



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ac : 7^{39}; \Rightarrow abc : 7^{39} \quad \underline{N1}$$

Пусть степени двойки в разложении на простые множители числа  $a$  равна  $x$ , числа  $b$  —  $y$ , числа  $c$  —  $z$ . Тогда, так  $ab : 2^{15}; \Rightarrow$

$$x+y \geq 15; \text{ так } bc : 2^{17}; \Rightarrow y+z \geq 17; \text{ так } ac : 2^{23}; \Rightarrow x+z \geq 23;$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) = (x+y) + (y+z) + (x+z) \geq 15 + 17 + 23 = 55; \Rightarrow x+y+z \geq 27,5.$$

$a, b, c$  — натуральные;  $x, y, z$  — степени двойки в их разложении на простые множители;  $\Rightarrow x, y, z \in \mathbb{N}; \Rightarrow x+y+z \geq 28; \Rightarrow abc : 2^{28}$ .

$$abc : 2^{28}, abc : 7^{39}, \Rightarrow abc : 2^{28} \cdot 7^{39}, a, b, c \in \mathbb{N}, \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

Это была оценка. Пример:  $a = 2^{11} \cdot 7^{11}; b = 2^5; c = 2^{12} \cdot 7^{28};$

$$\text{тогда } ab = 2^{16} \cdot 7^{11} : (2^{15} \cdot 7^{11}); bc = 2^{17} \cdot 7^{28} : (2^{17} \cdot 7^{18});$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : (2^{23} \cdot 7^{39}); \text{ при этом } abc = 2^{28} \cdot 7^{39} - \text{минимально.}$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Рассмотрим это максимальное  $m$ . Пусть  $a+b = k_1 \cdot m$ . Тогда  
 $a^2 - 7ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 9ab = (a+b)^2 - 9ab = k_1^2 \cdot m^2 - 9ab \stackrel{!}{=} m$ ;  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow 9ab \stackrel{!}{=} m$ . Пусть  $9ab = k_2 \cdot m$ . Тогда  $9ab - 9ab = 9ab - 9ab \stackrel{!}{=} m$ .  
 $\Rightarrow (k_2 - 9k_1)m \stackrel{!}{=} m$ . Без потери общности можно считать выражение  
симметричным, предположим, что  $a \geq b$ . Тогда  $a+b \leq 2a$ ,  $\Rightarrow$   
 $(a, m) = 1$  (иначе бы в то же деление на их НОД, но  $(a, b) = 1$ ).  
 $(b, m) = 1$  по той же причине.

Но  $9ab \stackrel{!}{=} m$ ;  $\Rightarrow m \leq 9$ . Т.к.  $b = a - k_1 m \stackrel{!}{=} \text{НОД}(a, m)$   
Но  $9ab \stackrel{!}{=} m$ ;  $\Rightarrow m \leq 9$ .

Пример:  $a=8; b=1$ ;  $\Rightarrow \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{8+1}{64-56+1} = \frac{9}{9}$ . Тут

дробь можно в дробь  $\frac{9}{9}$  можно сократить и числитель, и  
знаменатель на 9, и получить  $\frac{1}{1}$ ,  $\Rightarrow m=9$ . Мы получили  
оценку, что  $m \leq 9$ ; ~~но ответ:  $m=9$~~

$\Rightarrow$  Ответ: при  $m=9$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Обозначим за  $O$  центр  $\omega$ .  $OC \perp AB$ ;  $OC = 7$  (т.к.  $C \in \omega$ ).

Пусть  $AC = 17x$ ; тогда  $BC = 7x$ . Теорема синусов для  $\triangle ABD$ , окружность  $\omega$ :

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2 \cdot 13; \triangle OCA \text{ и } \triangle OCB - \text{прямоуг.} \Rightarrow OC = \sin \angle BAD \cdot AD;$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{17^2 x^2 + 7^2}; BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{7^2 x^2 + 7^2} = 7\sqrt{x^2 + 1};$$

$$\sin \angle BAD = \frac{OC}{AD} = \frac{7}{\sqrt{17^2 x^2 + 7^2}}; \text{еще раз т. синусов:}$$

$$\frac{7\sqrt{x^2 + 1}}{7} = 26 \Rightarrow \sqrt{(x^2 + 1)(17^2 x^2 + 7^2)} = 26; \text{ в квадрат:}$$

$$289x^4 + (289 + 49)x^2 + 49 = 676;$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0 - \text{биквадратное ур-ие.}$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627 = (169 \cdot 2)^2 + 4 \cdot 17^2 \cdot 3 \cdot 209 = 4(169^2 + 289 \cdot 3 \cdot 209) =$$

$$= 4 \cdot 209764; x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{209764}}{2 \cdot 289};$$

$$x^2 > 0; \Rightarrow x^2 = \frac{-338 + \sqrt{209764}}{2 \cdot 289};$$

$$x = \frac{-169 + \sqrt{209764}}{289}$$

$$x = \frac{\sqrt{-169 + \sqrt{209764}}}{17}$$

Заметим, что

$$\frac{458}{289} = \frac{458}{289}$$

$$\Rightarrow \sqrt{209764} = 458$$

$$x = \frac{\sqrt{-169 + 458}}{17} = \frac{\sqrt{289}}{17} = 1.$$

$$\text{Итак, } x = 1. AB = AC + CB = 17x + 7x = 24x = 24.$$

Ответ: 24.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

коэф. при  $x$  больше 0  
→ всегда положительно

$$ODZ: x \notin \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0 \text{ вне зависимости от } x.$$

Допишем на эту сумму.

$$(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$-9x + 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

1 случай -  $1 - 9x = 0; \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

2 случай -  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$  / в квадрат

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2} = 0$$

$$D = 9 - 48 < 0$$

коэф. при  $x^2$  больше 0

→ оно всегда  $> 0$

⇒ 0 (т.к. это корень)

$$(6x^2 - 3x + 2) + 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2} > 0; \Rightarrow \text{этот случай не даёт новых корней.}$$

Проверка по ODZ:  $\frac{1}{9} = 1 - \frac{8}{9} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$  (т.к.  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{8}{9}$ , т.к.  $\frac{3}{9} < \frac{1}{2} < \frac{64}{81}$ )

⇒  $\frac{1}{9} \notin \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \Rightarrow$  этот корень подходит.

Других корней, как мы выяснили, нет.

Ответ:  $x = \frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$y_2 + 2x_2 = y_1 + 2x_1 + 14$$

Заметим, что  $y + 2x = \text{const}$  на прямой  $y = -2x + \text{const}$

Заметим, что ~~параллельные~~ <sup>две стороны</sup> параллелограмма лежат на  
прямых типа  $y = -2x + \text{const}$ , а другие две - на прямых типа  
 $y = \text{const}$ .

Нам нужны пары прямых вида  $y_1 = -2x + C$  и  $y_2 = -2x + C + 14$ ,  
где  $C$  - какая-то константа. Такие прямые, проходящие по целым  
точкам, идут, очевидно, с шагом 1 по оси  $y$ , и, следовательно, с  
шагом 0,5 по оси  $x$ . На прямых, ~~идущих~~ где при  $y=0$   $x$  - целый,  
есть 14 целых точек:  $y=0; y=2; y=4; \dots; y=24; y=26$ . На прямых, где  
при  $y=0$   $x$  - нецелый, есть 13 целых точек:  $y=1; y=3; \dots; y=25$ .

Если две ~~прямые~~ <sup>прямые</sup> (имеется ввиду кол-во целых точек  
внутри параллелограмма, оно посчитано именно так, потому что  
множество прямых  $y = -2x + C$  параллельно сторонам параллело-  
грамма, и поэтому у двух прямых, у которых  $C_2 - C_1$  - чётное, кол-во  
целых точек не будет отличаться, ведь это такая же прямая,  
просто сдвинутая на  $\frac{C_2 - C_1}{2}$  клеток вправо). Заметим также, что  
14 чётно, поэтому у ~~двух~~ пар <sup>двух</sup> ~~подходящих~~ <sup>подходящих</sup> прямых кол-во ~~подхо-~~  
~~дящих~~ <sup>подходящих</sup> точек одинаково, и, при ~~этом~~  $y_1 = y_2 = 0; x_2 - x_1 = 7$ .

Итак, пары ~~подходящих~~ <sup>подходящих</sup> нам прямых:  $y_1 = -2x + C; y_2 = -2x + C + 14$ .  
При  $y_1 = y_2 = 0$ , ~~их значения~~  $(x_1, x_2) = \{(0; 7); (\frac{1}{2}; 7\frac{1}{2}); (1; 8); \dots; (8\frac{1}{2}; 15\frac{1}{2}); (9; 16)\}$ .  
(это - все пары, т.к. "нижняя" сторона параллельна оси  $x$ , и на ней  
 $x=0; 0 \leq y \leq 16$ ). Есть 10 пар с ~~целыми~~ <sup>целыми</sup>  $x$  и 9 - с нецелыми.  
На двух "целых" прямых можно взять за  $A$  любую из 14 целых точек, за  $B$  -  
тоже любую из 14 ~~целых~~ <sup>целых</sup> точек второй прямой,  $\rightarrow$  каждая пара "целых" прямых  
даёт  $14^2 = 196$  пар  $(A; B)$ , и, аналогично, каждая пара "нецелых" прямых  
даёт  $13^2 = 169$  пар  $(A; B)$ . Значит, всего пар ~~прямых~~  $(A; B)$  -  $196 \cdot 10 + 169 \cdot 9 =$   
 $= 10 \cdot (196 + 169) - 169 = 3650 - 169 = 3481$ .

Ответ: 3481



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$x^2 + y^2 - 1 \leq 0$  — уравнение окружности

$x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$  — уравнение круга с центром в  $(0; 0)$  и радиусом 1

$x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 12)^2 \leq 16$  — уравнение круга с центром в  $(0; 12)$  и радиусом

$\sqrt{16}$ , то есть с радиусом 4. Круги находятся друг над другом, сумма

радиусов равна 5, а расстояние между центрами — 12,  $\Rightarrow$  круги

не пересекаются.  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$ ;  $\Rightarrow$  корни — точки, лежащие

в одном из кругов.

$ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 8b$  — прямая. У системы ровно 2 решения,

$\Rightarrow$  эта прямая — общая касательная к 2 кругам (т.к. если прямая идёт

в один из кругов, корней будет бесконечное количество — все точки

хорды (окружности, ограничивающей круг), по которой прямая пересечёт

круг, а если прямая не касается одного из кругов, корней будет не

более 1, т.к. одна прямая не может касаться одного

круга дважды).

Случай — внешняя касательная. Их 2, и, поскольку

центры кругов находятся друг над другом ( $x_1 = x_2 = 0$ ),

эти касательные симметричны относительно оси  $Y$ .

$O_1(0; 0)$ ;  $O_2(0; 12)$  — центры окружностей;  $O_1H_1$  и  $O_2H_2$  —

радиусы, проведённые к точке касания, они перпендикулярны

касательной.  $O_1H_1 = 1$ ;  $O_2H_2 = 4$ ;  $O_1O_2 = 12$ .  $\angle O_1AK_1$  — общий острый угол в

прямоугольных треугольниках  $AO_1H_1$  и  $AO_2H_2$ ;  $\Rightarrow \triangle AO_1H_1 \sim \triangle AO_2H_2$ ;  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1H_1}{O_2H_2} \Rightarrow \frac{AO_1}{AO_1 + 12} = \frac{1}{4}$ ;  $[A$  — точка пересечения касательных с осью  $Y$ ]

$4AO_1 = AO_1 + 12$ ;  $3AO_1 = 12$ ;  $AO_1 = 4$ ;  $A$  лежит на оси  $Y$ ;  $\Rightarrow A(0; -4)$

Вспомогательная точка  $H_3$  — пересечение касательной с

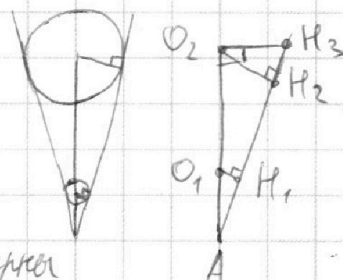
перпендикуляром к оси  $Y$  через  $O_2$ . Тогда координаты  $H_3$ :  $y(H_3) = y(O_2) = 12$ ;

$x(H_3) = x(O_2) + O_2H_3 = O_2H_3 = \frac{O_2H_2}{\cos \angle H_3O_2H_2} = \frac{4}{\cos(90^\circ - \angle AO_2H_2)} = \frac{4}{\sin \angle AO_2H_2} =$

$= \frac{4}{\frac{O_1H_1}{AO_1}} = \frac{4}{\frac{1}{4+12}} = 16$ ;  $\Rightarrow H_3(16; 12)$ . Касательная проходит через

точки  $A(0; -4)$ ;  $H_3(16; 12)$ ; прямая:  $y = -ax + 8b$ ;  $0 = 4a + 8b$ ;

значит:  $\begin{cases} -4 = 0 + 8b \\ 12 = -16a + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ 16 = -16a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$  (вариант 2 случая)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

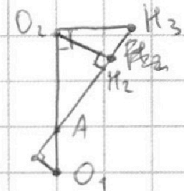
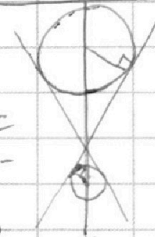


№6 (продолжение)

~~Вторая внешняя касательная симметрична первой относительно оси Y, => она проходит через точки A(0, -4) и K<sub>3</sub><sup>\*</sup>(-16, 12) (K<sub>3</sub><sup>\*</sup> - отражённая относительно оси Y точка K<sub>3</sub>).  $\begin{cases} -4 = 0 + 8b \\ 12 = -16a + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ 16a = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$~~

2 случай - внутренняя касательная. Аналогично:

O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub> - центры окружностей; O<sub>1</sub>K<sub>1</sub> и O<sub>2</sub>K<sub>2</sub> - радиусы к точке касания, A - точка пересечения касательных с осью Y, K<sub>3</sub> - точка пересечения касательной с перпендикуляром к оси Y через точку O<sub>2</sub>. O<sub>1</sub>(0; 0); O<sub>2</sub>(0; 12);



O<sub>1</sub>K<sub>1</sub> = 1; O<sub>2</sub>K<sub>2</sub> = 4; O<sub>1</sub>O<sub>2</sub> = 12. Касательные опять симметричны относительно оси Y, потому что центры окружностей всё ещё лежат на одной прямой, а касательные симметричны относительно прямой через центры окружностей.  $\angle K_1AO_1 = \angle K_2AO_2$  (вертикальные),  $\angle AK_2O_2 = \angle AK_1O_1 = 90^\circ$ ; =>

$\Rightarrow \triangle K_1AO_1 \sim \triangle K_2AO_2$  (по трём углам);  $\Rightarrow \frac{K_1O_1}{K_2O_2} = \frac{O_1A}{AO_2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{O_1A}{12 - O_1A}$

$12 - O_1A = 4O_1A$ ;  $O_1A = \frac{12}{5}$ ; A лежит на оси Y между O<sub>1</sub> и O<sub>2</sub>; => её координаты: A(0;  $\frac{12}{5}$ ). Координаты точки K<sub>3</sub>:  $x(K_3) = \frac{O_2K_2}{\sin \angle K_2} = \frac{4}{\sin \angle K_2}$

1 случай. Координаты K<sub>3</sub>:  $y(K_3) = y(O_2) = 12$ ;  $x(K_3) = x(O_2) + O_2K_3 = \frac{O_2K_2}{\cos \angle K_3O_2K_2} = \frac{O_2K_2}{\cos(90^\circ - \angle AO_2K_2)} = \frac{O_2K_2}{\sin \angle AO_2K_2} = \frac{O_2K_2}{\frac{AK_2}{AO_2}}$ ; по т. Пифагора:  $AK_2 = \sqrt{AO_2^2 - O_2K_2^2} = \sqrt{16^2 - 4^2} = 4\sqrt{15}$ ;  $\Rightarrow x(K_3) = \frac{4}{\frac{4\sqrt{15}}{16}} = \frac{16}{\sqrt{15}}$ ;  $\Rightarrow K_3(\frac{16}{\sqrt{15}}; 12)$

~~Касательные симметричны относительно прямой между центрами окружностей (т.е. оси Y); => касательные - это прямые AK<sub>3</sub> и AK<sub>3</sub><sup>\*</sup>, где K<sub>3</sub><sup>\*</sup>( $-\frac{16}{\sqrt{15}}; 12$ ) - K<sub>3</sub>, отражённая относительно оси Y. Касательные:  $y = -ax + 8b$ .~~

~~первая касательная:  $\begin{cases} -4 = 0 + 8b \\ \frac{16}{\sqrt{15}} = -a \cdot \frac{16}{\sqrt{15}} + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ 16 = -16a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$~~

2 случай. Координаты K<sub>3</sub>:  $y(K_3) = y(O_2) = 12$ ;  $x(K_3) = x(O_2) + O_2K_3 = \frac{O_2K_2}{\cos \angle K_2O_2K_3} = \frac{4}{\cos(90^\circ - \angle AO_2K_2)} = \frac{4}{\sin \angle AO_2K_2} = \frac{4}{\frac{AK_2}{AO_2}}$ ; по т. Пифагора:  $AK_2 = \sqrt{AO_2^2 - O_2K_2^2} =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N6 (продолжение - 2)

$$= \sqrt{\left(12 - \frac{12}{5}\right)^2 - 4^2} = \sqrt{12^2 \cdot \frac{4^2}{5^2} - 4^2} = 4\sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 1} = \frac{4\sqrt{119}}{5} \Rightarrow x(H_3) = \frac{4}{5\sqrt{119}} = \frac{5 \cdot (12 - \frac{12}{5})}{\sqrt{119}} = \frac{12 \cdot 4}{\sqrt{119}} = \frac{48}{\sqrt{119}} \Rightarrow H_3\left(\frac{48}{\sqrt{119}}; 12\right).$$

Аналогично: касательные симметричны - прямые  $AK_3$  и  $AK'_3$ , где  $K'_3\left(\frac{-48}{\sqrt{119}}; 12\right)$ .

Касательные:  $y = -ax + 8b$ .

первая касательная:  $\begin{cases} \frac{12}{5} = 0 + 8b \\ 12 = \frac{-48a}{\sqrt{119}} + 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{10} \\ \frac{-48a}{\sqrt{119}} = 12 - \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{119} \cdot 12 \cdot 4}{5 \cdot (-48)} \\ b = \frac{3}{10} \end{cases}$

вторая касательная, аналогично:  $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{119}}{5} \\ b = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-\sqrt{119}}{5} \\ b = \frac{3}{10} \end{cases}$

Итак, нам подходят только такие  $a$  и  $b$ , чтобы найденная прямая была касательной к двум кругам. Касательных всего 4 штуки, и мы рассмотрели все случаи.

Ответ:  $a = \pm\sqrt{15}; \frac{\pm\sqrt{119}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}; bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}; abc: 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$\begin{array}{r} 1960 \\ + 1521 \\ \hline 3481 \end{array}$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^{11}; b = 2^5 \cdot 7^{28}; c = 2^{12} \cdot 7^{28}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 55 \Rightarrow x+y+z \geq 28$$

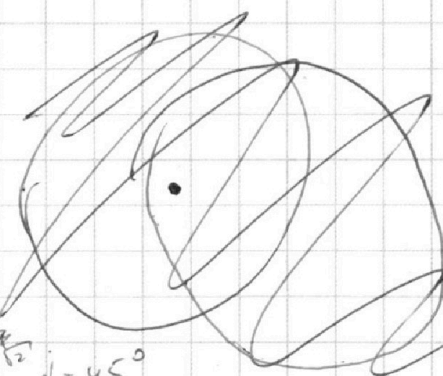
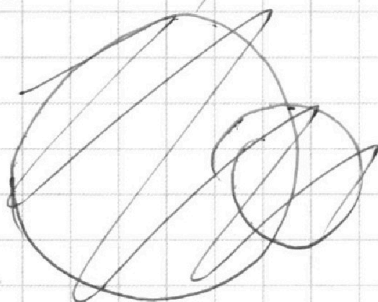
$$\text{аналогично: } k+l+m \geq \frac{11+18+39}{2} = 34 \quad (39)$$

Пример

$$\begin{cases} k+l=15 \\ l+m=17 \\ k+m=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+l=15 \\ k-l=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=4,5 \\ k=10,5 \\ m=12,5 \end{cases}$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^{11}; b = 2^5 \cdot 7^{28}; c = 2^{12} \cdot 7^{28}$$

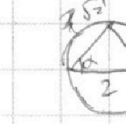
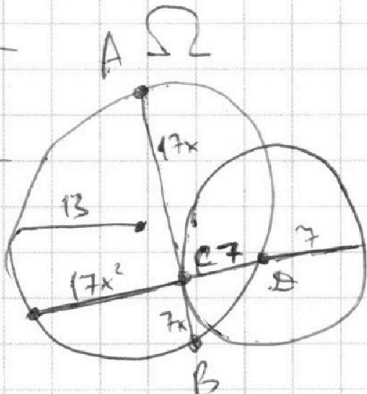
$$\begin{array}{r} 454 \\ \times 454 \\ \hline + 1816 \\ + 2270 \\ \hline 1816 \\ \hline 205116 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 450 \\ \times 450 \\ \hline + 225 \\ + 180 \\ \hline 202500 \end{array}$$

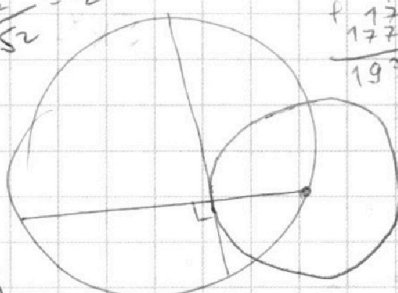
$$\begin{array}{r} 460 \\ \times 460 \\ \hline + 276 \\ + 184 \\ \hline 211600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 456 \\ \hline + 2736 \\ + 2280 \\ \hline 1824 \\ \hline 207936 \end{array}$$



$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\begin{array}{r} 444 \\ \times 444 \\ \hline + 1776 \\ + 1776 \\ \hline 197136 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 458 \\ \times 458 \\ \hline + 3664 \\ + 2290 \\ \hline 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$289x^2 - (\sqrt{289x^2 + 49} - 7)(\sqrt{289x^2 + 49} + 7)$$

$$289x^2 - 289x^2 - 49 = -49$$

$$\Delta ABD = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49} \cdot 24x} = 26$$

$$\begin{aligned} \text{б) квадрат: } \Delta &= 26^2 \cdot 24^2 (289x^2 + 49x^2) - 49 \\ \Delta &= 26^4 \cdot 24^4 \cdot 49^2 - 4 \cdot 49 \cdot 26^2 \cdot 24^2 \cdot 17^2 = \\ &= 26^4 \cdot 24^4 \cdot 49 \cdot (26^2 \cdot 24^2 \cdot 49 - 4 \cdot 17^2) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

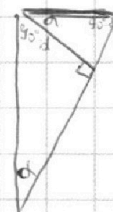
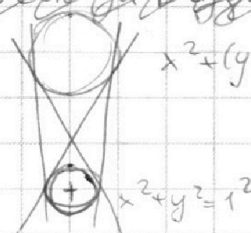
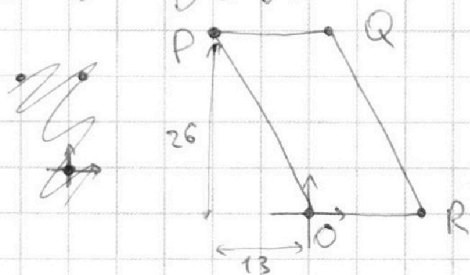
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

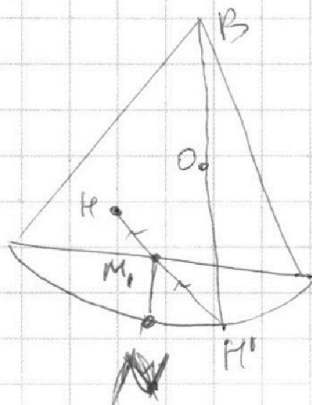
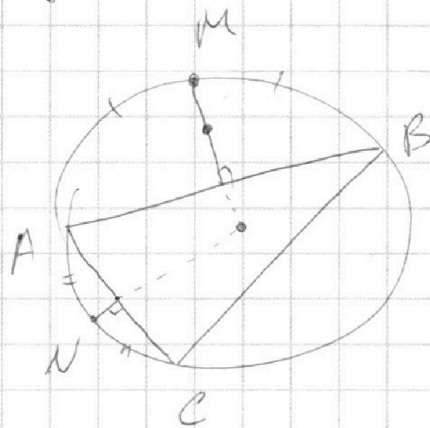
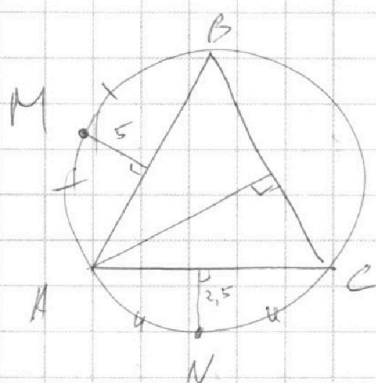
№5

$$y_2 - y_1 = 14 + 2(x_1 - x_2) = 14 - 2(x_2 - x_1) = -2(x_2 - x_1) + 14$$

Всегда будем считать, что  $x_1 \geq x_2$  (тогда  $y_1$  будет меньше  
или равно  $y_2$ ).



$$y = -ax + 8b$$



$$a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$$

$$ka + kb = 9ab \Rightarrow k : 9a; k : b; \text{ тогда } k \geq 9ab$$

$$ab(a+b) \leq 9ab; a+b \leq 9$$