



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p - некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CDM) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$; $\Delta = 4t^2 - 4$; $x_1, x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{4t^2 - 4}}{2} = -\sqrt{3}t \pm \sqrt{t^2 - 1}$

м.к. $x_1 \cdot x_2 > 0$; $4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow 4t^2 > 4 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow |t| > 1$

$D = b^2 - 4ac$; $D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = -4t^2 + 16$

м.к. по укл. $\frac{1}{2} \Rightarrow D > 0 \Rightarrow -4t^2 + 16 > 0$; $-4t^2 > -16$; $t^2 < 4$; $|t| < 2$

$\begin{cases} |t| > 1 \\ |t| < 2 \end{cases} \Rightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a+b=40 \Rightarrow b=40-a$; к.к. Числовый

$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$;

$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) =$

$= (2a-40)(2a-25) = 17p^5$; $2a - 40 = \text{числ}$, $40 - \text{числ}$, $\text{числ} - \text{числ} = \text{числ} \Rightarrow$

$2a - 40 = \text{числ} \Rightarrow 2a - 40 \equiv 2 \Rightarrow 17p^5 : 2$; $17 \cdot 2 = 7p^5 : 2$;

к.к. p - простое, то оно делится на себя и на $p \Rightarrow$ если $p^5 : 2 \Rightarrow$

$p=2 \Rightarrow 17p^5 = 17 \cdot 2^5 = 17 \cdot 32 = 544$

$(2a-40)(2a-25) = 544 \Rightarrow 4a^2 - 130a + 1000 = 544$;

$4a^2 - 130a + 456 = 0$, $2a^2 - 65a + 228 = 0 \Rightarrow$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -\frac{b}{a} = 32,5 \\ a_1 \cdot a_2 = \frac{c}{a} = 114 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 4; a_2 = 28,5$$
 к.к., м.к. $a \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a=4$; $a+b=40 \Rightarrow b=36$

Ответ: $a=4$; $b=36$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого порт = $7 \cdot 3 = 9$ ^{и 4 штифта} \rightarrow всего 9 мест для 8 человек = 7

1 место оставшихся штифтов. \rightarrow Будем 2 возможные ряда

ряды x и y с пустой партией, z - во сколько способов разместим

три человека рядного роста = 1 (по возрастанию роста)

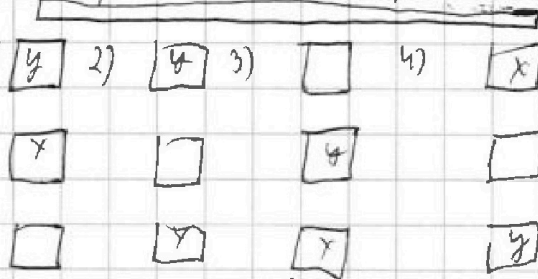
Во сколько способов встроим штифт на заданной ряду $\overset{\text{из 8 человек}}{=} C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$

На втором заданном ряду останется на встроить 5 человек \rightarrow способов = $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$, на второй ряд

останется 4 человека, пусть их рост x и y соответственно, третий $x > y$

\rightarrow всего способов разместить их, чтобы не было парами

вариантов = 4



Всего, не учитывая штифты все 3 ряда, на эти ряды можно

поставить штифты и будем получать новые способы. Всего способов разместить их штифты = $3!$ \rightarrow в итоге получаем

$$(C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4) \cdot 3! = \left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 4 \right) \cdot 3!$$

Ответ: $\left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 4 \right) \cdot 3!$



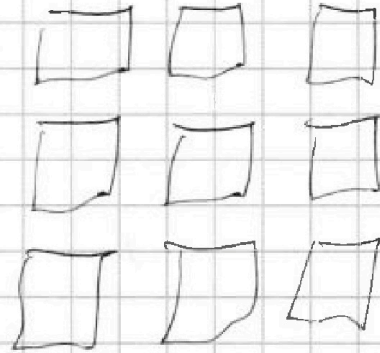
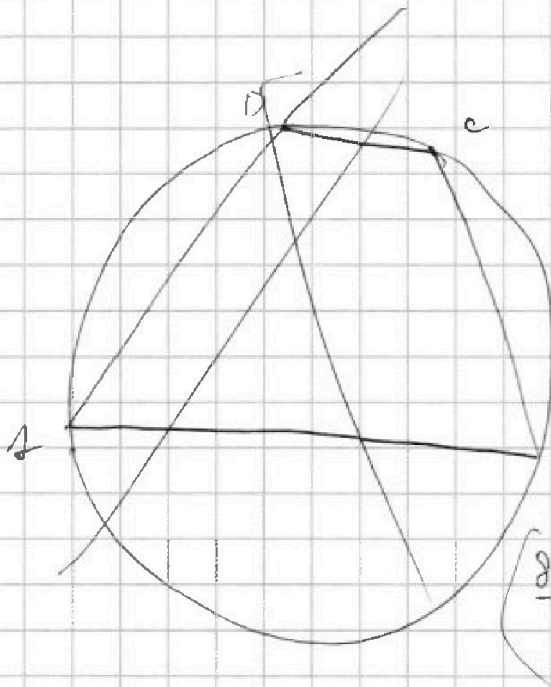
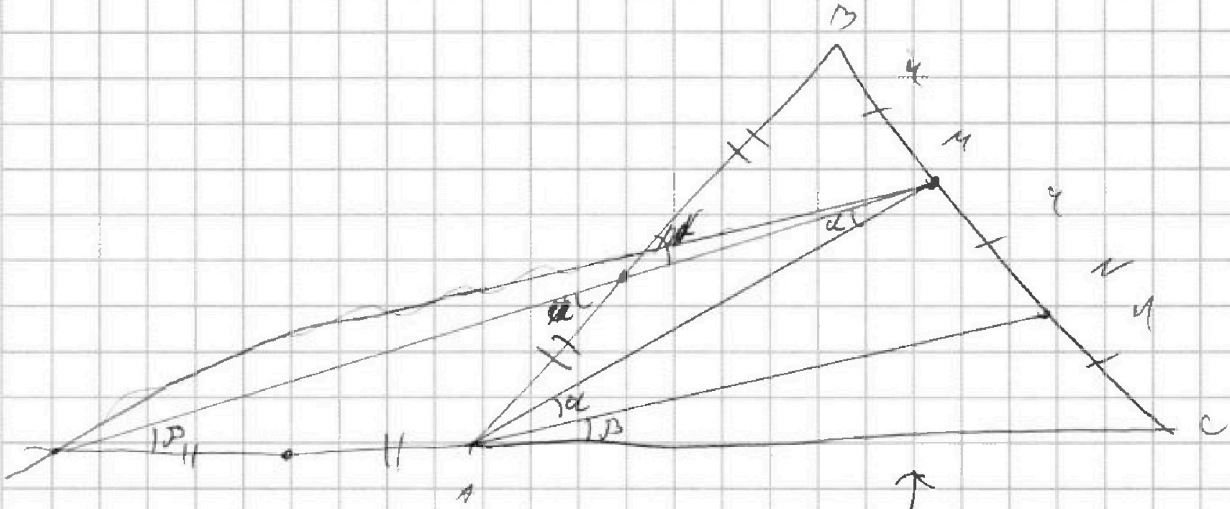
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 14 \cdot 3!$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

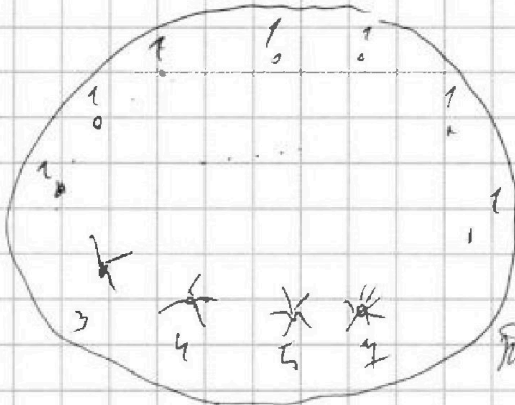
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6. Числовые

Представьте себе задачу в виде графа.

Каждая вершина графа = деревце, соединим те ^{деревца (вершины)} вершины, между которыми есть дороги. Получим в итоге граф и вершины.



и вершин. Убедитесь что у каждой вершины степени равны 2, 3, 5, 7. У остальных $d_v = 1$.

Теперь мы убедились, что из любой

вершины и между другими можно выбрать единственные ребра \rightarrow этот граф - дерево. (одной стороны

у дерева на n вершинах $n-1$ ребро, с другой стороны

количество ребер = $\frac{\sum \text{степени вершин}}{2}$, у 4 вершин степени = 3, 4, 5, 7.)

а у остальных $n-4$ равны по единице \Rightarrow

$$n-1 = \frac{(n-4) \cdot 1 + 3 + 4 + 5 + 7}{2} \Rightarrow n-1 = \frac{n+15}{2} \Rightarrow$$

$$2n-2 = n+15 \Rightarrow n=17$$

Ответ: 17 вершин или 17 г 17 деревьев.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad x+y=1; \quad \text{или} \quad x=1-y \Rightarrow x^2=y^2=1; \quad 2(xy) - (x^2+y^2) = 1 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=1; \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2=1^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=1 \Rightarrow$$

$$(x^2+2xy+y^2) - (x^2+y^2) = 1-1=0 \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow$$

$$x_1=0 \quad y_1=1; \quad x_2=1; \quad y_2=0.$$

$$\text{Ответ: } (0; 1); (1; 0); (1; 1); (0; 1); (1; 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ задачи

Пусть $1 = a + b$ и $a, b > 0$ и a

$$a^2 = 2x + 2y - x^2 - y^2, \quad b^2 = 1 - |x + y - 2|;$$

~~и $a + b = 1$~~

т.к. $a + b = 1$ и $a, b > 0$, то $a \neq 0$; $a \neq 1$; $b \neq 0$; $b \neq 1 \rightarrow$

a, b - натуральные, тогда наименьшее число в квадрате - не целое,

$2x + 2y - x^2 - y^2$ - целое, т.к. x и y - целые по теореме;

$2x$ - целое; $2y$ - целое; x^2 - целое (число в квадрате целое) и

y^2 - целое (аналогично по той же причине) \Rightarrow значит a и b - не

суммируемые \Rightarrow либо I) $a = 0$ либо $b = 0$ - II
 $\begin{matrix} a \\ b = 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} b \\ a = 1 \end{matrix}$

Рассмотрим I: $b = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow 1 - |x + y - 2| = 1 \Rightarrow x + y = 2$

$$a = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow 2(x + y) - (x^2 + y^2) = 0; \quad 2 \cdot 2 - (x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 2^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 & y_1 = 2 \\ x_2 = 2 & y_2 = 0 \end{matrix}$$

Рассмотрим II: $b = 0 \Rightarrow b^2 = 0 \Rightarrow 1 - |x + y - 2| = 0 \Rightarrow |x + y - 2| = 1 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x;$

$$a = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow 2(x + y) - (x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

$$x^2 + (3 - x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$ по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2 \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

перевести

$$2x + 2y - x^2 - y^2 = 2x + 2y - x^2 - y^2 - 1 - 1 + 1 + 1$$

$$(-x^2 + 2x + 1) + (-y^2 + 2y - 1) + 2 = -(x-1)^2 + (y-1)^2 + 2$$

$$2 - (x+1)^2 - (y+1)^2 \quad 2x + 2y - x^2 - y^2 =$$

$$(x+y-2) < 1$$

$$2k - x^2 = (k-x^2)^2$$

$$x+y \in [1, 3]$$

$$2k - y^2 - k^2 + 2kk + k^2 = 2k - k^2 + 2kx$$

$$x+y=k \rightarrow y=k-x$$

$$2k - k^2 + 2kx + kx^2 > 0$$

$$-k^2 + 2kx > -2kx \quad x+y = 1, 2, 3$$

$$x(2-x) + y(2-y)$$

$$2x > k-2$$

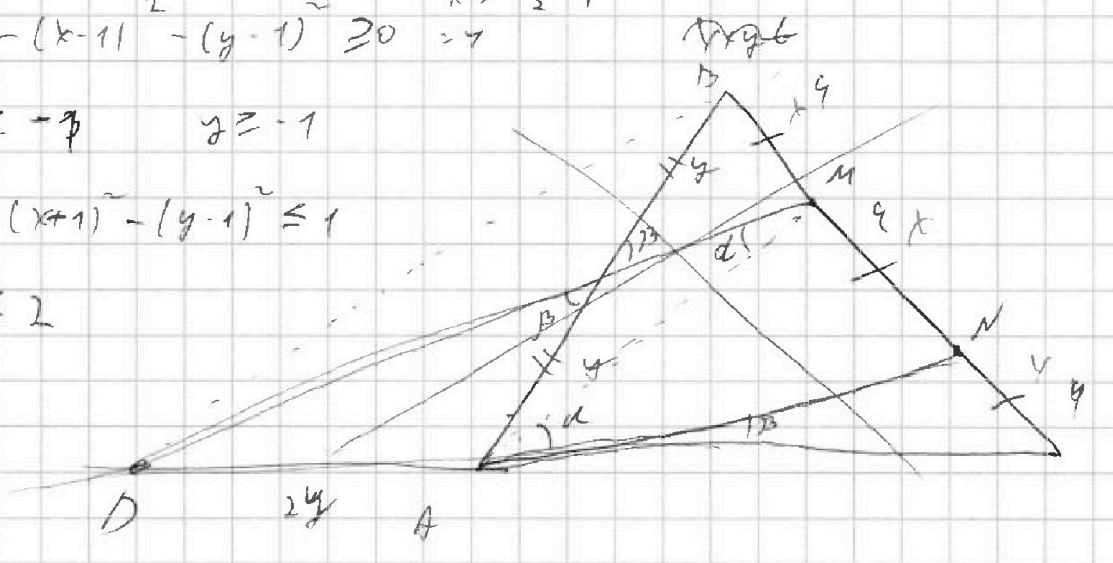
$$x > \frac{k}{2} - 1$$

$$2 - (x-1)^2 - (y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \geq -1 \quad y \geq -1$$

$$2 - (x+1)^2 - (y+1)^2 \leq 1$$

$$x \leq 2$$



$$x=y$$

Handwritten signatures and scribbles at the bottom of the page.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$y^2 + 2\sqrt{3}x + 4x^2 - 4 = 0$$

$$D = 12x^2 - 16x + 16 = 4(3x^2 - 4x + 4) > 0$$

$$4x^2 - 4 > 0$$

$$|x| > 1$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a + b = 40$$

$$b = 40 - a$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17p^5$$

$$2a \in \{12, 15\}$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

$$2a - 25 = 0 \Rightarrow 2a = 25$$

$$(2a-40) | (2a-25) = 17 \cdot 2^5$$

$$4a^2 - 80a + 80a + 1000 = 17 \cdot 2^5$$

$$4a^2 - 130a + 1000 - 17 \cdot 2^5 = 0$$

$$a_1 + a_2 = \frac{130}{4} = 32,5$$

$$a_1 = 4, a_2 = 28,5$$

$$a_1 \cdot a_2 = 114$$

$$n-1 = a_1 - a_2 = 24$$

$$n-1 = (n-4) + 3 \cdot 4 + 6 + 7$$

$$n-1 = \frac{n+75}{2}$$

$$2n-2 = n+75$$

$$n = 77$$

054 0221

32
 x 17

 2 24
 3 2

 5 44

