



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 14

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ .

- [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклиstu на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

- [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Если об делится на  $3^{14} \cdot 7^{13}$ , то  
в разложении на простые множи-  
тели есть  $3^{14} \cdot 7^{13}$ , включая  
делители  $a$  и  $c$ . Переупорядочим  
 $ab - bc - ac$ , чтобы в разложении  
было очевидно на множители  
деления  $3^7 \cdot 3 \cdot 7^7 \cdot 3 \cdot 7 = 3^8 \cdot 7^8$   
 $ab - bc - ac = a^2 b^2 c^2$ .

$$abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2}$$

значит об делится на

$$3^{\frac{11}{2}} \cdot 7^{\frac{7}{2}} = 3^{\frac{28}{2}} \cdot 7^{\frac{36}{2}}$$

равнозначное

Найдем самое малое, где делится  
на  $3^{\frac{28}{2}} \cdot 7^{\frac{36}{2}} + 3^{\frac{28}{2}} \cdot 7^{\frac{36}{2}}$  ( $a, b, c$  - равнозначные)

$$\text{Ответ: } 3^{\frac{28}{2}} \cdot 7^{\frac{36}{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Замечено, что дробь имеет  
сокращение по наибольший  
общий делитель числителя  
и знаменателя.

Рассмотрим ее по алгоритму  
Евклида

$$\text{HOD}(a+b, a^2 - ab + b^2) = (a+b, a^2 - 11ab)$$

Из выражения из первой части  
 $(a+b)$  при этом из HOD не  
из消去, замечено, что

$$\text{HOD}(a, -b) = \text{HOD}(a, b)$$

$$\text{HOD}(a+b, -11ab) = \text{HOD}(a+b, 11ab)$$

Таким образом  $a$  и  $b$  делится на простое  $p$ ,  
тогда  $a$  или  $b$  делится на  $p$ .

Таким образом  $a$  и  $b$  могут быть либо

не делиться, либо в сокращение.

Одно из чисел делится на  $p$ , а другое - нет.

значит и их сумма не делится.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

Доказательство если в группе  
на Р. Значит  $\text{fl}_0 f(a+b, ab) = 1$ ,

если в некоторой  
<sup>группе</sup> из двух

$a+b$  не имеет <sup>из двух</sup> доказательств

$ab$ , то можем доказать па. 11,

покажем  $\text{fl}_0 f(a+b, ab) \geq 1$

$$a+b = 11$$

Пример  $a=5$   $b=6$

$$\frac{5+b}{5^2 - 9 \cdot 5 \cdot b + b^2} = \frac{11}{-209} = \frac{1}{-19}$$

Ответ: 11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad | + \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6}^2 - \sqrt{3x^2 + x + 1}^2 = 5 - 6x(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

~~- 3x<sup>2</sup> - 5x + 6, 3x<sup>2</sup> + x + 1~~ *поменять*

$$- 6x + 5 = (-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

также переход берет, так как

$3x^2 - 5x + 6, 3x^2 + x + 1$  положительны

при  $\forall$  предположении что  $x$ ,  
так как  $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0 \quad D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1$ ,  $\forall$  корни

нелинейного и старший коэффициент  
положителен,

$$0 = (-6x + 5)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1)$$

проверяя можно выразить из равенства

$$\text{при } (-6x + 5) = 0 \text{ или } (\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1) = 0$$
$$(-6x + 5 = 0 \text{ при } x = \frac{5}{6})$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{(\frac{5}{6})^2 + 3 \frac{11}{12}} \neq 1, \sqrt{3x^2 + x + 1} \neq 0$$

$$\text{таким } (\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} - 1) \neq 0$$

$$\text{получаем } x = \frac{5}{6}$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

$$OO' = OC + OC'$$

$$\text{OC} = \sqrt{OO'^2 - O'C^2} = 4$$

1

$$OC = \sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$OC = \sqrt{25} \Leftrightarrow OC = 5$$

Проведем окружность радиусом

DE (D на  $\omega$ , E на  $\Omega$ )

Очевидно, перпендикуляр к

$O$  на  $O'E$ . Покажем это

крайнюю линиям  $DEKO$

(Чтобы  $\angle ODE$ ,  $\angle DEK$  равны  $90^\circ$ -перпендикульр

радиусом и радиусом)

$\angle EKO = 90^\circ$  перпендикульр к  $O'E$

$DE = KO = \sqrt{OO'^2 - KO^2}$  по теор. Пифагора.

$$OO' = 13 \quad KO = 13 - EF = 13 - 5 = 8$$

$$DE = KO = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$$

Ответ.  $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

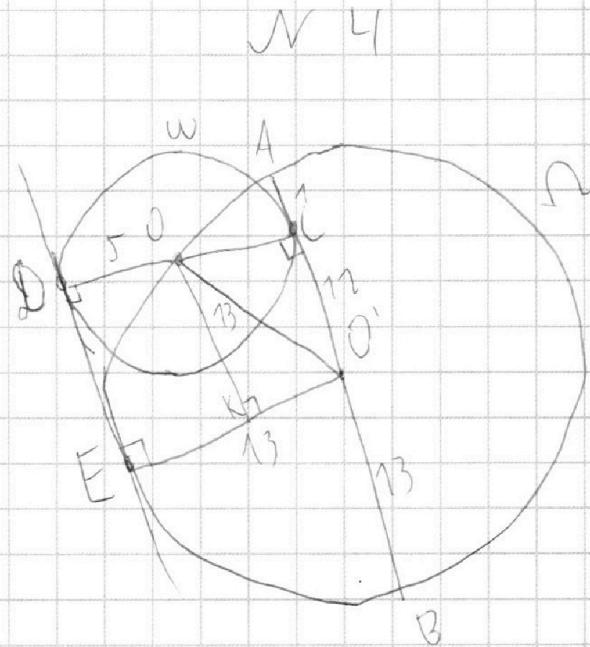
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1    2    3    4    5    6    7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $O, O'$  - центры и  $\angle AOB = 25^\circ$ .  
~~чтобы~~

$AB$ -диаметр он равен  $AC + CB = 1 + 25 = 26$ ,

значит радиус  $O'A = \frac{26}{2} = 13$

$O'O = 13$  - тоже радиус  $52$

$O'C$ -расстояние к  $W$  в точке  $C$

значит это вертикальный радиус

радиус  $OC$  по теореме

Пифагора  $O'C^2 = OC^2 + CO'^2$

$$(O'C^2 = 40^2 - AC^2 = 13^2 - 1^2 = 12)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

W T

Ученик

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{10}{2} \text{ на } 5x - y = 32$$

$$\left( \frac{8}{x} + \frac{1}{y} \right) (5x - y) = \frac{10}{2} \cdot 32$$

$$40 = \frac{8y}{x} - y + 5x - \frac{5x}{y}$$

$$6 = \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x}$$

$$6 \frac{x}{y} = \frac{5x^2}{y^2} - 8$$

✓ Введем замену  $\frac{x}{y} = t$

$$t^2 - 6t - 8 = 0$$

$$(5t+4)(t-2) = 0$$

$$\begin{cases} t = -\frac{4}{5} \\ t = 2 \end{cases}$$

введем

$$\text{с обратную замену } \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{4}{5} \\ y = 2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 32$$

$$\frac{8}{5}x + \frac{1}{y} = \frac{15}{2}$$

$$5x = 32 + y \quad \text{перенесли } y \quad \cancel{\frac{1}{y}} \quad \cancel{\frac{15}{2}} \quad \cancel{\frac{8}{5}} = \cancel{\frac{15}{2}} \cdot \cancel{\frac{1}{y}}$$

$$\frac{8}{5} = 5 + \frac{15y}{2} - 1 - \frac{32}{y}$$

$$0 = \frac{12y}{5} + \frac{15y^2}{2} - 3$$

$$\text{Введем замену } y = 9$$

$$0 = \frac{1}{5}q + 15q^2 - 3$$

$$0 = 12q + 75q^2 - 15$$

$$0 = q^2 + \frac{1}{15}q - \frac{1}{5}$$

$$0 = (q - \frac{2}{15})^2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{225}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н б

Лучше расположить сна A до B в л.,  
скорость велосипедиста ч  
мотоциклиста  $V_B$  и  $V_M$  соответственно.  
Когда велосипедист проходит сна A до  
B велосипедист и мотоциклист проезжают сна A до  
B велосипедист

Велосипедисту требуется время

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{V_B} - \frac{l}{V_M} = 19 \text{ л.} \\ l \cdot V_B = 1 \cdot V_B \cdot V_M \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{V_M} - \frac{l}{V_B} = 4 \text{ град.} \\ l \cdot V_M = 1 \cdot V_B \cdot V_M \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{V_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} - \frac{l}{V_M + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = 0,6 \text{ ч} \\ (V_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (V_M + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) = 1 \cdot V_B \cdot V_M \end{array} \right.$$

1

$$\left\{ \begin{array}{l} l \cdot V_M - l \cdot V_B = 19 \cdot V_B - V_M \\ l \cdot V_M^2 - l \cdot V_B^2 = 49 \text{ град.} \cdot V_B \cdot V_M \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l \cdot (V_M + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) - l \cdot (V_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) = 0,67 \cdot (V_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (V_M + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \\ l \cdot (V_M + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}})^2 - l \cdot (V_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}})^2 = 49 \text{ град.} \cdot V_B \cdot V_M \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l \cdot (V_M + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) - l \cdot (V_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) = 0,67 \cdot (V_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \cdot (V_M + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}) \\ l \cdot V_M^2 - l \cdot V_B^2 = 49 \text{ град.} \cdot V_B \cdot V_M \end{array} \right. \quad | : V_B^2$$

1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

проверочное 1

$$l \frac{V_m^2}{V_f^2} - l = 49 \text{ м} \frac{V_m}{V_f}$$

Введём заметку  $\frac{V_m}{V_f} = k$

$$lk^2 - l = 49k \Rightarrow 0$$

Введём заметку

$$\frac{l}{t_m} = k \quad l = kt_m$$

$$\text{тогда получаем } V_m = \frac{l}{t_m} \quad V_f = \frac{l}{kt_m}$$

$$kt_f - t_m = 14$$

$$kt_b \cdot \frac{l}{t_m} - t_m \frac{l}{kt_b} = 49 \text{ м}$$

1

$$t_b = 14 + t_m$$

$$14 + t_m \frac{l}{t_m} - t_m \frac{l}{14+t_m} = 49 \text{ м}$$

2

$$t_b = 14 + t_m$$

$$14 \frac{l}{t_m} + l - t_m \frac{l}{14+t_m} = 49 \text{ м}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

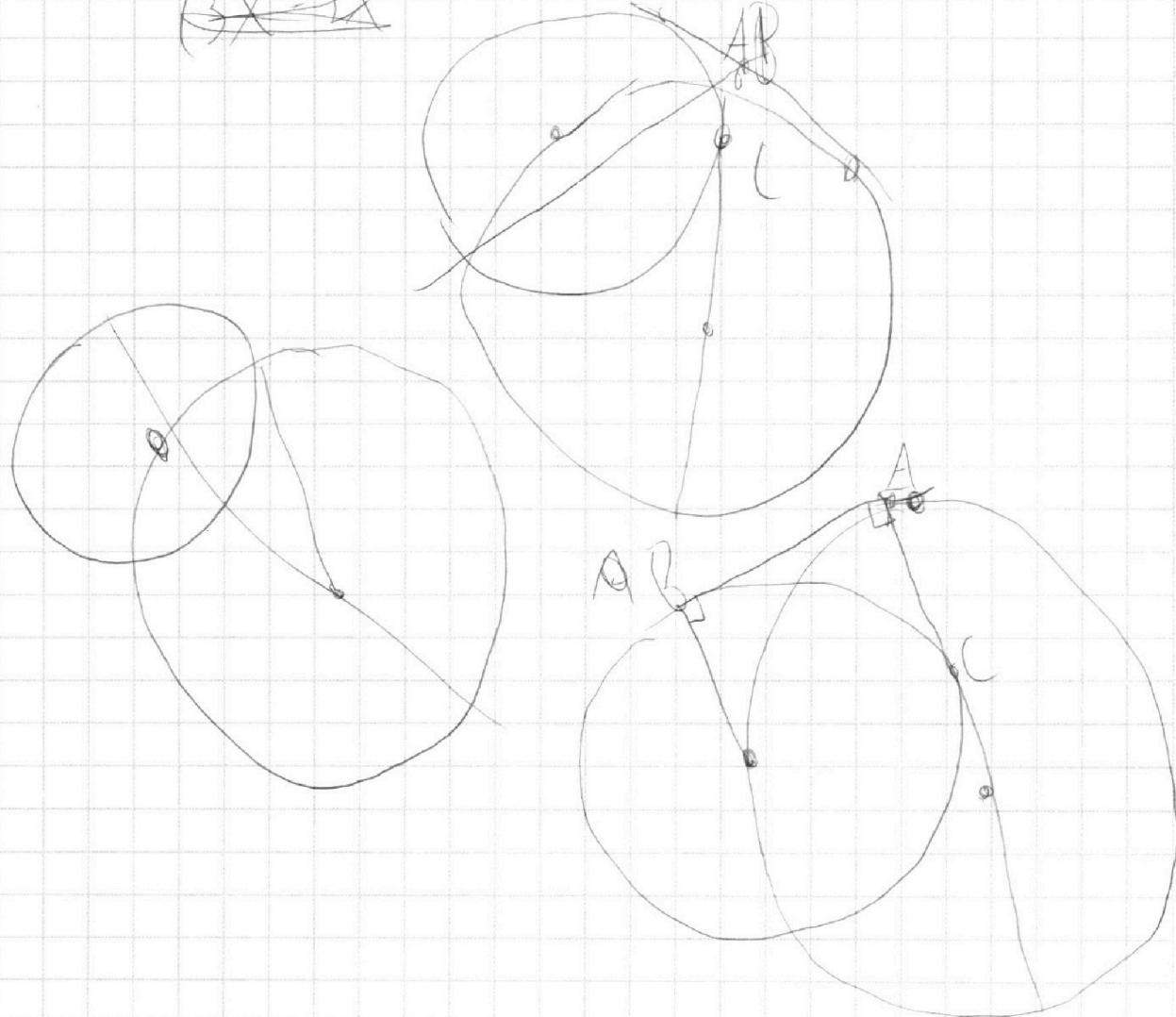
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)$$
$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$(3x^2 - 2x)$$



$$-6x + 5 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = x^2 - \frac{5}{3}x + 2$$
$$(\sqrt{3x^2 - 5x + 6})^2 + 3$$



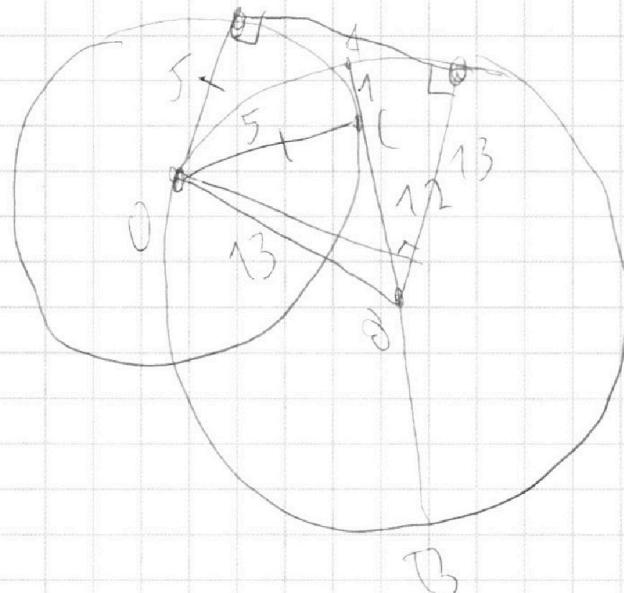
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1  
2  
3  
4  
5  
6

270  
61  
209

$\sqrt{6}$     $V_m$   
 $l$

$$\frac{l}{\sqrt{6}} - \frac{l}{V_m} = 1$$

$$\frac{l}{\sqrt{6}} - \frac{l\sqrt{6}}{V_m} = 49$$

$$\frac{l}{\sqrt{6+7}} - \frac{l}{\sqrt{V_m+7}} = 0,6$$