



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Замечу, что для того, чтобы abc было минимальным,
 abc ~~до~~ не должно делиться ни на какие простые числа,
отличные от 2 и 7, иначе, т.к. в условии дано только
условие на ~~кратность~~ делимость на числа вида $2^k \cdot 7^l$, то
раздел abc на данное простое, из которого
условие ни как не нарушится, т.е. если, без ограничений,
 $a: p$, где p - простое, $p \neq 2, p \neq 7$, то если $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$, то
 $\frac{a}{p} \cdot b: 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow$ следует искать минимальное abc вида
 $2^n \cdot 7^m$. Т.е. какое из a, b, c имеет вид $2^i \cdot 7^j$

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$; $b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$; $c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$, тогда,
 $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$.

Замечу, чтобы $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$, нужно, чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$ и $\beta_1 + \beta_2 \geq 11$

Аналогично рассуждая для остальных двух условий

$$\begin{aligned} bc: 2^{17} \cdot 7^{18} &\Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \text{ и } \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} &\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \text{ и } \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

Складывая пер-ва в той системе, получаем, что $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55 \Rightarrow$
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27.5$. Но, т.к. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - цел. числа (степени простого числа), то
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$.

Продолжение на след. листе.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Я ищу такое m , что числитель и знаменатель были кратны $m \Rightarrow$

$a+b:m$ и $(a+b)^2-9ab:m$. Рассмотрим $(a+b)^2-9ab:m$.

Из условия, что $a+b:m \Rightarrow (a+b)^2:m \Rightarrow$ эта разность была кратна m

$9ab:m$. Пусть $m:r$, r -простое, $r \neq 3$, тогда $9:r \Rightarrow$ либо a , либо b

$b:r$. Без огр общности, пусть $a:r \Rightarrow b:r$, т.к. иначе, если

$a:r$ и $b:r$, то $\frac{a}{b}$ не будет не сокр (можно будет сократить на

r). Но, тогда $a+b$ будет $:r$, т.к. $a:r$ и $b:r$, но $a+b:m$, где $m:r$

$a+b:r \rightarrow$ Противоречие, т.к. число не может одновременно делиться и

не делиться на $r \Rightarrow \nexists r$, что $r \neq 3$ и $m:r \Rightarrow$ Единственное

простое на которое может делиться m - это 3. Также, замету, что

если степень вхождения 3 в m хотя бы 3, т.е. $m \geq 27$, то приходим

к аналогичному противоречию, т.к. степень вхождения 3 в $9 \neq$ равна

$2 \Rightarrow ab:3 \Rightarrow$ либо $a:3$, либо $b:3 \Rightarrow$ Если $a:3$, то $b:3$, иначе

$\frac{a}{b}$ - сократима дробь (можно сократить на 3), но тогда $a+b:3$, т.к. a

$a:3$ и $b:3$, но $a+b:m$, где $m:3 \Rightarrow a+b:3$ - Противоречие $\Rightarrow$ степень

вхождения 3 в m не больше 2. Приведу пример для $m=9$.

$$a=1, b=8 \text{ (видно, что дробь } \frac{a}{b} = \frac{1}{8} \text{ - несократима)} \quad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{1+8}{1-56+64} = \frac{9}{9}$$

а эта дробь сократима на 9 $\Rightarrow$ существует такие a, b , что $m=9$.

Максимальное $m=9$, вот пример. Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

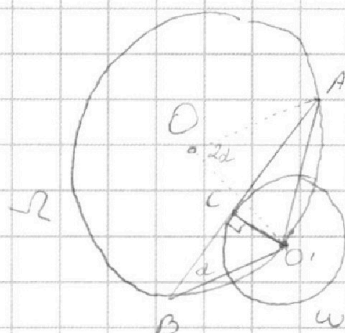
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3



Дано, R - окр. Ω - окр., O' - центр Ω ,
 O - центр R

$O' \in R$ радиус $R = 13$, радиус $\Omega = 7$.

AB - хорда R , AB кас. Ω в C , так что

$AC : CB = 17 : 7$; $\frac{1}{2}$

Найти: длину AB

Решение

Пусть $AC = 17x$, $CB = 7x$ ($AC : CB = 17 : 7$), т.к. AB - кас. к Ω , то $O'C \perp AB$
 $\Rightarrow \triangle O'CB$ - пр.т., где $O'C = 7$ ($O'C$ - рад. Ω); $CB = 7x \Rightarrow$ по т. Пиф. $O'B = \sqrt{CO'^2 + CB^2}$
 $= \sqrt{49 + 49x^2}$, а $CO'^2 = 49 + 49x^2$. Пусть $\angle CBO' = \alpha$, тогда $\cos \alpha = \frac{CB}{BO'}$.

Замечу, что $\angle AOO' = 2\angle ABO'$, т.к. $\angle AOO'$ - центральный и опр. на AO' , как и $\angle ABO'$. Тогда $\angle AOO' = 2\alpha$. Замечу, что $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$.

$$\cos \alpha = \frac{CB}{BO'} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{CB^2}{BO'^2} = \frac{49x^2}{49 + 49x^2} = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \frac{1 + x^2}{1 + x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \text{ т.к. } \angle ACO' = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACO' - \text{пр.т.} \Rightarrow \text{по т. Пиф}$$

$$AO'^2 = AC^2 + CO'^2 = 289x^2 + 49. \text{ Из т. кос для } \triangle AOO' \rightarrow$$

$$AO'^2 = AO^2 + OO'^2 - 2\cos(\angle AOO') \cdot AO \cdot OO', \text{ т.к. } AO = OO' = \text{рад. } R = 13, \text{ то подставлю}$$

$$289x^2 + 49 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos(2\alpha)$$

$$289x^2 + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \text{ Сделаю замену } t = x^2 \text{ (} t \geq 0 \text{)} \rightarrow$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{t - 1}{t + 1} \quad (t \neq -1, \text{ т.к. } t \geq 0)$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - \frac{t - 1}{t + 1}\right)$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{t + 1 - t + 1}{t + 1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{2 \cdot 13^2 \cdot 2}{t + 1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{4 \cdot 13^2}{t + 1} \quad \text{умножу обе части на } t + 1 \rightarrow$$

$$(289t + 49)(t + 1) = 676$$

$$289t^2 + 338t + 49 = 676$$

$$289t^2 + 338t + 49 - 676 = 0 \quad 3\text{-го, что то так, что и } 17^2 t^2 + (17^2 + 7^2)t + 7^2 = 26^2$$

Продолжение на следующем листе.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение Задачи №3.

~~$1/4 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16$~~

$$289t^2 + 338t + 49 = 676, \text{ замечаю, что } t=1 \text{ подходит}$$

~~289~~ $289 + 338 + 49 = 676$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$t^2 + \frac{338}{289}t - \frac{627}{289} = 0 \rightarrow \text{т.к. свободный член отрицательный, а}$$

один корень положительный (равен 1), то по т. Виета следует, что второй корень отрицателен $\Rightarrow$ он нам не подходит, т.к. $t \geq 0 \Rightarrow$ единственный корень это $t=1$. Вернемся к изм. перем x :

$$x^2 = 6; x^2 = 1, \text{ т.к. } 17x - \text{длина стороны } AC \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \text{из } x^2 = 1 \rightarrow x = 1$$

$$\text{т.к. } AB = AC + CB = 17x + 7x = 24x, \text{ и } x = 1 \Rightarrow AB = 24$$

Ответ: 24.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☒

5

☐

6

☐

7

☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

З-значит, $x = \frac{1}{9}$ - корень, т.к. правая часть равна 0, то

рассмотрим левую часть, т.к. там тоже должно быть 0, что

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}, \text{ т.е. левая часть тоже равна 0.}$$

Один из корней = $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 5

З-тг. тогда зафиксирую точку с коорд x_1, y_1 . Замечу,
это она задает прямую, такую что все точки с коор x_2, y_2
удовл. условию принадлежат ей, и все точки принад. ей удовл.
условию (условие на x_2 и y_2 ~~я~~-линейно). Это это за прямая?

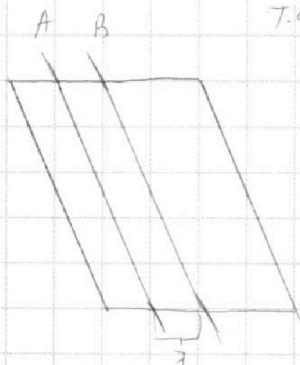
т.к. $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \rightarrow$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$$

$$y_2 = -2x_2 + 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$$

$$y_2 = -2(x_2 - 7 - x_1) + y_1 \rightarrow \text{прямая. Также з-тг. это}$$

Б боковые стороны парал. с вершинами $(-13, 26), (0, 0)$ и $(3, 26), (16, 0)$
лежат на прямых $y = -2x$ и $y = -2x + 32$ соотв $\Rightarrow$ все такие
прямые, которые задаются x_1, y_1 парал. сторонам параллелограмма, также
замечу, это также работает и в другую сторону



т.е. если две прямые А и В, что
которые парал. сторонам, тогда
каждую из $T \in A$ могу взять как точку
 (x_1, y_1) и для нее $\exists$ к условию
будет принадлежать все $T \in B$, причем,
между ними ровно 7 кн, т.к.

$$x_1, y_1 \quad x_1 + 7, y_1$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2x_1 + 14 - 2x_1 + y_1 - y_1 = 14$$

$\rightarrow$ такая точка
подходит.

Продолжение $\otimes$ на след.
листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

$d_1, \beta_1, d_2, \beta_2, d_3, \beta_3$

$d_1, d_2, d_3 - \text{кр. } 2$
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3 - \text{кр. } 7$

$$d_1 + d_2 \geq 15$$

$$d_1 + d_2 \geq 15$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_1 + d_3 \geq 23$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 28$$

$$\beta_2 +$$

$$\min d_1 + d_2 + d_3 = 28$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 18$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{11 + 17 + 39}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 34$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a}{b} : (a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\max m \rightarrow a+b \cdot m; a^2 - 7ab + b^2 : m$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 5ab}$$

$$(3) \quad a \equiv 1 \pmod{3}, b \equiv 2 \pmod{3}$$

$$(a-b)^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$(a+b)^2 - 9ab =$$

$$= (a+b - 3\sqrt{ab})(a+b + 3\sqrt{ab}) = (a+b)(a+b + 3\sqrt{ab})^2$$

$$= ((\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - \sqrt{ab})((\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + \sqrt{ab})$$

$$m:p \Rightarrow q:p$$

$$a:p \Rightarrow b:p$$

$$a+b:p, \text{ то } a+b:m$$

$$m=g$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{1+2}{9^2 - 9 \cdot 3 \cdot 3} / 3$$

$$a+b:m \Rightarrow \frac{(a+b)^2 - 9ab}{m} \Rightarrow 9ab:m$$

$$m \leq a+b$$

$$m \leq 9ab$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

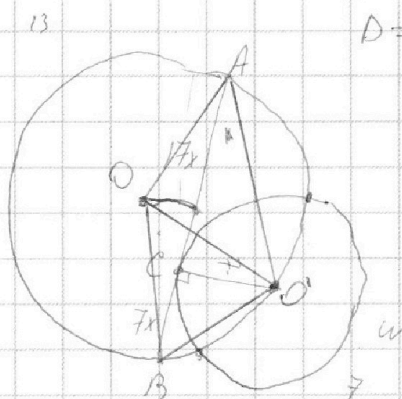
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 676 \\ -49 \\ \hline 627 \end{array}$$



$$17^2 6^2 + (17^2 + 7^2) + 4 - (26^2 - 7^2)$$

$$D = (17^2 + 7^2)^2 + 4 \cdot 17^2 (26^2 - 7^2)$$

AO → x

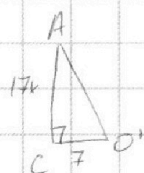
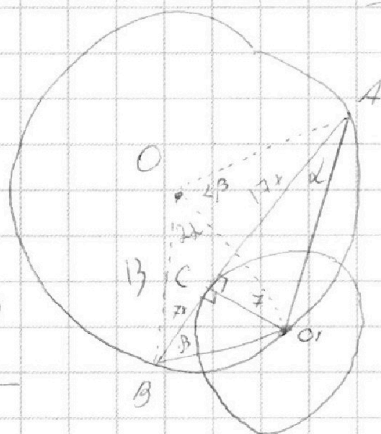
OB → x

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 13 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\cos 2 = \frac{289x^2}{289x^2 + 49}$$



$$AO' = \sqrt{17^2 + 49}$$

$$= \sqrt{289x^2 + 49}$$

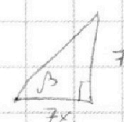
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha =$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$BO'^2 = OB^2 + OO'^2 - 2\cos(2\alpha) OB \cdot OO' =$$

$$= 13^2 + 13^2 - 2\cos(2\alpha) 13 \cdot 13 =$$



$$AO'^2 = \sqrt{289x^2 + 49} \quad \cos^2 \alpha = \left(\frac{17x}{\sqrt{289x^2 + 49}} \right)^2 = \frac{289x^2}{289x^2 + 49}$$

$$BO' = \sqrt{49 + 49x^2} \quad \cos^2 \beta = \frac{49x^2}{49 + 49x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$289x^2 + 49 = 13^2 + 13^2 - 2\cos 2\beta 13^2 =$$

$$= 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$\cos(2\beta) = 2\cos^2 \beta - 1 =$$

$$= \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$2 \cdot 338 - 676$$

$$289x^2 + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 + 49 = 338 - 338 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 + 49 = 338 \left(1 - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$289x^2 + 49 = 338 \cdot \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x^2 + 1} =$$

$$289x^2 + 49 = 338 \cdot \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$(289x^2 + 49)(x^2 + 1) = 289x^2 + 338x^2 + 49 = 676$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2-6x+2 \geq 0; \quad 3x^2+3x+1 \geq 0$$

$$3x^2-6x+2=0$$

$$3x^2-6x+2=0 \quad 3x^2+3x+1=0$$

$$D_1 = 9-6=3$$

$$D = 9-3=6$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{3}}{3}$$

$$D = 36-4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$3x^2+3x+1 = \left(x + \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\sqrt{D} = 2 \cdot \sqrt{9-6} = 2\sqrt{3}$$

$$3x^2-6x+2 = \left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$x_1 = \frac{6-2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 1-\sqrt{3}$$

$$\left(x + \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = x^2 + \frac{3+\sqrt{3}}{3}x + \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = \left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$x_1 \in D = 9-12 < 0 \rightarrow \text{нет корней}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$(-75x^2+15x+2)(-75x^2+15x+2) =$$

$$3x^2 \quad 3x^2$$

$$= 75x^4 - 75x^3 - 150x^2 - 150x^3$$

$$x^2-2x+1 + x^2-2x+1 + x^2-2x+1 - 1 = 3(x-1)^2-1$$

$$x^2+2x+1 + x^2+2x+1 + x^2+2x+1 - 3x-2 = 3(x+1)^2-3x-2$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \wedge^2$$

$$\left(\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2 = 3x^2-6x+2 (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$

$$(3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1) - 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1+81x^2-18x$$

$$6x^2-3x+3 - 2\sqrt{9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x^2-6x+6x^2+6x+2} = 1+81x^2-18x$$

$$-2\sqrt{75x^2+15x+2} = 2\sqrt{9x^4-9x^3-9x^2+2}$$

$$(-75x^2+15x+2)^2 = 4 \cdot (9x^4-9x^3-9x^2+2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = 0 \Rightarrow 1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9} - \text{корень}$$

$$-9x = -1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 6x + 2 \\ 3x^2 - \frac{1}{3}x \\ \hline -\frac{17}{3}x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - \frac{1}{9} \\ 3x - \frac{17}{3} \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 2$$

$$3x^2$$

$$\begin{array}{r} -\frac{17}{3}x + 2 \\ -\frac{17}{3}x + \frac{17}{27} \\ \hline 3x^2 - 6x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27x^2 - 6x + 2 \\ 27x^2 - 3x \\ \hline -3x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9x - 1 \\ 3x - \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \overline{) 9} \\ 6 \overline{) 5} \\ \hline 17 \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1) \left(3x - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 27x^2 - 54x + 18 \\ 27x^2 - 3x \\ \hline -51x + 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9x - 1 \\ 3x - \frac{17}{3} \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 9 \left(x - \frac{1}{9} \right)$$

$$\sqrt{a} = 1 - 9x$$

$$a =$$

$$3x^2 - 6x + 2 = \left(x - \frac{1}{9} \right) \left(3x - \frac{17}{3} \right) + \frac{37}{27}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \left(3x + \frac{10}{3} \right) \left(x - \frac{1}{9} \right) + \frac{22}{27}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x + 1 \\ 3x^2 - \frac{1}{3}x \\ \hline \frac{10}{3}x + 1 \\ \frac{10}{3}x - \frac{10}{27} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x - \frac{1}{9} \\ 3x + \frac{10}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d_1 + d_2 = 16 \\ d_1 + d_2 = 23 \\ d_2 + d_3 = 17 \\ d_1 + d_2 + d_3 = 16 + d_1 \\ d_3 = 23 - d_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d_2 + d_3 = 40 - 2d_1 = 17 \\ 2d_1 = 22 \\ d_1 = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A = 2 \\ b = 7 \\ c = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 = 17 \\ \beta_1 + \beta_3 = 39 \\ \beta_2 + \beta_3 = 24 \\ \beta_2 = 17 - \beta_1 \\ \beta_3 = 39 - \beta_1 \\ 56 - 2\beta_1 = 24 \\ 2\beta_1 = 32 \\ \beta_1 = 16 \rightarrow \beta_2 = 1 \rightarrow \beta_3 = 23 \\ 2\beta_2 + 3\beta_3 = 29 \rightarrow \beta_2 < 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

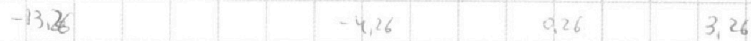


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение Задачи №5.

Тогда, в Δ не забывая условие, что все точки имеют

целые коорд и внутри из паралл, то в качестве прямой
на которой будем отмечать точку с коорд x_1, y_1 можно выбрать



любую прямую, проходящую

через точку с коорд $\{(-13, 26), (-4, 26)\}$ и парал боковым сторонам парал

если выберем прямую через точку $x, 26$, где

$x > -4$, то ей парал. через Δ клеток будет проходить через $(x+7 > 3, 26)$,
это уже не в парал.

Таких точек ровно 10. Заметим, что на каждой

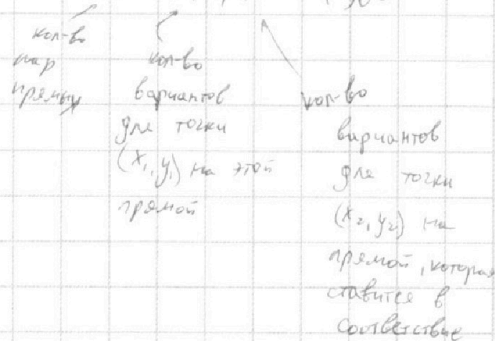
такой прямой ровно 14 целых точек с целыми координатами

тогда для каждой из этих 10 прямых на ней ~~сет~~

на которых я выбираю точку x, y , ставится ровно одна

прямая на которой я выбираю точку с коорд x_2, y_2 тогда всего

вариантов выбора пары $\rightarrow 10 \cdot 14 \cdot 14 = 1960$



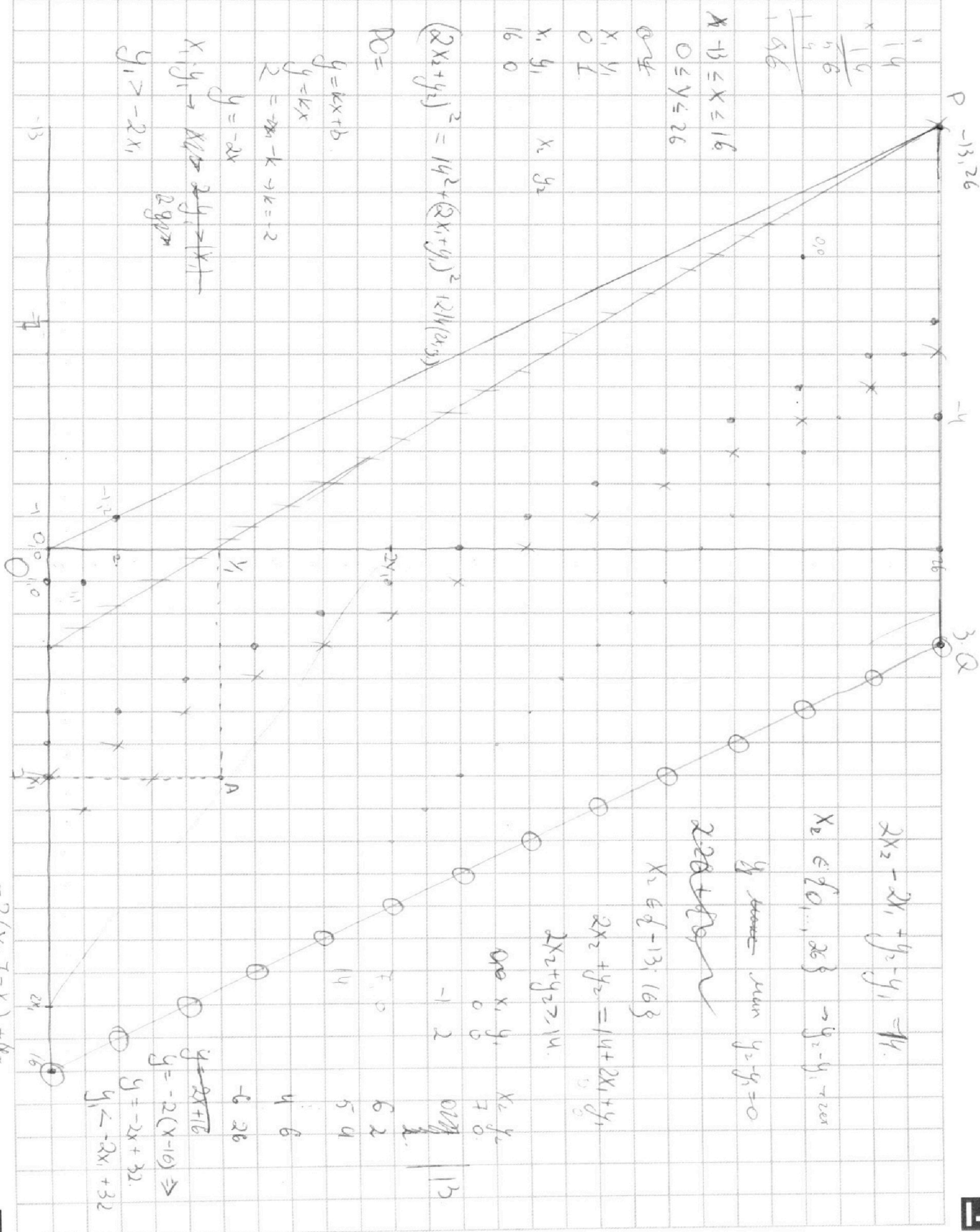
Ответ: 1960.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(-75x^2 + 15x + 2)^2 = 4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2)$$

$$(-75x^2 + 15x + 2)(-75x^2 + 15x + 2) = 5^2 \cdot 15^2 x^4 - 5^2 \cdot 15^2 x^3 - 15 \cdot 6 x^2 - 5 \cdot 15^2 x^3 + 2 \cdot 5 \cdot 15 x^2$$

$$+ 15^2 x^2 + 15 \cdot 2x - 2 \cdot 15 \cdot 5 x^2 + 2 \cdot 15x + 4$$

$$= 5^2 \cdot 15^2 x^4 - 2 \cdot 5 \cdot 15^2 x^3 - 4 \cdot 5 \cdot 15 x^2 + 15^2 x^2 + 4 \cdot 15x + 4 = 4 \cdot 9x^4 - 4 \cdot 9x^3 - 4 \cdot 9x^2 + 8$$

$$(1 - 9x)^2 = 1 + 8/x^2 - 18x \quad (5^2 \cdot 15^2 - 4 \cdot 9)x^4$$

$$\begin{array}{r} x - \frac{1}{9} \\ \hline x^3 \cdot (5^2 + 15^2 - 4 \cdot 9) \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x^2 - 2x + 1 = t$$

$$3t = 3x^2 - 6x + 3 = 3x^2 + 3x + 1 + 2 \neq -9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3t + 9x - 2$$

$$\sqrt{3t - 1} - \sqrt{3t + 9x - 2}$$

$$1 - 9x = (1 - 3\sqrt{x})(1 + 3\sqrt{x})$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x - 1 = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x(x-2)+2} - \sqrt{3x(x+1)+1}$$

$$\sqrt{3x\left((x-2) + \frac{2}{3x}\right)} - \sqrt{3x\left((x+1) + \frac{1}{3x}\right)} = 1 - 9x$$

$$9x^2 \sqrt{1 - 9x} = 1 - 9x$$