



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA$ ,  $AB$ ,  $BC$  в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Если  $ab$  делится на  $3^{14} \cdot 7^{13}$ , то

$b$  делится на  $3$  и  $7$  на множит-

ели есть  $3^{14} \cdot 7^{13}$ , а  $a$  делится

на  $3$  и  $7$ . Перемножив

$ab \cdot bc \cdot ac$ , получим произведение

трех чисел на множителях

будем  $3^{14+13+19} \cdot 7^{13+17+23} = 3^{46} \cdot 7^{53}$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2$$

$$abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2}$$

значит  $abc$  делится на

$$3^{\frac{46}{2}} \cdot 7^{\frac{53}{2}} = 3^{23} \cdot 7^{26}$$

натуральное  
натуральное число, следовательно

на  $3^{23} \cdot 7^{26}$  и  $3^{23} \cdot 7^{26}$  ( $a, b, c$  - натуральн.)

Ответ:  $3^{23} \cdot 7^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Заметим, что градусы <sup>максимум</sup> можно  
сравнить на наибольший  
общий делитель чисел  
и знаменателя.

~~Вывести его по формуле~~  
Евклида

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) = (a+b, a - 11ab)$$

Мы вывели из правой части  
 $(a+b)$  при этом из НОД не

выберем, заметим, что  
 $\text{НОД}(a, -b) = \text{НОД}(a, b)$

$$\text{НОД}(a+b, -11ab) = \text{НОД}(a+b, 11ab)$$

Пусть  $a$  делится на простое  $p$ ,  
тогда  $a$  или  $b$  делится на  $p$ .

Пусть это  $a$ , то тогда  $b$  на него  
не делится, иначе  $a$  сравнимо.

Оно из чисел делится на  $p$ , а другое - нет.  
значит и их сумма не делится.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Программа

дана формула для вычисления

на р. Значит  $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$ ,

если  $a$  и  $b$  взаимно просты

$a+b$  не имеют общих множителей с

$ab$ , но по формуле на р. 11,

получается  $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$

и  $m = 11$

Пример  $a = 5$   $b = 6$

$$\frac{5+6}{5^2 - 9 \cdot 5 \cdot 6 + 6^2} = \frac{11}{-209} = \frac{1}{-19}$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

~~$-3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x + 1$~~

$$\rightarrow 6x + 5 = (-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

→ там передо врем, так как  
 $3x^2 - 5x + 6$ ,  $3x^2 + x + 1$  параболы

при  $x$  квадратная парабола  $x$ ,  
так как  $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0$   $D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1$ ,  $\Delta$  корни

нет, и старший коэффициент

$$0 = (-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1)$$

правая часть выражения равна 0

при  $(-6x + 5) = 0$  или  $(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1) = 0$   
 $-6x + 5 = 0$  при  $x = \frac{5}{6}$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1$$

$$\text{таким } \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1 > 0$$

получается  $x = \frac{5}{6}$

Ответ:  $\frac{5}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

в радиусе

$$OO'^2 = O'C'^2 + OC'^2$$

$$OC = \sqrt{OO'^2 - O'C'^2} = 4$$

и

$$OC = \sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$OC = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow OC = 5$$

Проведем окружность касательную  
 $\varnothing E(\varnothing)$  на  $OC$  и  $E$  на  $\Omega$

Окружность перпендикулярна  $OC$   
и  $O'E$ . Получаемся  $\varnothing EKO$

Прямоугольный  $\varnothing EKO$   
Углы  $\angle O\varnothing E, \angle \varnothing EK$  равны  $90^\circ$  между  
радиусом и касательной.

$\angle EKO = 90^\circ$  перпендикуляр к  $O'E$

$\varnothing E = KO = \sqrt{OO'^2 - KO'^2}$  по теор. Пифагора.

$$OO' = 13 \quad KO' = 13 - EK = 13 - O\varnothing = 13 - 5 = 8$$

$$\varnothing E = KO = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$$

Ответ.  $\sqrt{105}$



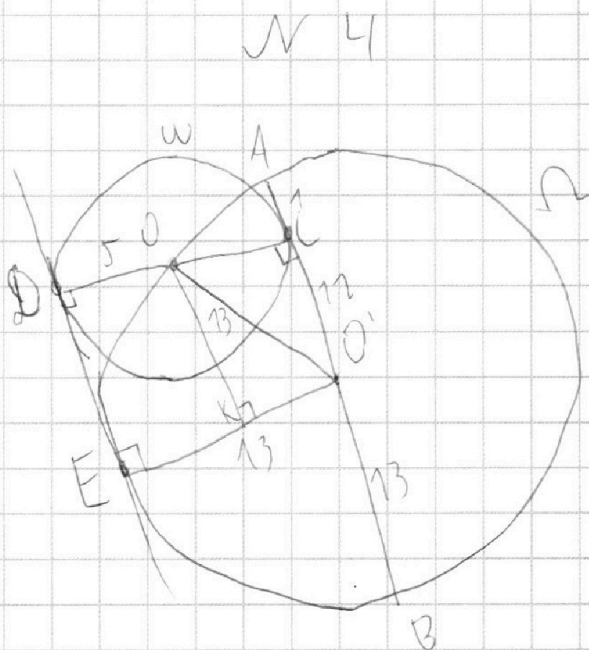
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $O, O'$  - центры  $\omega$  и  $\Omega$  соотв.  
известно, что

$AB$  - диаметр  $\Omega$  равен  $AC + CB = 1 + 25 = 26$ ,

значит радиус  $O'A = \frac{26}{2} = 13$

$O'O = 13$  - тоже радиус  $\Omega$

$O'C$  - касательная к  $\omega$  в точке  $C$   
значит она перпендикулярна

радиусу  $OC$  по теореме

Пифагора  $OO'^2 = OC^2 + CO'^2$

$$CO'^2 = AO' - AC = 13 - 1 = 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



W J

умножим

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad \text{на } 5x - y = 3z$$

$$\left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y}\right)(5x - y) = \frac{15}{z} \cdot 3z$$

$$40 - \frac{8y}{x} - 1 + \frac{5x}{y} = 45$$

$$6 = \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} \quad | \cdot \frac{x}{y}$$

$$6 \frac{x}{y} = \frac{5x^2}{y^2} - 8$$

введём замену  $\frac{x}{y} = t$

$$5t^2 - 6t - 8 = 0$$

$$(5t + 4)(t - 2) = 0$$

$$\begin{cases} t = -\frac{4}{5} \\ t = 2 \end{cases}$$

введём

обратную замену

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{4}{5} \\ y = 2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{8}{-x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$5x = 3z + y$$

$$\frac{8}{x} = \frac{15}{z} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{8}{5} = 5 + \frac{15y}{z} - 1 - \frac{3z}{y} \quad | \cdot \frac{y}{z}$$

$$0 = \frac{12y}{5z} + \frac{15y^2}{z^2} - 3$$

Введем замену  $\frac{y}{z} = q$

$$0 = \frac{12}{5}q + 15q^2 - 3$$

$$0 = 12q + 75q^2 - 15$$

$$0 = q^2 - \frac{4}{15}q - \frac{1}{5}$$

$$0 = \left(q - \frac{2}{15}\right)^2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{225}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и б

Пусть расстояние от А до В  $l$ ,  
скорость велосипедиста  $v$   
и мотоциклиста  $v_m$  соответственно.  
Тогда ~~можно~~ за  $\frac{l}{v}$  и  $\frac{l}{v_m}$  - время,  
за которое велосипедист и  
мотоциклист проехали от А до  
В соответственно.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{l}{v} - \frac{l}{v_m} = 17 \cdot l \cdot v \cdot v_m \\ \frac{l}{v} \cdot v_m - \frac{l}{v_m} \cdot v = 4 \text{ км} \cdot l \cdot v \cdot v_m \\ \frac{l}{v + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} - \frac{l}{v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = 0,6 \text{ ч} \cdot (v + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} l v_m - l v = 17 \cdot l \cdot v \cdot v_m \\ l v_m^2 - l v^2 = 4 \text{ км} \cdot l \cdot v \cdot v_m \\ l (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) - l (v + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) = 0,6 \cdot (v + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \end{cases}$$

$$l v_m^2 - l v^2 = 4 \text{ км} \cdot l \cdot v \cdot v_m \quad | : l v^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прогрессивнее  $\downarrow$

$$l \frac{v_m^2}{v_b^2} - l = 4gkm \frac{v_m}{v_b}$$

Введём замену  $\frac{v_m}{v_b} = k$

$$lk^2 - l - 4gkmk = 0$$

Введём замену

$$\frac{l}{v_m} = tm \quad \frac{l}{v_b} = tb$$

тогда получаем  $v_m = \frac{l}{tm} \quad v_b = \frac{l}{tb}$

$$tb - tm = 17$$

$$tb \cdot \frac{l}{tm} - tm \frac{l}{tb} = 4gkm$$

$$tb = 17 + tm$$

$$17 + tm \frac{l}{tm} - tm \frac{l}{17 + tm} = 4gkm$$

$$\left\{ \begin{array}{l} tb = 17 + tm \\ 17 \frac{l}{tm} - \frac{tm l}{17 + tm} = 4gkm \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

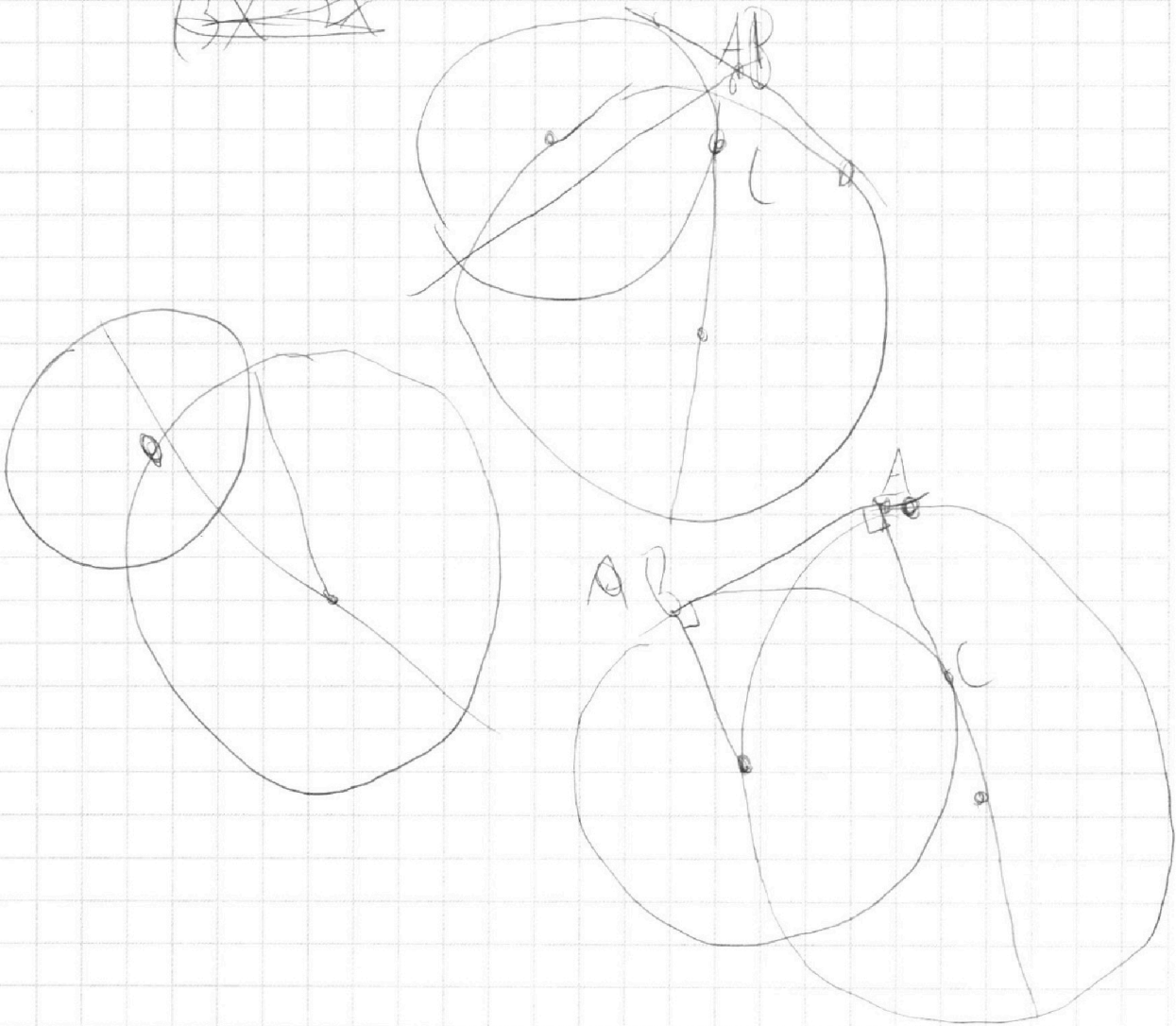
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(3x^2 - 5x + 6) \sqrt{3x^2 + x + 1}$$
$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$
$$\cancel{(3x^2 - 2x)}$$



$$-6x + 5 = (5 - 6x) \left( \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \right)$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \frac{5 - 6x}{\sqrt{3x^2 + x + 1}}$$
$$\left( \sqrt{3}x - \frac{5}{\sqrt{3}} \right)^2 + 3$$

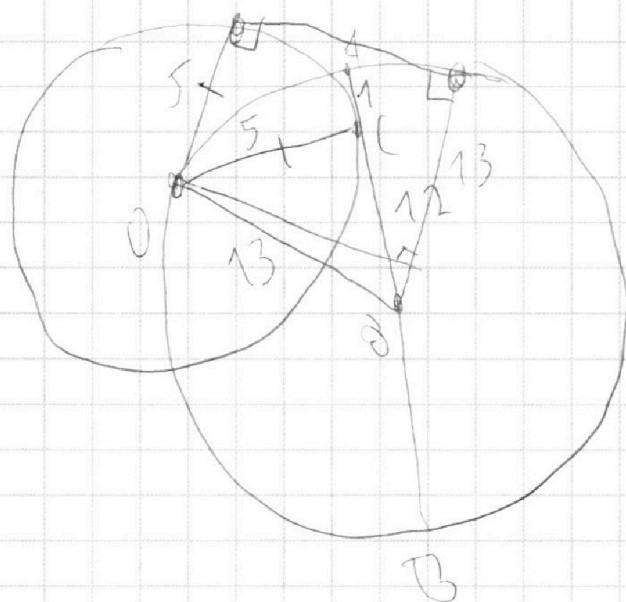
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{matrix} 1 & 5 \\ 7 & 6 \\ 4 & 1 \\ & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sqrt{b} & \sqrt{m} \\ l \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 270 \\ 61 \\ 209 \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{l}{\sqrt{b}} - \frac{l}{\sqrt{m}} &= 1 \\ \frac{l}{\sqrt{b}} \sqrt{m} - \frac{l \sqrt{b}}{\sqrt{m}} &= 49 \\ \frac{l}{\sqrt{b}+7} - \frac{l}{\sqrt{m}+7} &= 0,6 \end{aligned} \right.$$