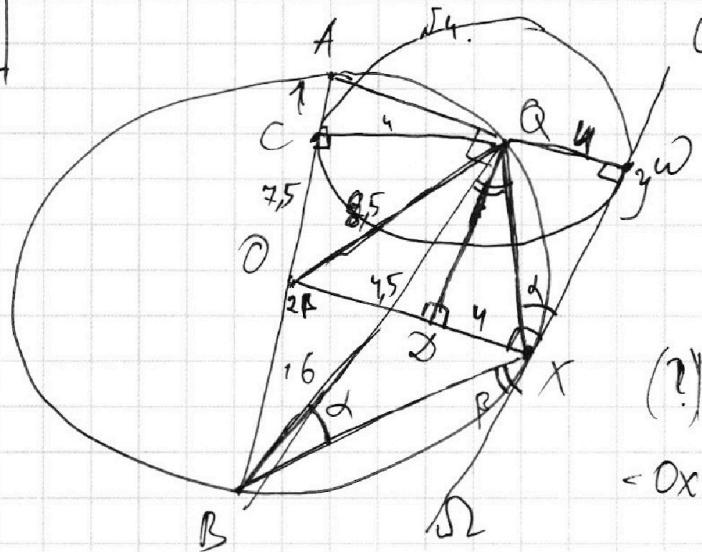
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$Xy - ?$



$$QC^2 = AC \cdot CB$$

$$QC^2 = 1 \cdot 16$$

$$QC = 4$$

$$\begin{cases} R_{\Omega} = 8,5 \\ R_{\omega} = 4 \end{cases}$$

(?) $Qx - ?$

$$\angle OXQ = 90^\circ$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 75 \\ \hline 375 \\ + 525 \\ \hline 56,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 85 \\ \hline 6800 \\ + 6800 \\ \hline 7225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ + 1800 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$QZ = XY$

$$QZ^2 = 8,5^2 - 4,5^2$$

$$QZ^2 = 72,25 - 20,25$$

$$QZ^2 = 52$$

$$QZ = \sqrt{52}$$

$XY = 2\sqrt{13}$

Ответ: $2\sqrt{13}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$x, y \neq 0.$$

5.

$$A = \left(\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \right) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{cases}$$

$$9x^2 + 4y^2 - z^2 = (a-b)(a+b)$$

$$-6y^2 - 2y^2 - 3xy = -8y^2 - 3xy$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{2} \rightarrow \begin{cases} 2xy = 3y + 3x \\ z = 3x + 2y \end{cases}$$

$$3x^2 + xz + 2y + 3yz = 2xy + 2 \\ x(3+\cancel{z}) + y(2+3\cancel{z}) = 2xy + 2$$

$$2xy + 3y(2x+y) \neq x(3x+y)$$

$$2xy = 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 6xy$$

$$6y^2 + 13xy + 3x^2 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 6y^2}_{= x^2 + 3x^2 + 12xy} = \\ = \underbrace{4x^2 + 13xy}_{=}$$

$$\underbrace{3x^2 - 4y^2 - z^2}_{= 3x^2 - 4y^2 - (9x^2 + 4y^2 + 12xy)} = -6x^2 - 12xy - 6x^2 - 8y^2 - 12xy$$

$$A = \frac{-6x^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6x^2 + 12xy}{4x^2 + 13xy} = \frac{-2x^2 - 12xy}{2x^2 + 13xy}$$

$$= \frac{-6x + 12y}{4x + 13y} = \frac{-15(4x + 12y) + 102y}{4x + 13y} = -1,5 + \frac{31,5y}{4x + 13y}$$

$$6x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 = 144 - 144 = 0$$

$$x_{\text{кр}} = \sqrt{5x^2 + 2\sqrt{2}xy} = \sqrt{6x^2 + 8y^2 + 4\sqrt{12}}$$

$$D = 144 - 4 \cdot 6 \cdot 8 = 144 - 24 \cdot 8 = 144 -$$



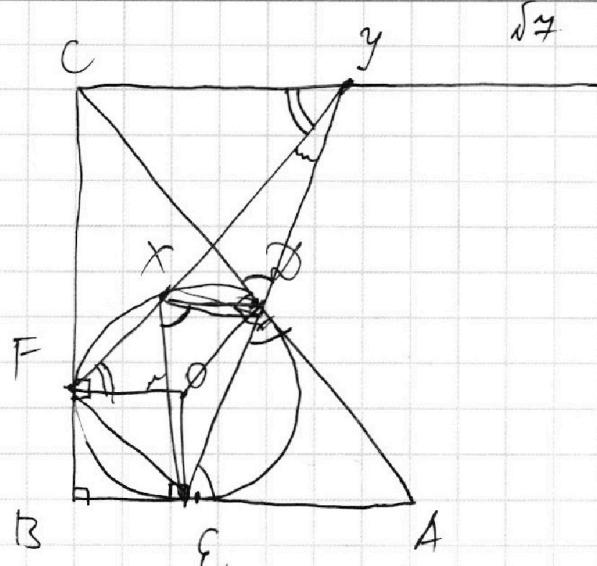
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



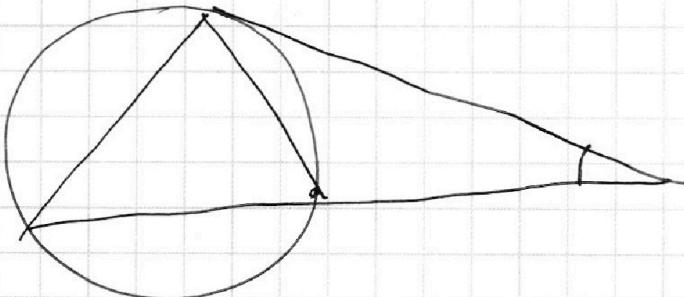
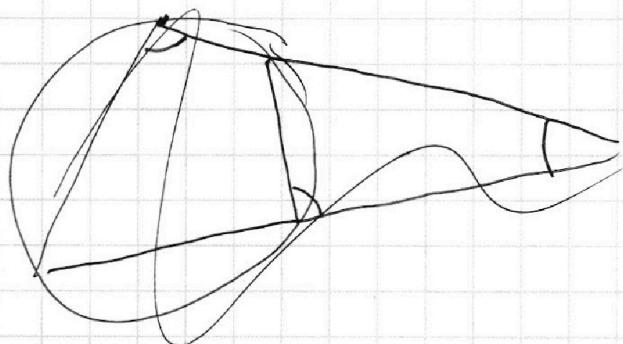
$$\Delta X = 2\sqrt{2} \cdot XY$$

$$\Delta D \cdot XY = ED \cdot 2y$$

$$\Delta 3x \approx \Delta 3y$$

$$\frac{2x}{FE} = \frac{y}{FG} \Rightarrow \frac{2x}{FG} = \frac{y}{GE}$$

$$\Delta D \cdot YE =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Учебник S=55)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{55}{13} + 2 = \frac{55}{15} \quad (1) \\ 15 \cdot \frac{55}{13} + 96 = 33 \cdot \frac{55}{15} \quad (2) \\ \frac{55}{13} + 1,25 = \frac{55}{21} \end{array} \right.$$
$$t_6 = \frac{55}{15} = 3 \frac{2}{3}$$
$$t_{11} = \frac{55}{21} = 1 \frac{2}{3}$$

$$(1) 3 \frac{2}{3} \neq 3 \frac{2}{3} - \text{бесцн}$$

$$(2) 25 + 96 = 121 - \text{бесцн}$$

$$(3) \cancel{116} \cancel{\frac{55}{13}} \cancel{+ 375} =$$

$$\cancel{116} \cancel{\frac{55}{13}} + 375 = \frac{55}{4}$$

$$\frac{55}{7} - \frac{55}{13} = \frac{55 \cdot 6}{7 \cdot 13} = \frac{330}{91} = 3 \frac{54}{91}$$

$$116 + 185 - 33 \cdot \frac{11}{3}$$

$$\frac{55}{21} + \frac{55}{21} - \frac{55}{39} = \frac{55 \cdot 2}{364 \cdot 13} = \frac{990}{91}$$

$$\frac{112}{91} = \frac{5}{4} \quad 440 = 455$$

Учебник S=234)

$$(1) t_6 = \frac{112}{5} = 2 \frac{13}{5} = 2 \frac{3}{5}$$

$$t_{11} = \frac{117}{5} = \frac{93}{5}$$

$$(3) \frac{117}{45} + 1,25 = \frac{117}{90}$$

$$\frac{117}{5 \cdot 9} + 1,25 < \frac{117}{5 \cdot 5}$$

$$(2) 9 \cdot \frac{3}{5} + 96 = 39 \cdot \frac{13}{5}$$

$$27 + 480 = 390 + 117$$

$$507 = 507$$

$$\frac{13}{25} + 1,25 = \frac{39}{25}$$

$$\frac{26}{25} = 1,25$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S(24-\vartheta) = \vartheta(48-\vartheta)$$

$$\begin{array}{r} \times 48 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\frac{45}{54-\vartheta} + 5 = \frac{45}{\vartheta+6}$$

$$\frac{45 + 5\vartheta + 270}{54 - \vartheta} = \frac{45}{\vartheta + 6}$$

$$216S - 45\vartheta = 45\vartheta + 245 - 5\vartheta^2 - 30\vartheta + 270\vartheta + 1620$$

$$8S\vartheta - 192S - 5\vartheta^2 + 240\vartheta + 1620$$

$$8S(\vartheta - 24) = 5\vartheta^2 - 240\vartheta - 1620$$

$$-8\vartheta(48-\vartheta) = 5\vartheta^2 - 240\vartheta - 1620$$

$$-384\vartheta + 8\vartheta^2 = 5\vartheta^2 - 240\vartheta - 1620$$

$$3\vartheta^2 - 144\vartheta + 1620 = 0 \quad | :3$$

$$\vartheta^2 - 48\vartheta + 540 = 0$$

$$\vartheta_1 = 576 - 540 = 36$$

$$\vartheta_{1,2} = \frac{24 \pm 6}{2}$$

$$\begin{cases} \vartheta = 15 \\ \vartheta = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = 33 \\ v = 39 \end{cases}$$

$$S \cdot 9 = 15 \cdot 33 \vee S \cdot 15 = 5 \cdot 39$$

$$S = \frac{3 \cdot 5 - 3 \cdot 11}{2 \cdot 3} \\ S = 55$$

$$S \cdot 5 = 114 \\ S = \frac{114}{5} = 23,4$$

$$t_6 = \frac{90}{18} = 5$$

$$t_4 = \frac{90}{30} = 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$V_{\text{н}} + \vartheta_6 = 48$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{48 - \vartheta_6} + 2 = \frac{s}{\vartheta_6} \\ \frac{s}{54 - \vartheta_6} + 1,25 = \frac{s}{\vartheta_6 + 6} \end{array} \right.$$

$$\frac{s + 96 - 2\vartheta_6}{48 - \vartheta_6} = \frac{s}{\vartheta_6}$$

$$s \cdot \vartheta_6 + 96\vartheta_6 - 2\vartheta_6^2 = 48s - \vartheta_6 s$$

$$s(2\vartheta_6 - 48) = 2\vartheta_6^2 - 96\vartheta_6$$

$$s(\vartheta_6 - 24) = \vartheta_6^2 - 48\vartheta_6$$

$$8\vartheta_6^2 - 384\vartheta_6 = \vartheta_6^2 - 240\vartheta_6 - 1620$$

$$7\vartheta_6^2 - 144\vartheta_6 + 1620 = 0$$

$$\vartheta_1 = 5929 -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{48 - \vartheta} + 2 = \frac{s}{\vartheta} \\ \frac{s}{54 - \vartheta} + 1,25 = \frac{s}{\vartheta + 6} \end{array} \right.$$

$$2 = \frac{s}{\vartheta} = \frac{s}{48 - \vartheta} = \frac{48s - 0,5s - 0s}{\vartheta(48 - \vartheta)}$$

$$24s - 0,5s = \vartheta(48 - \vartheta)$$

$$s(24 - \vartheta) = \vartheta(48 - \vartheta)$$

$$s = 2\vartheta$$

$$\frac{2\vartheta}{54 - \vartheta} + 1,25 = \frac{2\vartheta}{\vartheta + 6}$$

$$\frac{8\vartheta}{54 - \vartheta} + 5 = \frac{8\vartheta}{\vartheta + 6}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 48 \\ \hline 288 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 472 \\ \times 27 \\ \hline 139 \\ \hline 539 \\ \hline 5929 \end{array}$$

$$490 + 45 = 535$$

$$\frac{45}{54 - \vartheta} + 5 = \frac{45}{\vartheta + 6}$$

$$\frac{45 + 270 - 5\vartheta}{54 - \vartheta} = \frac{45}{\vartheta + 6}$$

$$45 \cdot \vartheta + 245 + 270\vartheta + 1620 - 5\vartheta^2 - 36\vartheta = \\ = 216s - 45\vartheta$$

$$45 \cdot \vartheta + 4 \cdot 5 + 45 \cdot \vartheta - 216s = \\ = -270\vartheta - 1620 + \vartheta^2$$

$$5(8\vartheta - 192) = \vartheta^2 - 240\vartheta - 1620$$

$$\frac{s}{40} + 2 = \frac{s}{8} \quad s = 20 \quad \vartheta = 8$$

$$\frac{20}{46} + 1,25 = \frac{20}{14}$$

$$\frac{10}{23} + 1,25 = \frac{10}{7}$$

$$\frac{10}{7} - \frac{10}{23} = \frac{230 - 70}{23 \cdot 7} = \frac{160}{161}$$

$$120 = 414$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 59 \\ \hline 20 + 59 + 216 \\ \hline 80 \\ \hline \end{array} = \frac{80}{\vartheta + 6}$$

$$3\vartheta^2 + 18\vartheta = -8\vartheta^2 + 432\vartheta$$

$$11\vartheta^2 - 414\vartheta = 0$$





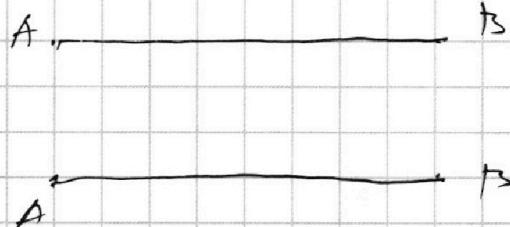
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 5$$

$$\begin{aligned} -2x^2 \\ \frac{x^2 - 6y^2}{x^2 - 6y^2} &= \frac{-2}{1 - \frac{6y^2}{x^2}} \\ &= -2 \cdot \frac{12y^2}{x^2 - 6y^2} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{\vartheta_M} + 2 = \frac{S}{\vartheta_E} \\ \vartheta_E \cdot \frac{S}{\vartheta_M} + 96 = \vartheta_M \cdot \frac{S}{\vartheta_E} \\ \frac{S}{\vartheta_M + 6} + 125 = \frac{S}{\vartheta_E + 6} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{2S + 125}{\vartheta_M}} &= \frac{S}{\vartheta_E} \\ 3 \cdot \vartheta_E + 2 \cdot \vartheta_E \cdot \vartheta_M &= S \cdot \vartheta_M \\ S(\vartheta_M - \vartheta_E) &= 2 \cdot \vartheta_E \cdot \vartheta_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_E \cdot S}{\vartheta_M} - \frac{\vartheta_M \cdot S}{\vartheta_E} &= -96 \\ \frac{\vartheta_E^2 \cdot S - \vartheta_M^2 \cdot S}{\vartheta_M \cdot \vartheta_E} &= \frac{-2 \cdot \vartheta_E \cdot \vartheta_M \cdot (\vartheta_M + \vartheta_E)}{\vartheta_M \cdot \vartheta_E} = -2 \cdot (\vartheta_M + \vartheta_E) = -96 \\ \underline{\vartheta_M + \vartheta_E = 48} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{\vartheta_E + 48} + 2 = \frac{S}{\vartheta_E} \\ \frac{S}{\vartheta_E + 54} + 125 = \frac{S}{\vartheta_E + 6} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \cancel{+ \frac{S}{\vartheta_E + 48}} \\ \cancel{+ \frac{S}{\vartheta_E + 54}} \end{array} \times \frac{48}{152}$$

$$\frac{S + 2\vartheta_E + 96}{\vartheta_E + 48} = \frac{S}{\vartheta_E}$$

$$\begin{aligned} \frac{45}{\vartheta_E + 54} + 5 &= \frac{45}{\vartheta_E + 6} \\ \cancel{45 + 5\vartheta_E + 270} &= \frac{45}{\vartheta_E + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \cancel{\vartheta_E + 2\vartheta_E^2 + 26\vartheta_E} &= S \cancel{\vartheta_E + 48\vartheta_E} \\ \cancel{\vartheta_E^2 + 48\vartheta_E - 48S} &= 0 \\ \cancel{\vartheta_E^2 + 5\vartheta_E + 48} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45\vartheta_E + 245 + 5\vartheta_E^2 + 30\vartheta_E + 270\vartheta_E + \\ + 1620 = 45\vartheta_E + 2165 \\ 1525 = 5\vartheta_E^2 + 300\vartheta_E + 1620 \end{aligned}$$

$$4\vartheta_E^2 + 152\vartheta_E = 5\vartheta_E^2 + 300\vartheta_E + 1620$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9) b, c \in \mathbb{N}$$

$$\text{дл: } 3^m \cdot 7^n$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x, y \neq 0$$

$$\begin{cases} 3x+2y=2 \\ \frac{3y+x}{2y} = \frac{2}{z} \end{cases} \quad (1)$$

N1

85

$$A = \left(\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 + 6y^2} \right) \rightarrow u, v, r$$

$$(1) \quad 2xy = 3y - 2 + x - 2$$

$$2xy = 3y(3x+y) + x(3x+y)$$

$$2xy = 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy$$

$$3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0$$

$$x^2 + 3xy + 3y^2 = 0 \quad 2x^2 + 6xy = -6y^2$$

$$A_1 = 3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 12xy = -6x^2 - 8y^2 - 12xy$$

$$A_2 = x^2 - 6y^2 = x^2 + 2x^2 + 6xy = 3x^2 + 6xy$$

$$A = \frac{A_1}{A_2} = \frac{-6x^2 - 12xy - 8y^2}{3x^2 + 6xy} = -2 - \frac{8y^2}{3x^2 + 6xy} \quad \text{или} =$$

$$= -2 - \frac{8y^2}{x^2 - 6y^2}$$