МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$. $ab \vdots 2^{15} 7^{11} \Rightarrow ab = 2^{15} 7^{11} x$, $x \in \mathbb{N}$

$bc \vdots 2^{17} 7^{18} \Rightarrow bc = 2^{17} 7^{18} y$, $y \in \mathbb{N}$

$ac \vdots 2^{23} 7^{39} \Rightarrow ac = 2^{23} 7^{39} z$, $z \in \mathbb{N}$

$a^2 b^2 c^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 2^{17} \cdot 2^{23} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39} xyz =$
$= 2^{45} \cdot 7^{68} xyz$

$(2, 7) = 1$. Очевидно, $abc \to \min$ при $x, y, z \to \min$. $x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow \min(x) = \min(y) = \min(z) = 1$.

$(abc)^2 = 2^{45} \cdot 7^{68} \cdot xyz \Rightarrow abc = 7^{34} \sqrt{2^{45} xyz} =$
$= 7^{34} \cdot 2^{22} \sqrt{2xyz}$.

Очевидно, если $x = y = z = 1$, то abc будет иррациональным $\Rightarrow$ какое-то из чисел > 1. Минимальное число $\in \mathbb{N} > 1$ это 2.

$\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 2$ — рациональное $\Rightarrow x = 2, y = 1, z = 1$.

$abc = 7^{34} \cdot 2^{22} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 7^{34} \cdot 2^{23}$

Ответ: $7^{34} \cdot 2^{23}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.

$\frac{a}{b}$ — несократимая $\Rightarrow$ $(a,b)=1$ $((a,b)=НОД(a,b))$

~~Пусть $a+b=$~~

Докажем, что $m=9$ подходит.

$a+b=9x$ $\Rightarrow$ $a^2+b^2+2ab=81x^2$

$a^2-7ab+b^2=9y$ $((x,y)=1)$

$\Downarrow$

$81x^2-9ab=9y$, $9x^2-ab=y$

Допустим, $\exists$ $m>9$: $m=9+n$ $(n\geq 1)$

$a+b=(9+n)x$ $(x\in\mathbb{Z})$

$a^2+b^2+2ab=(81+18n+n^2)x^2$. $a^2+b^2-7ab=(9+n)y$

$(x,y)=1$

$(81+18n+n^2)x^2-9ab=(9+n)y$

$81x^2+18nx^2+n^2x^2-9ab=9y+ny$

$\underbrace{81x^2+18nx-9ab}_{\vdots 9}+n^2x^2-ny=9y$.

$\Downarrow$

$n(nx^2-y)\vdots 9$

$\underbrace{(9+n)^2x^2}_{\vdots 9+n}-9ab=(9+n)y$

$\Downarrow$

$9ab\vdots 9+n \Rightarrow 9ab\underset{9+n}{\equiv}0\equiv 9+n$

~~$9ab=(9+n)k$ $(k\in\mathbb{Z})$~~

~~$9ab=9k+nk \Rightarrow n\vdots 9$.~~

$9(ab-1)\underset{9+n}{\equiv}n$

$9(ab-1)\equiv n-9-n=-9 \Rightarrow ab-1\equiv -1 \Rightarrow ab\underset{9+n}{\equiv}0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.

$ab \underset{g+n}{\equiv} 0 \Rightarrow ab = (g+n)k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\frac{a}{b} = \frac{(g+n)k}{b^2}$ — несокр $\qquad \frac{b}{a} = \frac{(g+n)k}{a^2}$ — несокр

$\Downarrow$

$((g+n)k;\ a^2;\ b^2) = 1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$((g+n)k;\ a;\ b) = 1$

у $(g+n)k$, a и b нет общ. множителей $\Rightarrow$

~~$ab \vdots (g+n)k$~~ Противоречие.

$ab \neq (g+n)k$ Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.

$R(\omega) = 7$

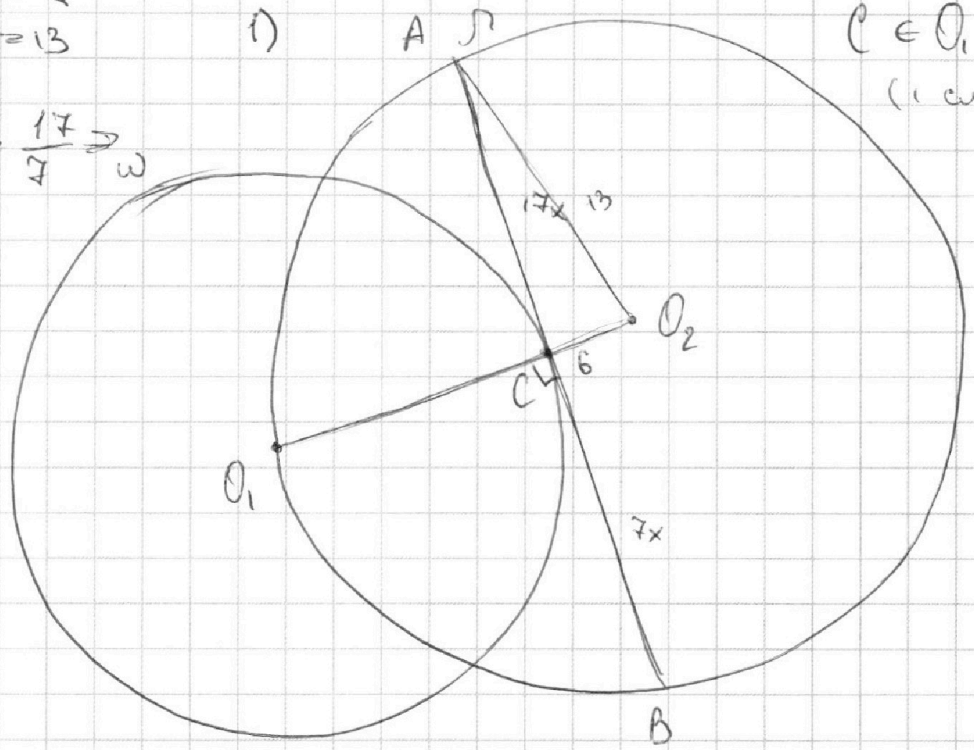
$R(\Omega) = 13$

$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \Rightarrow$

$AC = 17x$,

$CB = 7x$

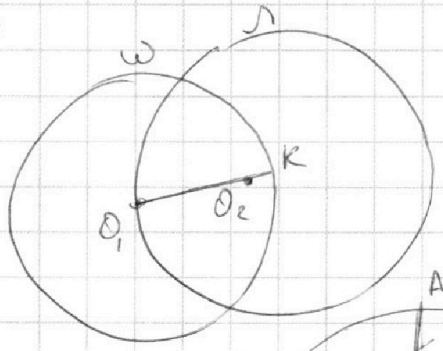
1)



$C \in O_1O_2$

(1 случай)

Докажем, что другого расположения быть не может.

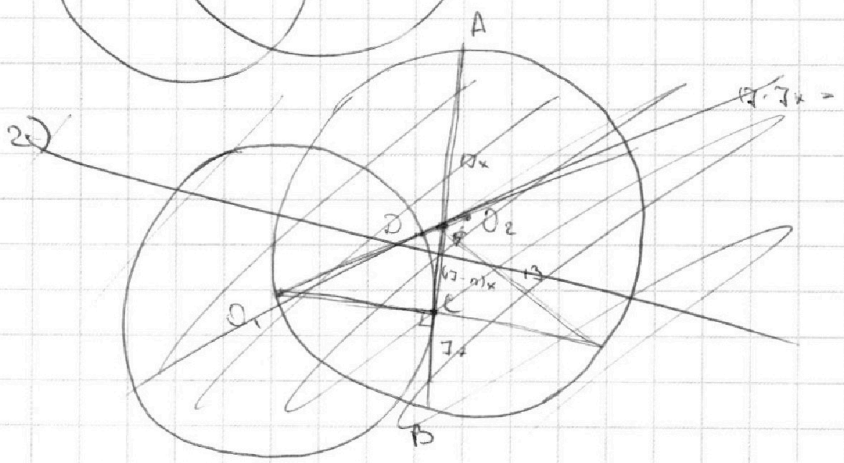


В таком случае $O_1O_2 = R(\Omega) = 13$, $O_1K = R(\omega) = 7$.

$O_2O_1 + O_2K = O_1K \Rightarrow 13 + O_2K = 7 \Rightarrow$

$O_2K < 0$ — противоречие.

2)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

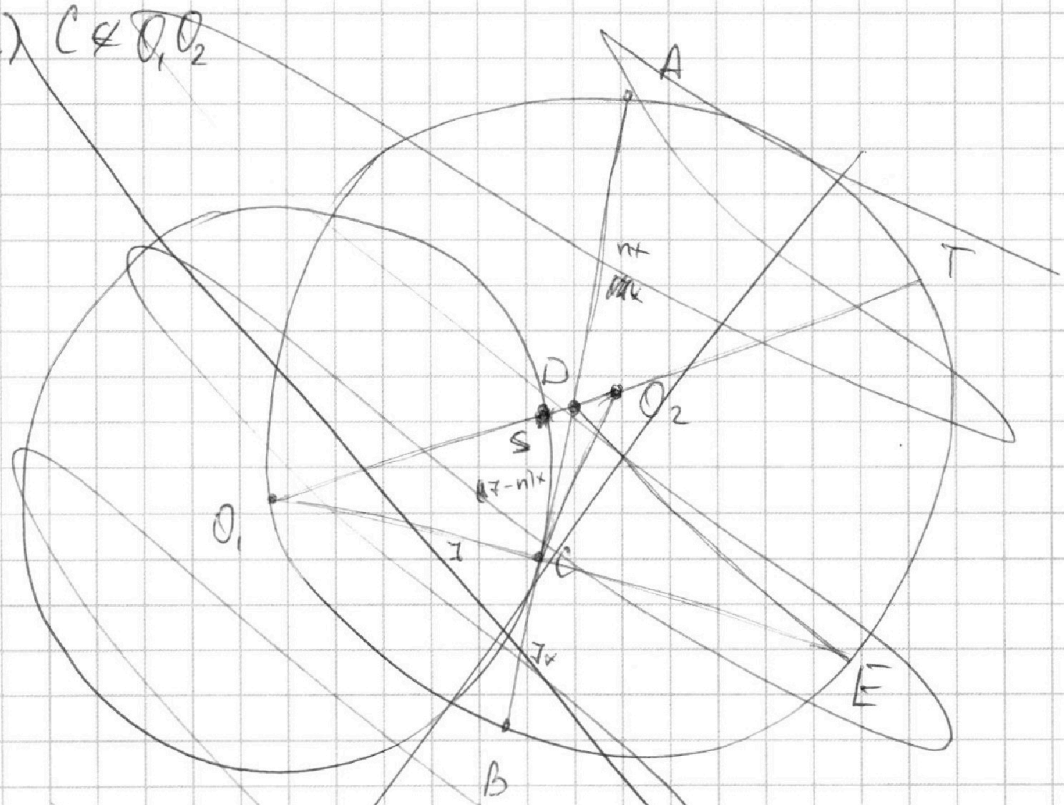
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

по св-ву окр-ти радиус ⊥ касательной ⇒
$O_1C \perp AB$. $O_1C = R(\omega) = 7$, $O_1O_2 = R(\Omega) = 13$ ⇒
$O_2C = O_1O_2 - O_1C = 13 - 7 = 6$. $O_2A = R(\Omega) = 13$. По
т. Пифагора $AC = 17x = \sqrt{13^2 - 6^2} = \sqrt{(13-6)(13+6)} =$
$= \sqrt{7 \cdot 19} = \sqrt{133} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{133}}{17}$. $AB = 17x + 7x = 24x$.
$AB = \frac{\sqrt{133} \cdot 24}{17} = \frac{24\sqrt{133}}{17}$

2) $C \notin O_1O_2$



Пусть $DC = (7-n)x$. По св-ву ∧ хорд
$AC \cdot CB = O_1C \cdot CE \Rightarrow 17 \cdot 7x^2 = 7 \cdot CE \Rightarrow 17x^2 = CE$
$O_1C = R(\omega) = 7$
$O_1E \perp AB$, т.к. AB – касательная

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.

$$49 + 289x^2 - 338 + 338\,\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$$

$$-289 + 289x^2 + \frac{338x^2-338}{x^2+1} = 0$$

$$\cancel{-289(x^2+1)+} \quad 289(x^2-1)(x^2+1) + 338(x^2-1) = 0$$

$$(x^2-1)(289x^2+289+338) = 0$$

$x^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 = -\frac{627}{289} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

$x = 1$

Значит, $x = 1$.

$AB = 24x = 24$.

Ответ: 24; $\frac{24\sqrt{133}}{17}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

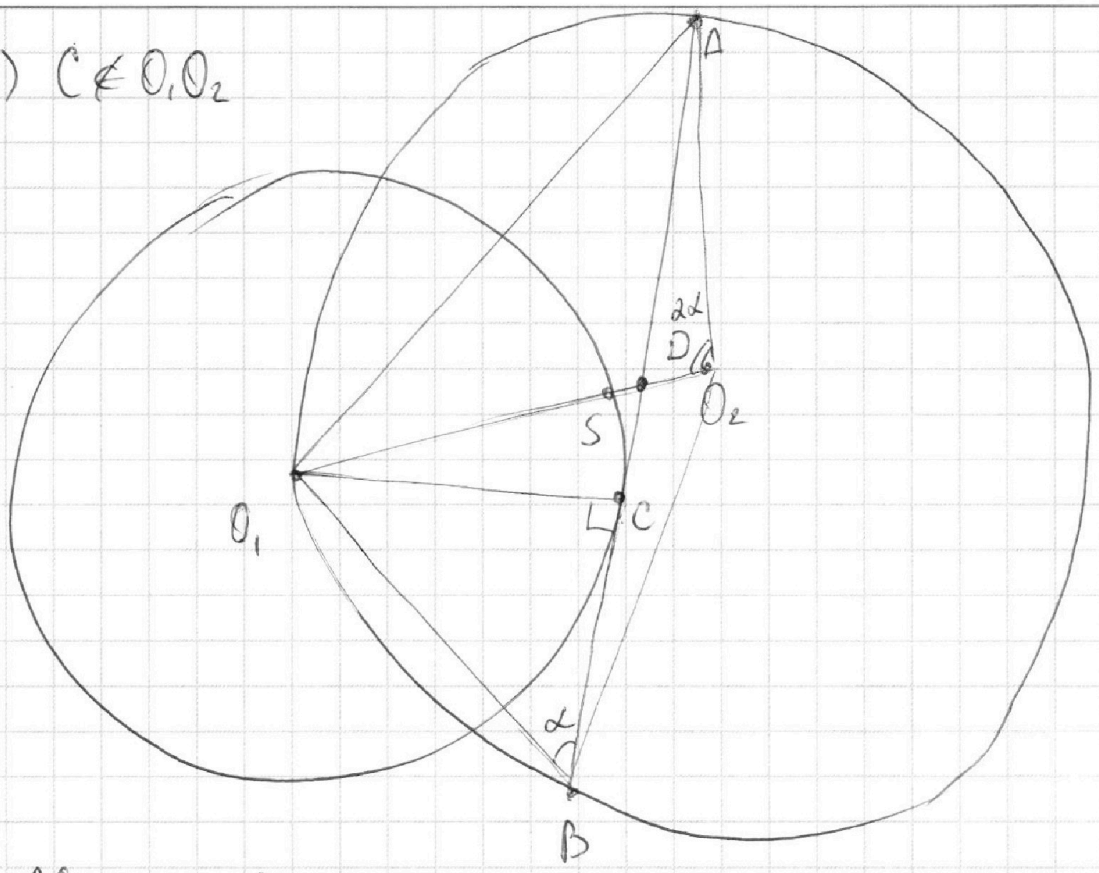
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.

2) $C \notin O_1O_2$



$AC = 17x$, $CB = 7x$.

$O_1C \perp AB$ (AB – кас; O_1C – радиус) $\Rightarrow$
по т. Пифагора:

$O_1A = \sqrt{O_1C^2 + AC^2} = \sqrt{7^2 + 17^2x^2}$; $O_1B = \sqrt{O_1C^2 + BC^2} = 7\sqrt{x^2+1}$

$\angle O_1BA = \alpha$ – впис; $\angle O_1O_2A = 2\angle O_1BA = 2\alpha$ – центральн.

по т. косинусов $O_1A^2 = O_1O_2^2 + O_2A^2 - 2 \cdot O_1O_2 \cdot O_2A \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow$

$7^2 + 17^2x^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

в $\triangle O_1BC$:

$\sin\alpha = \frac{O_1C}{O_1B} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \cos 2\alpha =$

$= 1 - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$49 + 289x^2 = 338 - 338 \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4.

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

ОДЗ: $3x^2-6x+2 \geq 0$

$\cancel{D = 36-4\cdot3\cdot2 = 12}$

$\cancel{x = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} = 1\pm\frac{\sqrt{12}}{6}}$

$3x^2+3x+1 \geq 0$

$D = 9-12 = -3 < 0 \Rightarrow$

$3x^2+3x+1 > 0$ всегда

Заметим, что $3x^2-6x+2-(1-9x) = 3x^2+3x+1$

$3x^2-6x+2 = a$, $3x^2-3x+1 = b \Rightarrow 1-9x = a-b$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b$

Пусть $\sqrt{a} = c$, $\sqrt{b} = d \Rightarrow a-b = c^2-d^2$

$c-d = \underset{(c-d)(c+d)}{\underset{\shortparallel}{c^2-d^2}} \Rightarrow (c-d)(1-c-d) = 0$

$c = d$ $\quad$ $1 = c+d$

1) $c = d \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2-3x+1}$

$3x^2-6x+2 = 3x^2-3x+1$

$-6x+3x+2-1 = 0$

$-3x+1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ ОДЗ: $3\cdot\frac{1}{9} - 6\cdot\frac{1}{3}+2 =$

$= \frac{1}{3}-2+2 = \frac{1}{3} \geq 0.$

подходит.

2) $1 = c+d \Rightarrow 1 = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\cancel{1 = a+b+2\sqrt{ab}}$ $\sqrt{a} = 1-\sqrt{b} \Rightarrow a = 1+b-2\sqrt{b}$

$2\sqrt{b} = 1+b-a$

$\sqrt{b} = \frac{1+b-a}{2}$

$b = \frac{(1+b-a)^2}{4} \Rightarrow 4b = (1+b-a)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4.

$4\cdot(3x^2-3x+1) = (\cancel{1}+\cancel{4}3x^2-3x+1-3x^2+6x-2)^2 =$

$= 4\ 9x^2$

$12x^2-3x+1 = 9x^2 \Rightarrow 3x^2-3x+1=0$

$D<0 \Rightarrow$ нет корней.

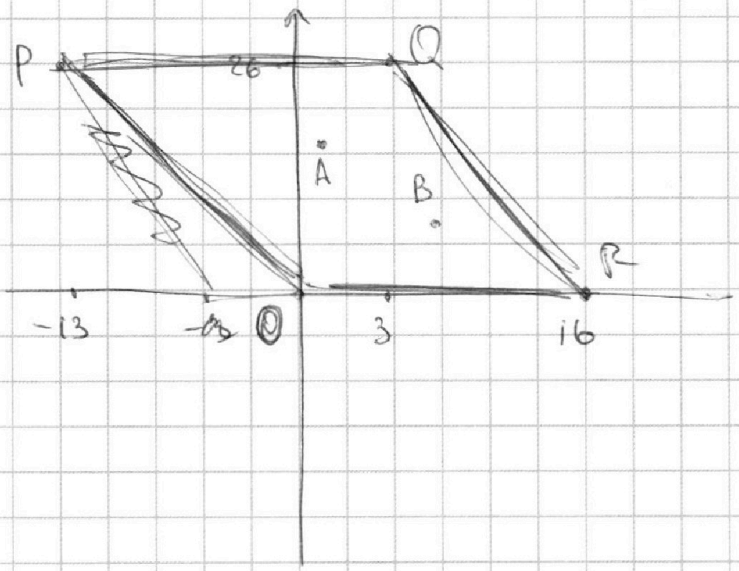
Ответ: $\frac{1}{3}$.

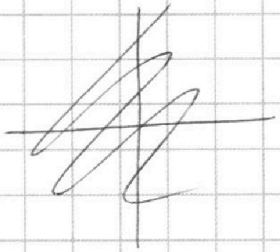
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

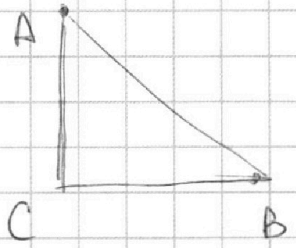
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ







$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$AC = y_2 - y_1$ $\qquad$ $BC = x_2 - x_1$

$2BC + AC = 14 \Rightarrow AC = 14 - 2BC$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{14 - 28BC + 4BC^2 + BC^2} =$

$= \sqrt{14 - 28BC + 5BC^2}$

$0 \le AC \le 26$; $0 \le BC \le 16$.

$\Downarrow$

$0 \le AB \le \sqrt{14 - 28 \cdot 16 + 5 \cdot 16^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

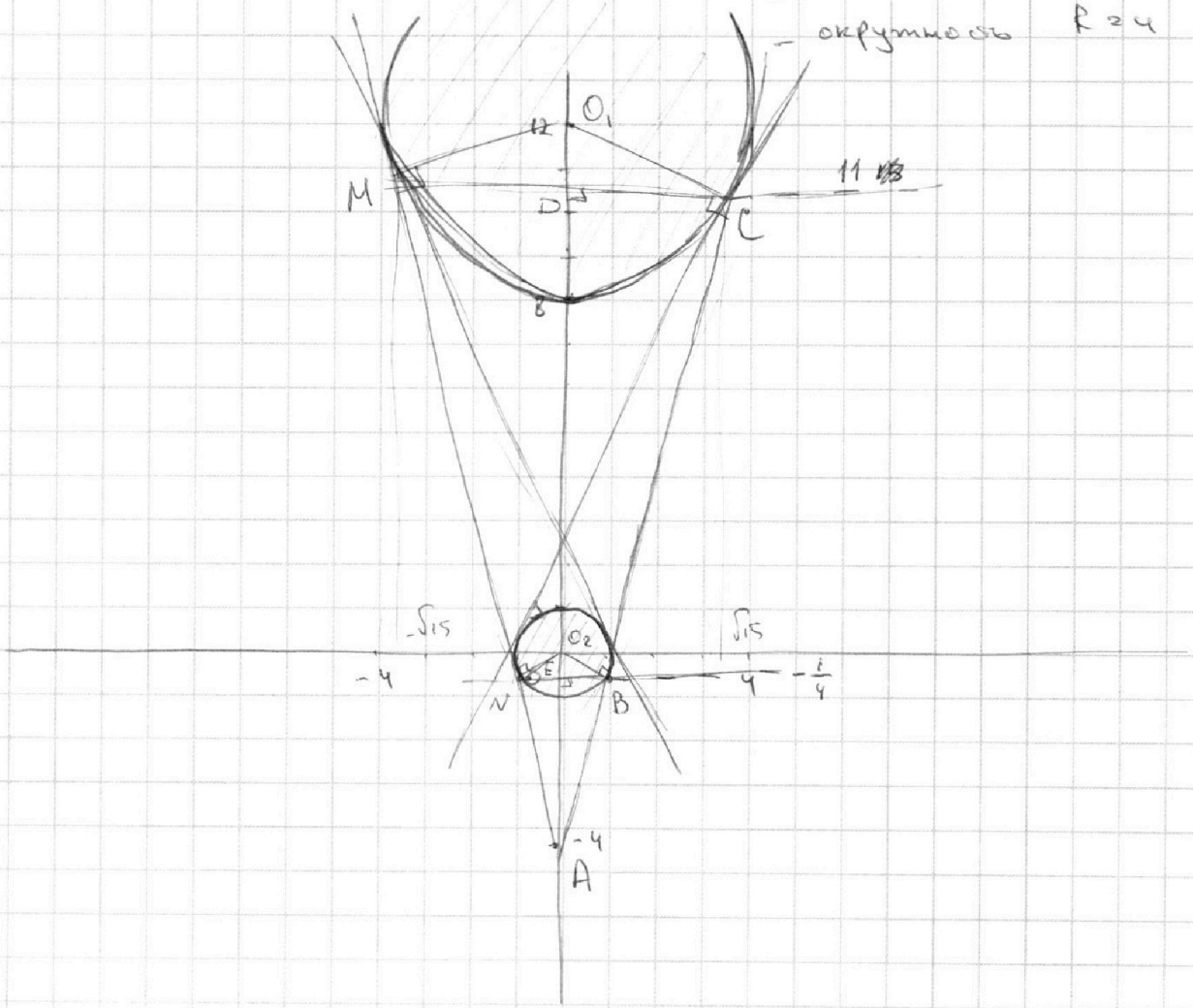
МФТИ

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \Rightarrow y=8b-ax \text{ — график прямой} \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2-е уравнение

$$\begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 1^2 \\ x^2+(y-12)^2\ge 4^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 4^2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y(N) = 8b_1 - a_1 x(N)$ $\qquad$ $y(M) = 8b_1 - a_1 x(M)$

$-\frac{1}{4} = 8b_1 + a_1 \frac{\sqrt{15}}{4}$ $\qquad$ $11 = 8b_1 + a_1\sqrt{15}$

$-$

$$11 + \frac{1}{4} = a_1\left(\sqrt{15} - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$\frac{45}{4} = a_1\left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$a_1 = \frac{45}{3\sqrt{15}} = \frac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

$y(C) = 8b_2 - a_2 x(C)$ $\qquad$ $y(B) = 8b_2 - a_2 x(B)$

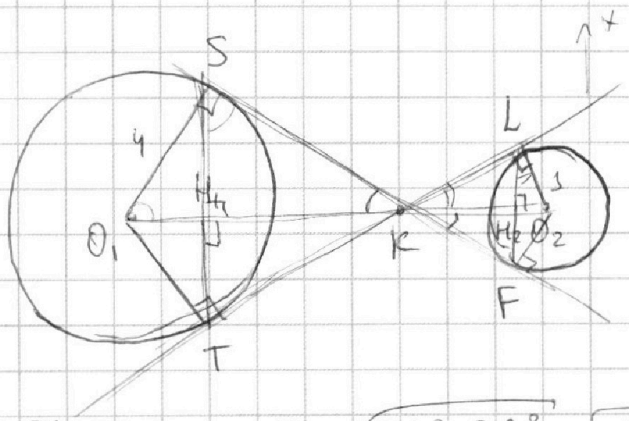
$11 = 8b_2 - a_2\sqrt{15}$ $\qquad$ $-\frac{1}{4} = 8b_2 - a_2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$

$-$

$$11 + \frac{1}{4} = -\sqrt{15}a_2 + \frac{\sqrt{15}}{4}a_2$$

$$\frac{45}{4} = \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \sqrt{15}\right)a_2 = -\frac{3\sqrt{15}}{4}a_2$$

$$a_2 = -\frac{45}{3\sqrt{15}} = -\frac{15}{\sqrt{15}} = -\sqrt{15}$$



нужно найти OH_1 и O_2H_2.

$O_1S = 4$, $O_2F = 1$

$\triangle O_1SK \sim \triangle KFO_2 \Rightarrow$

$\frac{O_1S}{O_2F} = \frac{4}{1} = \frac{O_1K}{KO_2} \Rightarrow 4KO_2 = O_1K$

$KO_2 + KO_1 = O_1O_2 = 12 \Rightarrow$

$5KO_2 = 12$, $KO_2 = \frac{12}{5}$, $O_1K = \frac{48}{5}$

по т. Пифагора $SK = \sqrt{O_1K^2 - O_1S^2} = \sqrt{\frac{48^2}{25} - 4^2} = \sqrt{\frac{48^2 - 20^2}{25}} = \sqrt{\frac{28 \cdot 68}{5}} = \frac{4\sqrt{119}}{5}$, $KF = \sqrt{KO_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$\triangle O_1SK \sim \triangle O_1SH_1 \sim \triangle SH_1K \Rightarrow \frac{SH_1}{H_1K} = \frac{O_1H_1}{SH_1} = \frac{O_1S}{SK} = \frac{5}{\sqrt{119}} \Rightarrow \sqrt{119}\,SH_1 = 5H_1K$

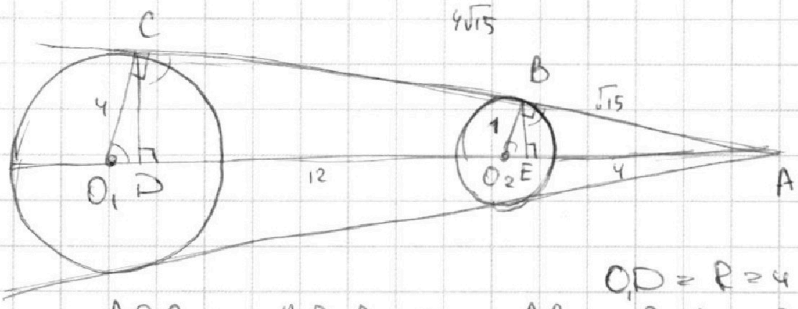
$\sqrt{119}\,O_1H_1 = 5SH_1 \Rightarrow 119\,O_1H_1 = 25\,H_1K \Rightarrow H_1K = \frac{119}{25}O_1H$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

получившаяся совокупность дает график с двумя окр-тями $r=1$ и $R=4$. Точнее, области внутри них (включая их самих). Такое уравнение может иметь 2 решения, если прямая $y=8b-ax$ — общая касательная. Рассмотрим внешние касательные.



O_1O_2 — отс. получившегося угла. Нужно найти ~~O_1D и O~~ O_2D и O_2E.

$O_1D=R=4$, $O_2B=r=1$.

$\triangle AO_1C \sim \triangle AO_2B \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{O_2A}{O_1A}=\frac{O_2B}{O_1C}=\frac{1}{4}$. $O_1O_2=12 \Rightarrow$ $\frac{O_2A}{12+O_2A}=\frac{1}{4} \Rightarrow O_2A=4$. По т. Пифагора для $\triangle O_2BA$ и $\triangle O_1CA$: $AB=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$, $AC=\sqrt{16^2-4^2}=\sqrt{240}=4\sqrt{15}$

$\triangle O_2BE \sim \triangle EBA$: $\frac{BE}{EA}=\frac{O_2E}{BE}=\frac{O_2B}{BA}=\frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow \sqrt{15}BE=EA$, $\sqrt{15}O_2E=BE$

$\Rightarrow 15O_2E=EA \Rightarrow EA+O_2E=16O_2E=4 \Rightarrow O_2E=\frac{1}{4} \Rightarrow$

$y(B)=y(N)=-\frac{1}{4}$. $N, B \in$ окр. $x^2+y^2=1 \Rightarrow$

$x(B)^2+\frac{1}{16}=1 \Rightarrow x(B)=\frac{\sqrt{15}}{4}$; $x(N)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\triangle O_1CD \sim \triangle DCA \Rightarrow \frac{CD}{DA}=\frac{O_1D}{CD}=\frac{O_1C}{CA}=\frac{4}{4\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow$

$\sqrt{15}CD=DA$, $\sqrt{15}O_1D=CD \Rightarrow 15O_1D=DA$. $DA+O_1D=16O_1D=O_1A=16 \Rightarrow O_1D=1$, $DA=15 \Rightarrow y(C)=y(M)=11$. $C, M \in$ окр. $x^2+(y-12)^2=16 \Rightarrow x(C)^2+(11-12)^2=16$, $x(C)^2=15 \Rightarrow x(C)=\sqrt{15}$, $x(M)=-\sqrt{15}$

Значит, если прямые $y=8b_1-a_1x$, сод. N и M
$y=8b_2-a_2x$, сод. C и B

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$OH_1 + H_1K = O_1K = \frac{48}{5} = O_1H + \frac{119}{25}O_1H_1 = \frac{144}{25}O_1H_1 \quad O_1H_1 = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$y(S) = y(T) = O_1O_2 - O_1H_1 = 12 - \frac{5}{3} = \frac{36-5}{3} = \frac{31}{3}$$

Аналогично $\triangle KLH_2 \sim \triangle O_2LH_2 \Rightarrow \frac{LH_2}{H_2O_2} = \frac{KH_2}{LH_2} = \frac{KL}{LO_2} = \frac{KF}{LO_2} =$
$(KL = KF)$

$$= \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$5LH_2 = \sqrt{119}\, H_2O_2 \qquad 5KH_2 = \sqrt{119}\, LH_2$$

$$25\, KH_2 = 119\, H_2O_2 \Rightarrow KH_2 = \frac{119}{25} H_2O_2$$

$$H_2O_2 + KH_2 = O_2K = \frac{12}{5} = \frac{119+25}{25} H_2O_2 = \frac{144}{25} H_2O_2 \Rightarrow H_2O_2 = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$y(L) = y(F) = \frac{5}{25}$$

$S, T \in$ $x^2 + (y-12)^2 = 16 \Rightarrow$ $\cancel{x(S)^2} =$

$$x(S)^2 + \Big(\underbrace{\frac{31}{3} - \frac{36}{3}}_{-\frac{5}{3}}\Big)^2 = 16 \Rightarrow x(S) = \sqrt{16 - \frac{25}{9}} = 12$$

$$x(T) = -12$$

$L, F \in$ $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x(L) = \pm\sqrt{1 - \frac{25}{225}} = -\frac{\sqrt{200}}{15} = \pm\frac{10\sqrt{2}}{15}$

$$x(F) = -\frac{10\sqrt{2}}{15}$$

$S, F \in$ $y = 8b_3 - a_3x \Rightarrow y(S) = 8b_3 - a_3 x(S)$
$y(F) = 8b_3 - a_3 x(F)$

$$\frac{31}{3} = 8b_3 - a_3 \cdot 12 \quad - \quad \frac{5}{25} = 8b_3 + a_3 \cdot \frac{10\sqrt{2}}{15}$$

$$\frac{5}{25} - \frac{31}{3} = a_3\left(\frac{10\sqrt{2}}{15} + 12\right)$$

$$\frac{15 - 775}{75} = \frac{700}{75} = \frac{10(\sqrt{2}+18)}{15} a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{70}{3(\sqrt{2}+18)}$$

Аналогично:

$y(L) = 8b_4 - a_4 x(L) \Rightarrow \frac{5}{25} = 8b_4 - a_4 \cdot \frac{10\sqrt{2}}{15} \Rightarrow \frac{700}{75} = -\left(\frac{10\sqrt{2}}{15} + 12\right)a_4 \Rightarrow a_4 = -\frac{70}{3(\sqrt{2}+18)}$

$y(T) = 8b_4 - a_4 x(T) \quad \frac{31}{3} = 8b_4 + 12a_4$

Ответ: $\pm\frac{70}{3(\sqrt{2}+18)}$; $\pm\sqrt{15}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

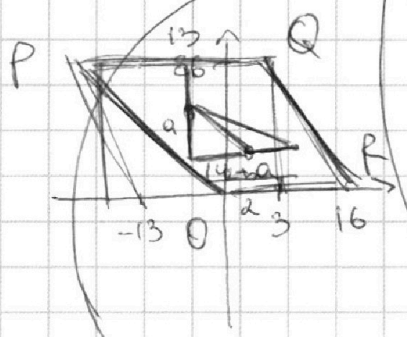
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{array}{r} {}^{6}19 \\ \times\ 7 \\ \hline 133 \end{array}$$

$OP = \sqrt{13^2+26^2} =$



$a+b = 18x$

$a^2 - 7ab + b^2 = 18y$

$18x - 9ab = 18y$

$9ab \vdots 18 \Rightarrow ab \vdots 2$

$ab = 2k$

$\frac{a}{b} = \frac{2k}{b^2}$

$\frac{b}{a} = \frac{2k}{a^2}$

$(2k, a^2, b^2) = 1$

$a+b = 9x$

$a^2+b^2+2ab = 81x^2$

$a^2+b^2-9ab = 9y$

$$\begin{array}{r} {}^{6}19 \\ \times\ 7 \\ \hline 133 \end{array}$$

$a^2+b^2+2ab = 81x^2$

$a^2+b^2+2ab-9ab = 81x^2 - 9ab = 9y$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ $81x^2 - 7ab$

$((9+n)k; b^2; a^2) = 1$

$a^2+4b^2 =$

$AB = a^2+14^2-28a+a^2 =$

$= \sqrt{2a^2+14^2-28a}$

$\frac{9+n}{t}$

$\frac{9t+r}{t}k = 9ab$

$9 = \frac{r}{t}k$

$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b} = \frac{mx}{my}$

$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = \frac{mx}{my}$

$a+b - \frac{9ab}{a+b} = \frac{mx}{my}$

$a+b - \frac{mx}{my} = \frac{9ab}{a+b}$

$\frac{my(a+b)-mx}{my} = \frac{9ab}{a+b}$

$\frac{my}{m(ya+yb-x)} = \frac{1}{9b} + \frac{1}{9a}$

$a+b = (9+n)x = 9x+nx$

$a^2+b^2+2ab = (81+18n+n^2)x^2$

$(81+18n+n^2)x^2 - 9ab = (9+n)y$

$81x^2+18nx^2+n^2x^2 - 9ab = 9y+ny$

$81x^2+18nx^2 - 9ab + n^2x^2 - ny = 9y \Rightarrow n(nx^2-y) \vdots 9$

$(9+n)^2x^2 - 9ab = (9+n)y$

$9ab \vdots 9+n$

$ab \vdots 9+n$

$ab = (9+n)k$

$\frac{a}{b} = \frac{(9+n)k}{b^2}$

$9ab \equiv 0$

$9+n \equiv 9ab \Rightarrow n \equiv 9(ab-1)$

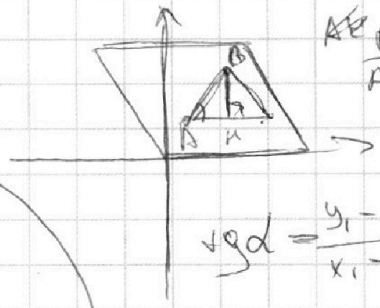
$-9 \equiv 9(ab-1) \Rightarrow -1 \equiv ab-1 \Rightarrow ab \equiv 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{BH}{AH} = tg\alpha$

$tg\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$BH = AH tg\alpha$

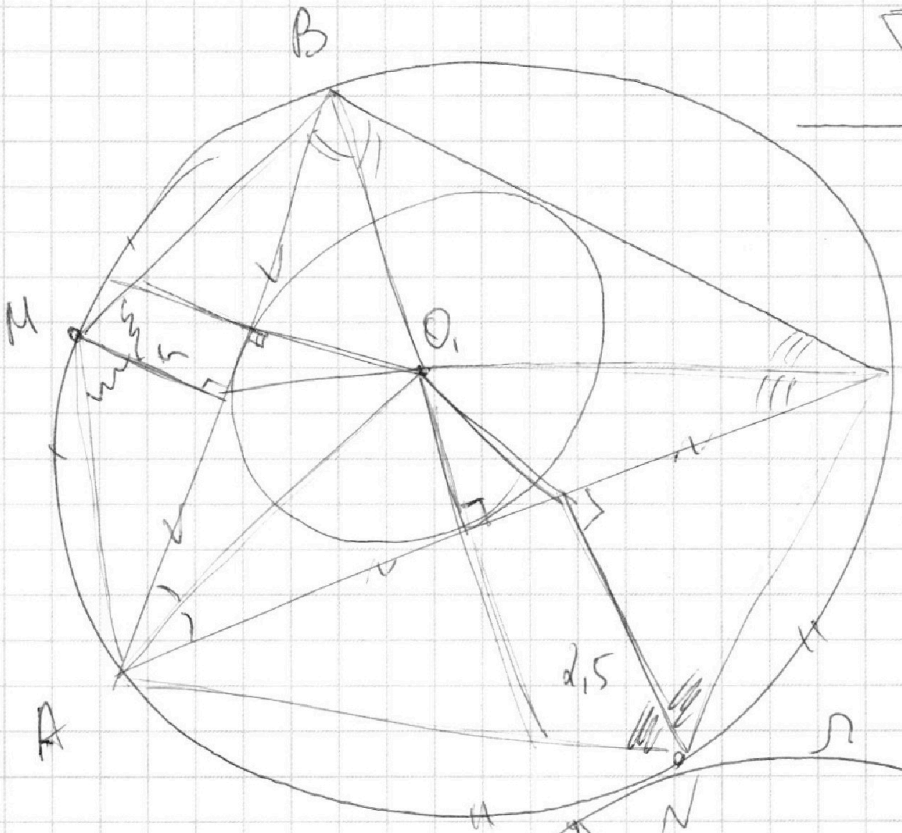
С $(2 + tg\alpha) AH = 14$

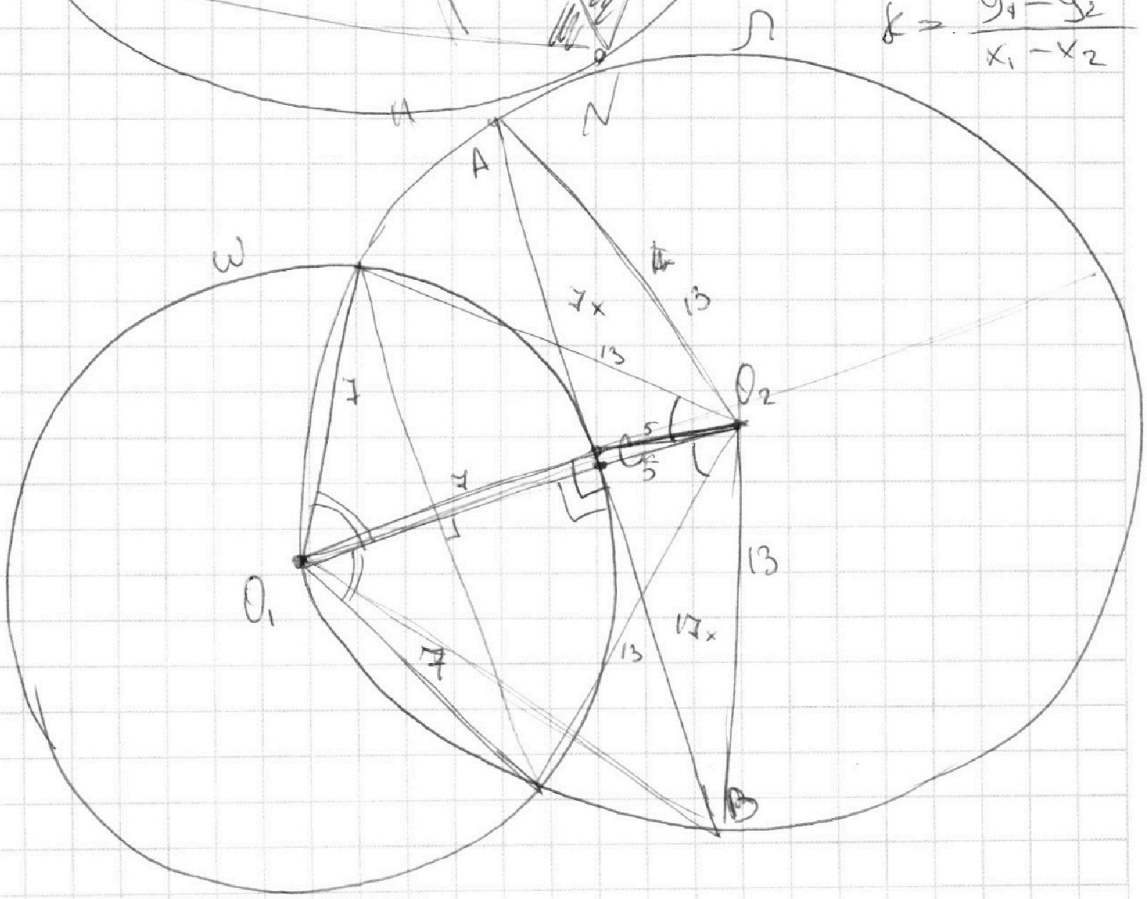
$AB: y_1 = kx_1 + b$

$y_2 = kx_2 + b$

$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$

$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$



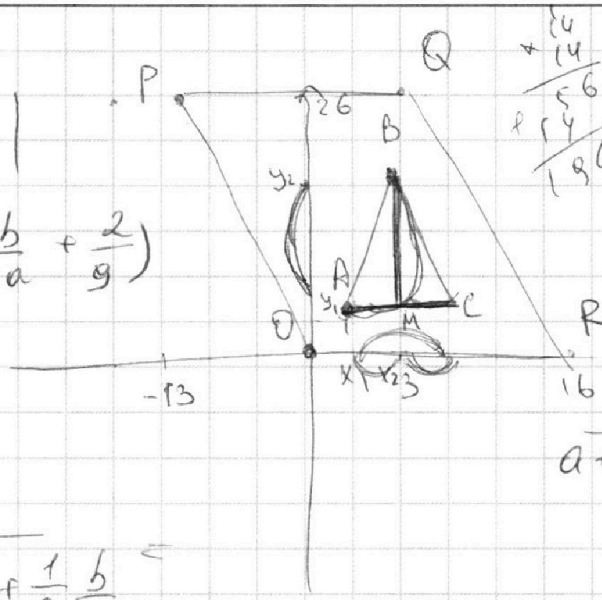


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\begin{array}{r} 14 \\ +14 \\ \hline 56 \\ +14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$AC+BM=14$

$2AM+BM=14$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{xm}{ym}$$

$$\frac{a+b}{9ab\left(\frac{a}{9b}+\frac{b}{9a}+\frac{2}{9}\right)}$$

$$=\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$4AM^2+BM^2+4AMBM=196$

$$\frac{1}{a+b-\frac{9ab}{a+b}}$$

$AB^2+AM^2+4AMBM=196$

$$\frac{\frac{1}{9b}+\frac{1}{9a}}{\frac{1}{9}\frac{a}{b}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\frac{b}{a}}=$$

$$=\frac{a}{9b}+\frac{b}{9a}+\frac{2}{9}$$

$$\frac{a}{b}$$

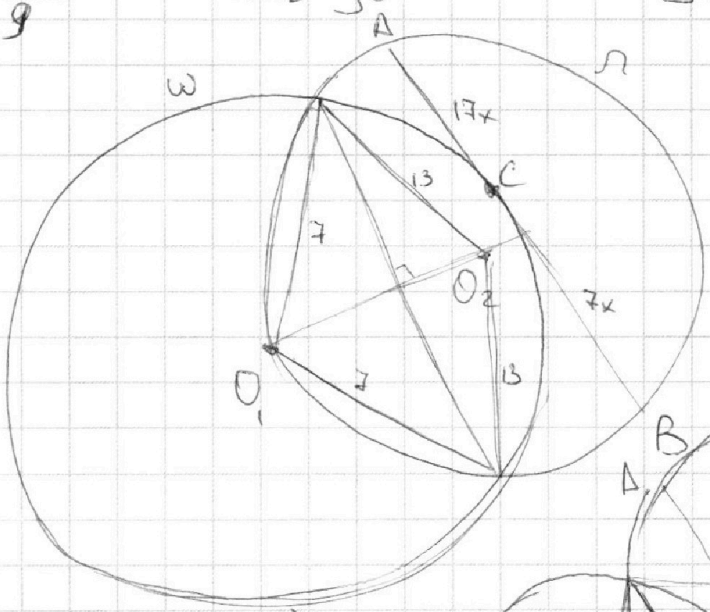
$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

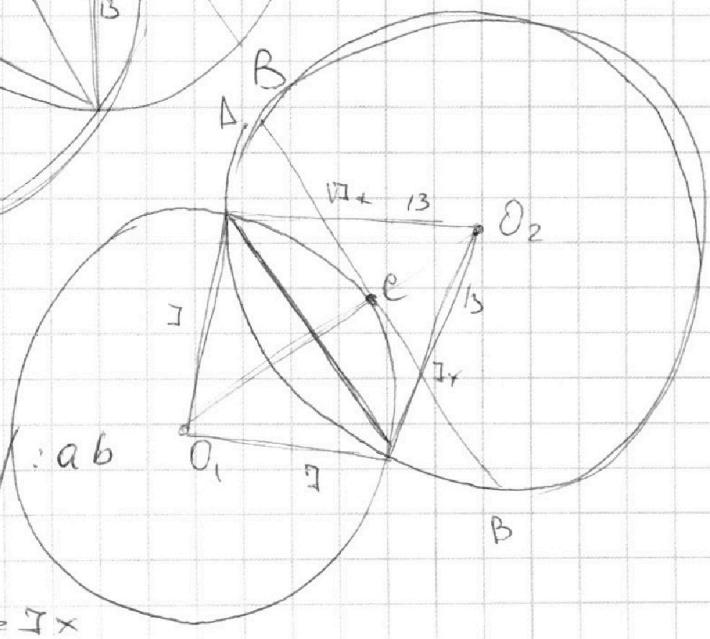
$2x_2+y_2=14+2x_1+y_1$

$$\frac{1}{a+b-\frac{a+b}{9ab}}=$$

$$=\frac{1}{a+b-\frac{1}{\frac{1}{9b}+\frac{1}{9a}}}=$$

$$=(a+b)\left(\frac{1}{9b}+\frac{1}{9a}\right)-1$$





$(a+b)y=(a^2-7ab+b^2)x$

$ay+by=a^2x-7abx+b^2x$

$a^2x+b^2x-7abx-ay-by=0 \quad /:ab$

$$\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}-7x-\frac{y}{b}-\frac{y}{a}=0$$

$$\frac{ax-y}{b}+\frac{bx-y}{a}=7x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.

по св-ву ∩ хорд $O_1D \cdot DT = AD \cdot DB$

$DC = (17-n)x \Rightarrow AD = AC - DC = 17x - 17x + nx = nx$

$BD = BC + CD = 7x + 17x - nx = (24-n)x$

$338 + 289 = 627$

$O_1O_2 = 13$, $O_1D = 7 \Rightarrow O_2D = 13 - 7 = 6 \Rightarrow DT = O_2D + O_2T =$

$= 6 + 13 = 19$

$O_1D \cdot DT = 7 \cdot 19 = nx \cdot (24-n)x = n(24-n)x^2$

$24n - n^2 = \frac{133}{x^2} \Rightarrow n^2 - 24n + \frac{133}{x^2} = 0$

$169 \times 2 = 338$

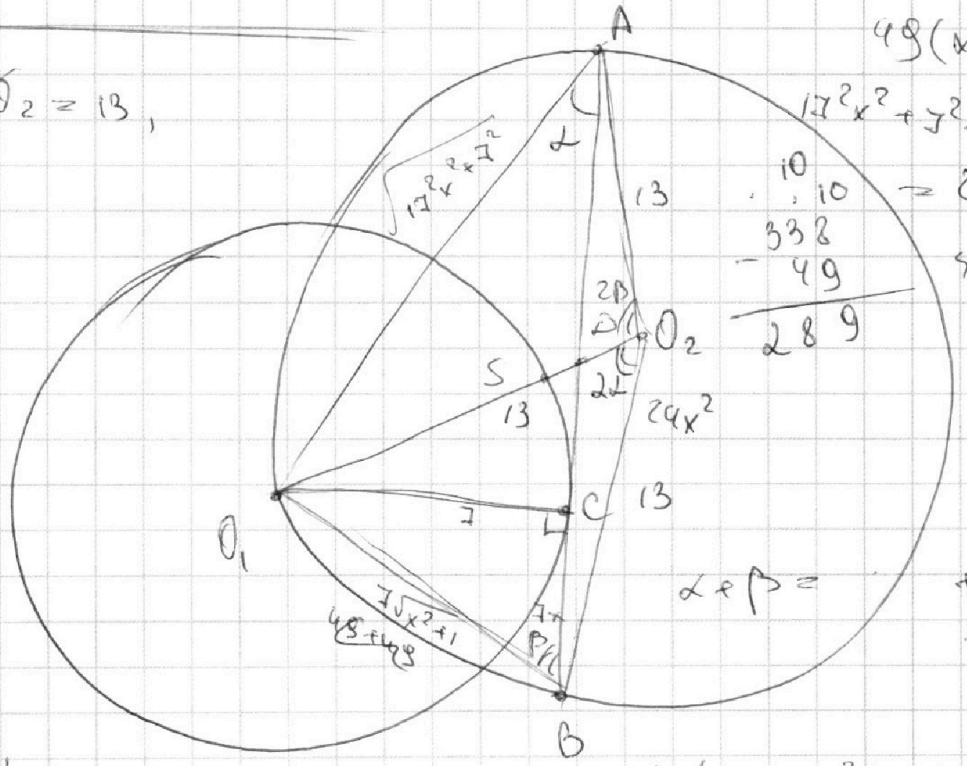
$D = 24^2 - \frac{4 \cdot 133}{x^2}$

$n = \frac{24 \pm \sqrt{24^2x^2 - 4 \cdot 133}}{2} = 12 \pm \frac{\sqrt{24^2x^2 - 4 \cdot 133}}{2x}$

$17 \times 17 = 289$

$49(x^2+1)$

$O_1O_2 = 13$,



$17^2x^2 + 7^2 + 7^2x^2 + 7^2 = 24^2x^2 + 2 \cdot 7^2$

$338 - 49 = 289$

$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\cos\beta =$

$13 \times 13 = 169$

$\alpha + \beta =$

$\cos 2\alpha =$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$1 - 2\sin^2\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$46 \mid 2 \quad 46:2=23$

$68\cdot 2=134$

$ab = 2^{15}7^{4}x$

$bc = 2^{17}7^{18}y$

$ac = 2^{23}7^{39}z$

$a^2b^2c^2 = 2^{45}7^{68}xyz$

$2^{46}\cdot 7^{68}$

$128 \mid 4$, 32; -12, 8

$128 = 2^7$

$28 =$

$\times 28$, 68

$-68 \mid 4$, 17; 4, 28

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{}$

$17\cdot 4\cdot 7\cdot 4$

$\times 17$, 7, 119

$ax+y-8b=0$

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-24y+144-16)\le 0$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-24y-128)\le 0$

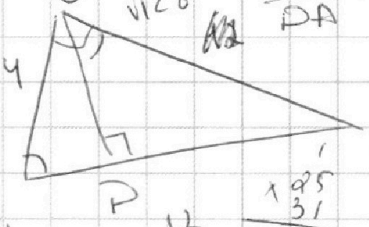
$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases}$

$ax+y-8b=0$

$y = 8b-ax$

$\times 16$, 15, 80, 16, 240



$\frac{CD}{DA} = \frac{O_1D}{CD} = \frac{4}{\sqrt{128}} = \frac{4}{2^3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

125, 31, 25, 75, 775

144, 16, 128

$2\sqrt{2}CD = DA$

$2\sqrt{2}O_1D = CD$

$8O_1D = DA \Rightarrow 9O_1D = 12$

$O_1D = \frac{4}{3}$

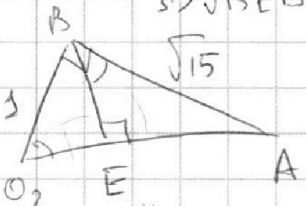
$DA = \frac{32}{3}$

$(4-\frac{5}{3})(4+\frac{5}{3})$

$\frac{EB}{EA} = \frac{O_2E}{EB} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

$\sqrt{15}O_2E = EB$

$\sqrt{15}EB = EA$



144, 25, 119

$\times 15$, 12, 30, 15, 180

$15O_2E = EA$

$16O_2E = 4$

$O_2E = \frac{1}{4}$

$EA = \frac{15}{4}$

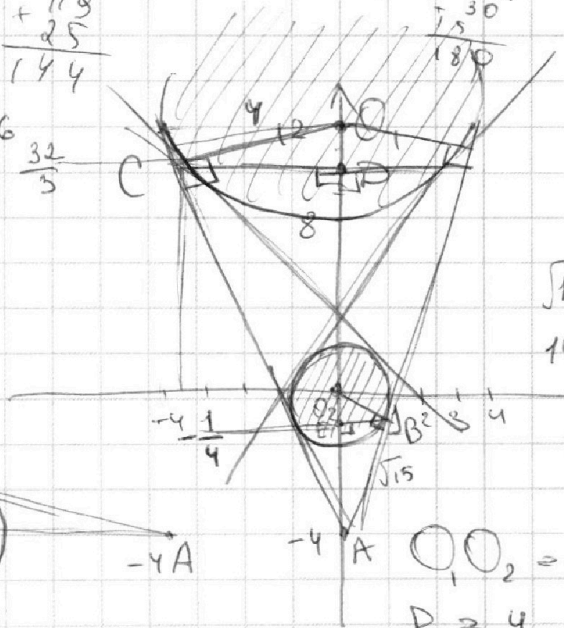
$\sqrt{16-1} = \sqrt{15}$

$144-16 = \sqrt{128}$

$12\cdot 20 = 240$

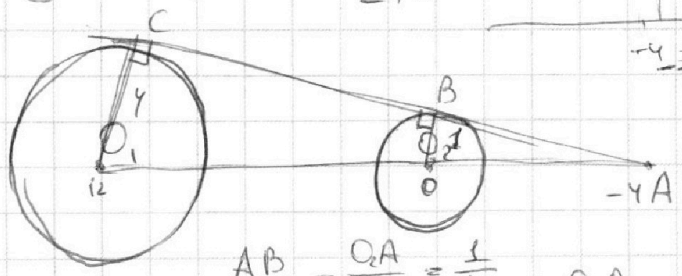
$24 = 2^3\cdot 3$

$240 = 2^4\cdot 3\cdot 5$



$O_1O_2 = 12$

$R = 4 \quad r = 1$



$\frac{AB}{AC} = \frac{O_2A}{O_1A} = \frac{1}{4}$

$\frac{O_2A}{12+O_2A} = \frac{1}{4}$

$4O_2A = 12+O_2A \Rightarrow O_2A = 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{\underbrace{3x^2-6x+2}_{a}} - \sqrt{\underbrace{3x^2+3x+1}_{b}} = 1-9x$$

$D = 36 - 4\cdot 3\cdot 2 = 36 - 24 = 12$ $\qquad D = 9 - 4\cdot 3 =$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6}$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\cancel{a - \sqrt{a} = a - b + \sqrt{b}}$$

$$c - d = c^2 - d^2$$

$$c - d = (c-d)(c+d)$$

$$(c-d)(1-c-d) = 0$$

$c = d$ $\qquad 1 = c + d$

$$(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) =$$

$$= 9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 3x^3 - 18x + \cancel{6x} + 3x^2 - \cancel{6x} + 2 =$$

$$= 9x^4 - 15x^3 + 9x^2 - 18x + 2$$

$$a = 1 + b - 2\sqrt{b}$$