



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



№1 Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 4^{\beta_1}$ ,  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 4^{\beta_2}$ ,  $c = 2^{\alpha_3} \cdot 4^{\beta_3}$ , тогда  
 $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 4^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$

Из условий имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 & (1) \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 & (2) \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 13 & (3) \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 11 & (4) \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 & (5) \\ \beta_3 + \beta_1 \geq 39 & (6) \end{cases}$$

≥ т.к. изнач. степень  
 вхождение простого  
 фактора в число  $abc$   
 не, чем число вхождений  
 этого же простого фактора  
 в факторы числа  $n$  -  
 - проги вообще

сложно

$$\begin{aligned} (1)+(2)+(3) & \begin{cases} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 15 + 14 + 13 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 24,5 \end{cases} \\ (4)+(5)+(6) & \begin{cases} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 11 + 18 + 39 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34 \end{cases} \end{aligned}$$

т.к.  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \in \mathbb{N}$ , то

имеем, значит.  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 : 28$ , а

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 : 34$ . Т.о.

имеем, значит.  $abc$  это  $2^{28} \cdot 4^{34}$ . Действительно

если ~~мы~~ <sup>abc</sup> уменьшим, то в него будет

входить  $\leq 24$  двоек или  $\leq 33$  четв. (т.к. оканчивают только из них)

но в таком случае неверно либо

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 24,5)$ , либо  $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34)$ , что  
 следует из условий. Прогн вообще.

Ответ:  $abc = 2^{28} \cdot 4^{34}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$  - несократимая  $\Leftrightarrow (a, b) = 1$   $\left( (a, b) \neq \text{НОД}(a, b) \right)$   
это

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab}$$

( $\Leftrightarrow$  - тогда и только тогда, когда)

Предположим, что дроби сократима  
на  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $m \neq 1$ . Тогда ~~верно не~~ должно выполняться:

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} \xrightarrow{m} \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} \\ & \begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2-3ab : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 3ab : m \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{3ab}$  - сократима на  $m$ .

Докажем, что дробь  $\frac{a+b}{3ab}$  несократима,

т.е.  $(a+b, 3ab) = 1$ :

~~т.к. из условия  $(a, b) = 1$ , то~~

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a \nmid b \\ b \nmid a \end{cases} \Rightarrow a+b \nmid ab \\ & \text{т.к. } \begin{cases} a \nmid a \\ b \nmid b \end{cases} \Rightarrow a+b \nmid a \end{aligned}$$

~~т.к.  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ,  $a \nmid a$  и  $b \nmid b$ , то~~

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{3ab} \Rightarrow \begin{cases} a \nmid a+b \\ b \nmid a+b \end{cases} \end{aligned}$$

~~т.к.  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ,  $a \nmid a$  и  $b \nmid b$ , то~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$a$  и  $b$  есть любые одно нечётное (иначе  $(a,b)=2$ ).~~  
~~Если ~~одно~~ нечётное только одно (другое ветное),~~  
 то  $ab$  - чётное,  $(a+b)$  - нечётное

Теперь ~~так~~ разложимся  $a$  и  $b$  на простые  
мн-ля. Т.к.  $(a,b)=1$  без лишнего, то

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_e^{\beta_e}, \text{ причем } p_i \neq q_j \text{ для } \begin{matrix} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq e \end{matrix}$$

Тогда дробь ~~так~~  $\frac{a+b}{ab}$  примет вид:

$$\frac{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_e^{\beta_e})}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_e^{\beta_e}}. \text{ Заметим, что}$$

она не сократится т.к. числитель не делится ни на один простой множитель знаменателя (а делится только ~~одно~~  $\frac{a+b}{ab}$  сложное, второе не делится).

Получив, что  $\frac{a+b}{ab}$  не сократится приходим к выводу, что сократить можно максимум на  $m=2$ , пример:  $\begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases}$  - несократимо,  $\frac{a+b}{ab} = \frac{5+2}{5 \cdot 2} = \frac{7}{10}$

Ответ:  $m=2$ .

сократимо на  $m=2$   $\frac{a+b}{ab} = \frac{5+2}{5 \cdot 2} = \frac{7}{10}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

241

Во-первых, заметим, что  $3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,  
т.к. коэф. при  $x^2$  положительны, а  $D = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3 < 0$   
("ветви" parabola вверх)

Отсюда  $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} > 0$

Извещ. ур-ие:  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

Допонем его на  $f(x) \geq 0$ :

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 - (\sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$- 9x + 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$x \neq \frac{1}{9}$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$  (возведем в квадрат,  
т.к. обе части неотриц.)

$x \neq \frac{1}{9}$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + (\sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = 1$$

$x \neq \frac{1}{9}$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \quad (*)$$

Заметим, что  $6x^2 - 3x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

т.к. коэф. при  $x^2$  положительны, а  $D = 9 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -39 < 0$ . Отсюда  $6x^2 - 3x + 3 > 1$ ,

значит (\*) не имеет решений при  $x \neq \frac{1}{9}$ , т.к. левая часть

не отрицательна



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, при  $x \neq \frac{1}{9}$  изначальное уравнение решений не имеет.

При  $x = \frac{1}{9}$ :

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1}{24} - \frac{2}{3} + 2} = \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{24} + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{4}{3}} = 0 ; \text{ верно}$$

$x = \frac{1}{9}$  корень.

Ответ:  $\frac{1}{9}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓6

( $\Leftarrow$ ) - только и только  
тогда, когда

$$\begin{cases} ax+ay-8b=0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что  $ax+ay-8b=0$  — уравнение  
прямой. Обозначим её  $\omega$ .

Заметим, что  $(x^2+y^2-1)=0$  — уравнение  
окружности с центром  $(0;0)$  и радиусом  
 $r_1=1$ . Обозначим её  $\omega_1$ .

Заметим, что  $(x^2+(y-12)^2-16)=0$  — уравне-  
ние окружности с центром  $(0;12)$  и ради-  
усом  $r_2=4$ . Обозначим её  $\omega_2$ .

Заметим, что для произвольной точки  $(x_0; y_0)$   
неравенство (2) верно, если она лежит не  
только внутри одной из окружностей  $\omega_1$   
и  $\omega_2$  (т.к.  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не имеют общ. точек,  
ведь расстояние между центрами больше  
суммы радиусов  $1+4=5 < 12$ ).

Кроме того отсюда количество решений  
системы есть суммарное количество точек



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямой  $\ell$  и кругов, которые становятся окружностями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Заметим, что если ~~прямая~~  $\ell$  пересекает ~~одну~~ <sup>хотя бы</sup> из окружностей, то внутри этой окружности лежит целый интервал точек, т.е.  $\ell$  имеет бесконечно много точек с одной из кругов, а значит система имеет бесконечно много решений, что нам не подходит. С другой стороны, если ~~прямая~~  $\ell$  не имеет ни одной из  $\omega_1$  или  $\omega_2$  общих точек, т.е. ~~ни~~ <sup>либо</sup> прямая либо касается окружности, либо не пересекает её. С другой стороны, если  $\ell$  ~~то~~ касается только одной окр. из двух или не касается ни одной, то система имеет одно и не имеет решений соответственно. Получаем, что система имеет ровно 1 решение  $\Leftrightarrow$  прямая  $\ell$  - общая касательная  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Таких прямых - 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

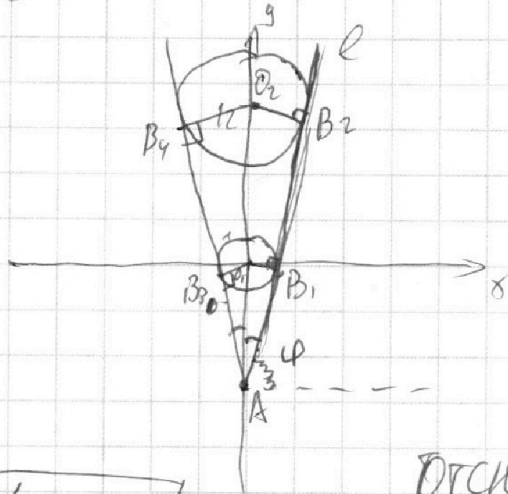
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) внешние касательные



Пусть  $O_1 B_1 \perp l, B_1 \in l$   
 $O_2 B_2 \perp l, B_2 \in l$   
 $O_1 B_3 \perp l, B_3 \in l$   
 $O_2 B_4 \perp l, B_4 \in l$

радиусы в точке касания

точки касания

Заметим, что  $O_1 \in O_2 A$

Отсюда  $A \in O_2$  ( $A \in O_1 O_2$ )

точка пересеч. касательных

$\triangle A O_1 B_1 \sim \triangle A O_2 B_2$  (по 2-м углам)

$$\frac{O_2 O_1}{O_1 A} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{O_2 O_1}{O_1 A} + 1 = 4; O_1 A = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow A(0; -4)$$

$\Rightarrow$  т.к.  $a \neq 0$  упрое  $l$ , то

$$\begin{cases} -4a = 8b \\ b = -2 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение  $l: y = ax + b$

$\Rightarrow$  т.к. упрое  $l: y = -ax + 8b$ , то

(т.к. прямая симметрична отк.  $O_2$ , то решение из 2-х прямых, касательных к окружностям в точке  $O_2$ )

По опр.  $-a$  — тангенс угла наклона  $l$ , т.е.

$$-a = \operatorname{ctg}(\angle O_1 A B_1) = \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\angle O_1 A B_1)} + 1} = \pm \sqrt{16 + 1} = \pm \sqrt{17}$$

$$\sin \angle O_1 A B_1 = \frac{r_1}{O_1 A}$$

$$O_1 A = \sqrt{17}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

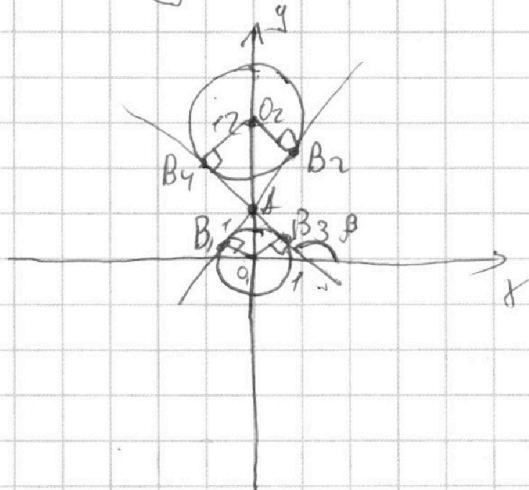
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

II Визир. касательные



Точки  $B_1, B_2, B_3, B_4$  лежат окружностях  $O_1$  и  $O_2$

Аналогично  $A \in O_1 O_2$

$\triangle A O_1 B_1 \sim \triangle A O_2 B_2$  (по 2-м углам)

$$\frac{O_2 A}{O_1 A} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{O_2 O_1}{O_1 A} - 1 = 4$$

$$O_1 A = \frac{12}{5}$$

$$A(0; \frac{12}{5})$$

~~Аналог. I  $\frac{12}{5} = \frac{3}{10}$~~

~~Аналог. I  $\alpha =$  т.к. по опр.  $\alpha$  — тангенс (касат. I пересекает 2-х пр.)~~

$$-\alpha = \angle \beta \text{ и } \beta = -\angle O_1 A B_3 = -\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \angle O_1 A B_3} + 1} \quad \text{---}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{144}{25} + 1} = \sqrt{\frac{169}{25}} = \frac{13}{5} \quad \alpha = \pm \frac{13}{5}$$

замечание: т.к. в I и II графиках прямые симметричны от. Oy, то мы находим „ $\alpha$ “

для одной из двух прямых, а для другой прямой берем  $\alpha$  с противоположным знаком.

Ответ:  ~~$\alpha \in \{\pm \frac{13}{5}, \pm \frac{\sqrt{5}}{6}\}$~~

$$\alpha \in \{\pm \frac{13}{5}, \pm \sqrt{5}\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2+5ab} ; a+b \equiv (a+b)^2 \pmod{ab}$$

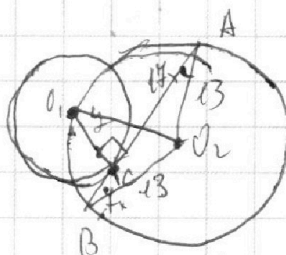
$$(a, b) = 1 \quad m(a+b) = ab$$

$$\frac{5+4}{25-4-5-4+16} = \frac{9}{49-140}$$

$$= \frac{9}{-99}$$

$$3x^2+3x$$

$$3x(x+1)$$



$$b \neq 0$$

$$a \neq 0$$

$$a+b \neq 0$$

$$\frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{2}$$

$$ab = a+b$$

$$ab = (a+b)(x)$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

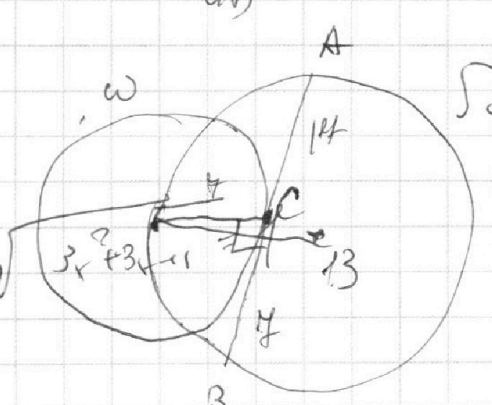
$$x_1, x_2 = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{3}$$

$$a+b \neq 0$$

$$ab \neq 0$$

$$3x^2+3x+1 \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ x \geq \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$a+b = 9ab$$

$$\frac{a}{9b} = \frac{b}{9a}$$

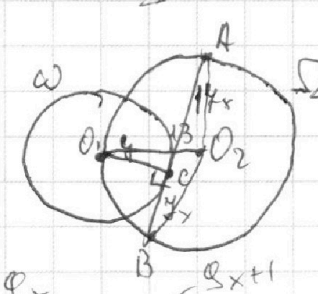
$$a+b = 9ab$$

$$a = -b$$

$$a(b-x) = bx$$

$$a = \frac{bx}{b-x}$$

$$x = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

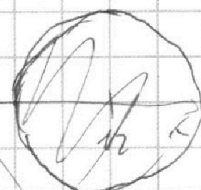
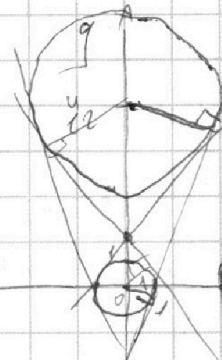
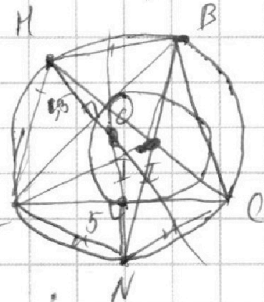
$$x = \frac{1}{3}$$

$$6x^2-3x+3 + \sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1$$

$$6x^2-3x+3 \leq$$

$$2x^2-8x+1 \leq \frac{1}{3}$$

$$6x^2-3x+2 \leq 0$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = kx + b$$

$$\cot \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}$$

$$x + y = 1$$

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$-12y + 144 = 16$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax + y - 8b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (ax - 8b)^2 = 1 \quad (*) \\ ax + y - 8b = 0 \end{cases}$$

$$(*) x^2(a^2 + 1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 16a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = -256b^2 + 4a^2 + 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} \angle_1, \beta_1 \\ 2, 4 \\ 11 \\ \alpha \end{array} \quad \begin{array}{l} \angle_2, \beta_2 \\ 2, 4 \\ 11 \\ \alpha \end{array} \quad \begin{array}{l} \angle_3, \beta_3 \\ 2, 4 \\ 11 \\ \alpha \end{array}$$

$$\angle_1 + \angle_2 = 15$$

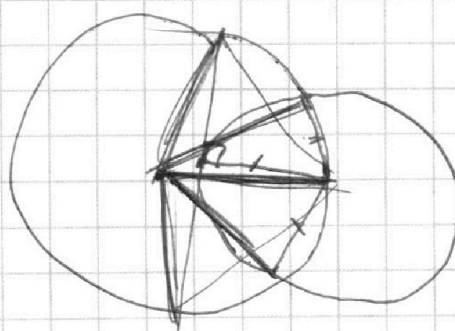
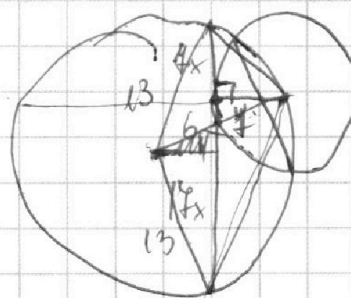
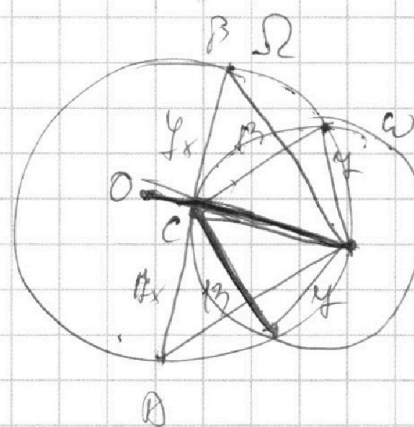
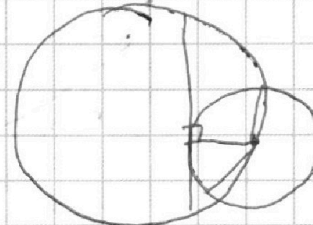
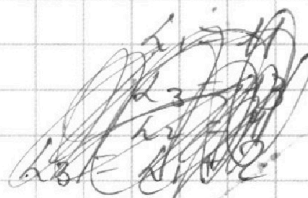
$$\beta_1 + \beta_2 = 11$$

$$\angle_1 + \angle_3 = 23$$

$$\beta_1 + \beta_3 = 39$$

$$\beta_2 + \beta_3 = 18$$

$$\angle_2 + \angle_3 = 14$$



$$121 \sqrt{169 - 144x^2}$$

$$- : 13$$

$$+ : 4$$

