



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

1. По условию:

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

2. Найдём наименьшее возможное значение произведения

$abc :$

$$\underbrace{abc}_{2^{14} \cdot 7^{10}} \overset{2^{17} \cdot 7^{17}}{\cdot} \overset{2^{20} \cdot 7^{37}}{=} 2^{20} \cdot 7^{37}$$

(т.к. abc

Ответ: $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$
(наим)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} \quad (*)$$

При каком наиб m числитель и знаменатель $(*) \div m$:

Решение:

1. $\frac{a}{b}$ - несократима.

$$2. \quad a^2-bab+b^2 = a^2-4ab-2ab+b^2 = (a-b)^2-2ab.$$

$$a^2-bab+b^2 = a^2+2ab-8ab+b^2 = (a+b)^2-8ab.$$

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq ab$$

$$a+b \leq 2ab.$$

Берём наименьшее, $\Rightarrow a+b=2ab$
 $(a+b)^2=4a^2b^2$

$$(a+b)^2 \leq 4a^2b^2$$

$$\Rightarrow \text{дробь примет вид: } \frac{2ab}{4a^2b^2-8ab} = \frac{2ab}{4ab(ab-2)} = \frac{1}{2(ab-2)}$$

$\Rightarrow$ для сокращения $m_{\text{наиб}} = 1$

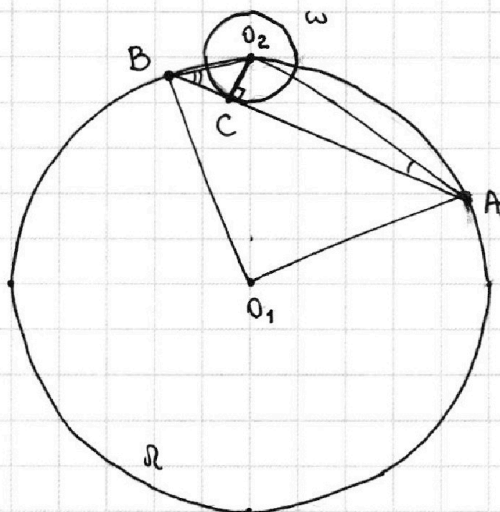
Ответ: $m = 1$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3



Дано: Окр. Ω ($O_1; R$)
Окр. ω ($O_2; r$).
 $R = 5; r = 1$.
 $O_2C \perp AB$. (AB - касат.
к (окр) Окр. ($O_2; r$)).
 $AC:CB = 7$.
Найти: AB - ?

Решение:

1. $\frac{AC}{CB} = 7, \Rightarrow AC = 7CB$. Пусть $CB = x, \Rightarrow AC = 7x$.

2. $O_2C \perp AB$ - как радиус, проведённый в точку касания.

3. $O_2C \perp AB, \Rightarrow \angle O_2CB = \angle O_2CA = 90^\circ$.

4. Рассмотрим $\triangle BCO_2$ - н/у ($\angle BCO_2 = 90^\circ$):

по т. Пифагора: $BO_2 = \sqrt{BC^2 + O_2C^2} = \sqrt{BC^2 + r^2} = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\sin \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BO_2} = \frac{r}{BO_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

5. Рассмотрим $\triangle AO_2C$ - н/у ($\angle O_2CA = 90^\circ$):

по т. Пифагора: $AO_2 = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 49x^2}$

$$\sin \angle O_2AC = \frac{O_2C}{AO_2} = \frac{r}{AO_2} = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

6. $\triangle ABO_2$ - вписанный $\triangle$ (из условия): в Окр. Ω :

$\Rightarrow$ по т. Синусов: $\frac{AO_2}{\sin \angle O_2BC} = \frac{BO_2}{\sin \angle O_2AB} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} = 2 \cdot 5 \quad | \cdot 2$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

Очевидно, что $x = 1$ - корень ($49 + 50 - 99 = 0$ (б)).

Проверим, есть ли у ур-я другие корни:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \\ - 49x^4 + 49x^3 \quad | \quad x-1 \\ \hline 49x^3 + 50x^2 - 99 \\ - 49x^3 - 49x^2 \\ \hline 99x^2 - 99 \\ - 99x^2 + 99x \\ \hline 99x - 99 \\ - 99x + 99 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = (x-1)(49x^3 + 49x^2 + 99x + 99).$$

Очевидно, что для второй скобки не существует положительных x , при которых она бы обращалась в ноль.

$$\Rightarrow x = 1. \Rightarrow CB = 1 \Rightarrow AC = 7.$$

$$7. AB = AC + CB = 7 + 1 = 8.$$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

Начальное условие: $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-1) - 3(x-1) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-1) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

Домножим обе части ур-е на $(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) > 0$:

$$\Rightarrow (2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(-7x + 2) - (-7x + 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

$$(-7x + 2)(1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{подходит по нач. усл.} \\ 1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad (3). \end{cases}$$

Выйдем из совокупности:

$$(3) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad |^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = 0$$

$$2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = -4x^2 + 3x - 3. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = (-4x^2 + 3x - 3)^2 \quad (4) \\ -4x^2 + 3x - 3 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 9 - 48 = -41 < 0, \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Выйдем из системы

$$(4): \underline{16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12} = \underline{16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9}$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$\Delta = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 16 \cdot 61 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x_1 = \frac{22 + 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}; \quad x_2 = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Но! Корни x_1 и x_2 не подходят, т.к.
 $4x^2 - 3x + 3 > 0$ при $\forall x \in \mathbb{R}$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

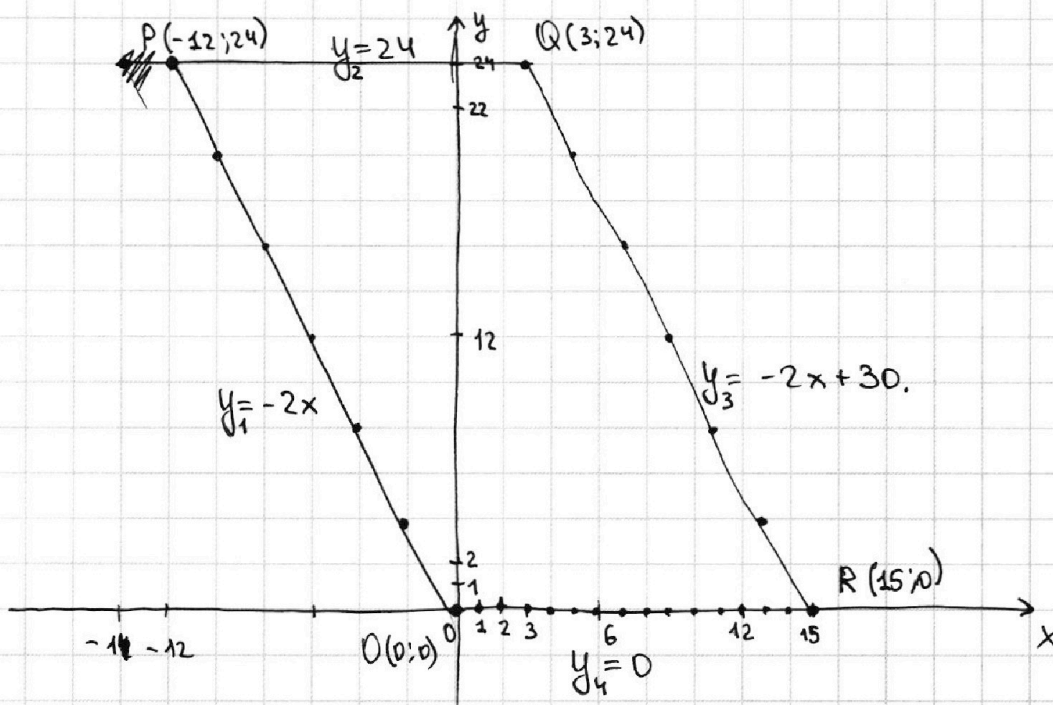
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



1. Составим ур-я сторон пар-ма:

PO: $y_1 = -2x$

PQ: $y_2 = 24$

OR: $y_4 = 0$

QR: $y_3 = -2x + 30$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \Rightarrow 24 = 3k - 15k \Rightarrow k = -2 \\ 0 = 15k + b \Rightarrow b = -15k \Rightarrow b = 30 \end{cases}$$

2. Всего точек с целыми координатами в пар-мме.

$$N = 16 \cdot 13 + 14 \cdot 12 = 208 + 168 = 376 \text{ точек.}$$

3. Система для точек (сущ-ния пар-мма)

$$\begin{cases} y \leq 24 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x + 30 \\ y \geq -2x \end{cases}$$

4. То условие: $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у-е 6 целых:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 = 2 \\ y_2 - y_1 = 8 \\ x_2 - x_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 10 \\ x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = 6 \\ x_2 - x_1 = 4 \\ y_2 - y_1 = 4 \\ x_2 - x_1 = 5 \\ y_2 - y_1 = 2 \\ x_2 - x_1 = 6 \\ y_1 = y_2 \\ x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = 12 \end{array} \right.$$

кон-во пер: $\frac{376}{2} = 188$

Ответ: 188 пер.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Найти все a , для каждого из которых найдётся b , при котором система имеет ровно 2 решения

Выведем из системы:

$$(1) \quad y = ax + 10b$$

Пр. - прямая

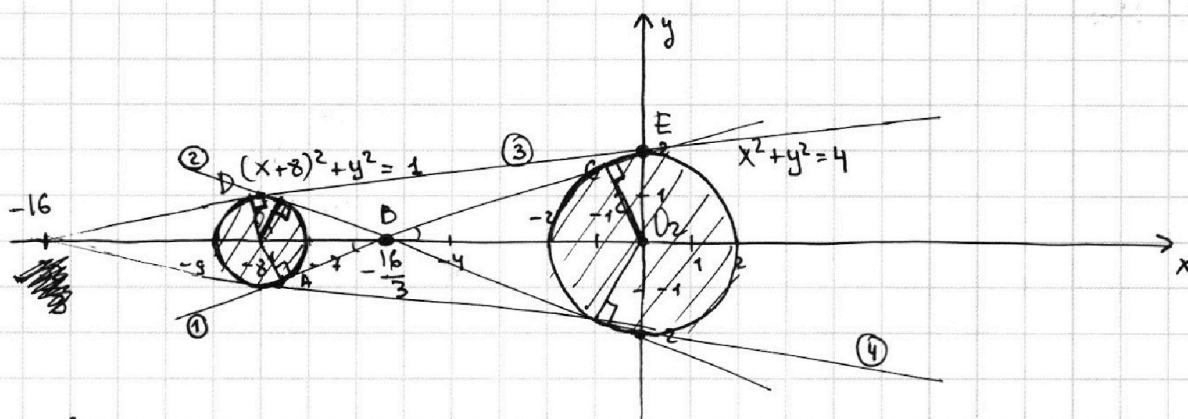
Лин. зависимость.

$$\# \quad ax + y - 10b = 0$$

$$(2) \quad ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \leftarrow \text{Пр. - окружность.} \\ x^2 + y^2 \geq 4 \leftarrow \text{Центр } (-8; 0); R_1 = 1 \\ (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \leftarrow \text{Пр. - окружность.} \\ x^2 + y^2 \leq 4 \leftarrow \text{Центр } (0; 0); R_2 = 2. \end{cases}$$

Построим графики в одной системе координат:



Система ур-й будет иметь 2 решения, если a, b будут "относиться" к прямым 1, 2, 3, 4.

$$\triangle OAB \sim \triangle BCO_2 \Rightarrow \frac{OB}{BO_2} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow OB = \frac{8}{3}, BO_2 = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow B(-\frac{16}{3}; 0)$$

$$AB = \sqrt{OB^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow \frac{55}{9} = (-\frac{16}{3} - x_A)^2 + y_A^2$$

$$\rho(O_1; AB) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-8A + 0 + C|}{A} = 1 \Rightarrow A = -8A + C$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(O_2', CB) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{A} = 2 \Rightarrow 2A = |C|$$

$$DE = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}.$$

$$y = ax + 10b$$

$$K(-16; 0), S(0; 2).$$

$$0 = -16a + 10b \Rightarrow +16a = 10b$$

$$2 = 10b \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$16a = 2, \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \text{сумм.} \quad a = -\frac{1}{8}$$

$$E(-\frac{16}{3}; 0), S(0; 2)$$

$$0 = -\frac{16}{3}a + 10b \Rightarrow \frac{16}{3}a = 2 \Rightarrow a = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$2 = 10b \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

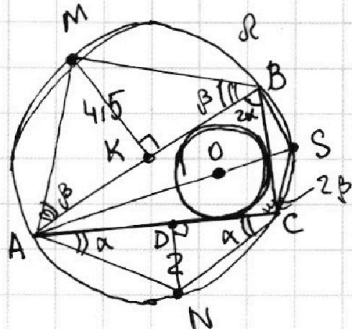
$$\text{сумм.т.} \quad a = -\frac{3}{8}$$

Ответ: ~~$a = \frac{1}{8}$~~ $a = \left\{ \frac{1}{8}; -\frac{1}{8}; \frac{3}{8}; -\frac{3}{8} \right\}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

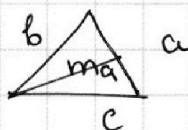


Дано: $\triangle ABC$ вписан в $\text{Окр } R$
 M - сер. $\cup AB$. $\text{Окр } (O'; r)$ вписана
 N - сер. $\cup AC$ в $\triangle ABC$.
 $MK = 4,5$; $ND = 2$.
 Найти: AO - ?

Решение:

- M - сер. $\cup AB$, $\Rightarrow \cup AM = \cup MB \Rightarrow \angle MAB = \angle MBA$ - как впис. остр. на равные дуги, $\Rightarrow \triangle MAB$ - p/δ , $\Rightarrow AM = MB$.
- N - сер. $\cup AC$, $\Rightarrow \cup AN = \cup NC$, $\Rightarrow \angle DAN = \angle DCN$ - как впис., остр. на равные дуги, $\Rightarrow \triangle ANC$ - p/δ , $\Rightarrow AN = NC$.
- Центр впис. в $\triangle$ окр - т. пер. биссектрис.
 $\Rightarrow AO$ - биссектриса $\angle BAC$, $\Rightarrow \cup BS = \cup SC$ (т.к. $\angle BAO = \angle CAO$)
 (т.к. AO - бисс.).
- $\angle SCB = \angle SBC$ - как впис. угол, остр. на равные дуги, $\Rightarrow \triangle SBC$ - p/δ , $\Rightarrow BS = SC$.
- $\triangle MAB$ - p/δ , $\Rightarrow MK$ - бисс., медиана, высота.
- $\triangle NAC$ - p/δ , $\Rightarrow ND$ - бисс., медиана, высота.
- Формула Медианы $\triangle$:

$$m = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$



Пусть $AN = NC = x$
 $\Rightarrow$ По т. Писр. для $\triangle ADN$:
 $AD = \sqrt{AN^2 - ND^2} = \sqrt{x^2 - 4}$

$$\Rightarrow ND = \sqrt{\frac{2x^2 + 2x^2 - (x^2 - 4)}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2.$$

- По т. синусов $\triangle ANC$:

$$\frac{AN}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow x = \sin \alpha \cdot 2R.$$

9.



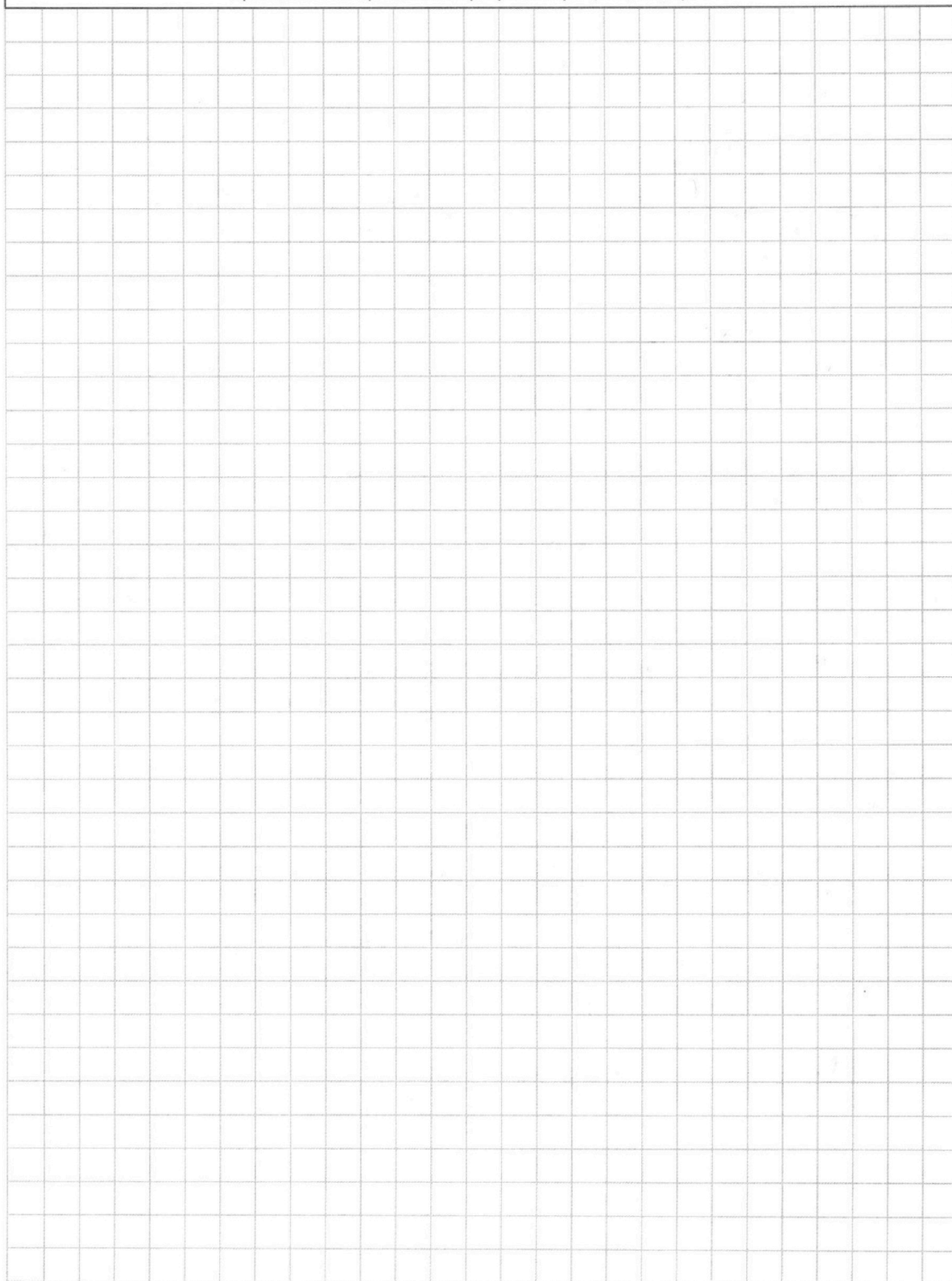
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

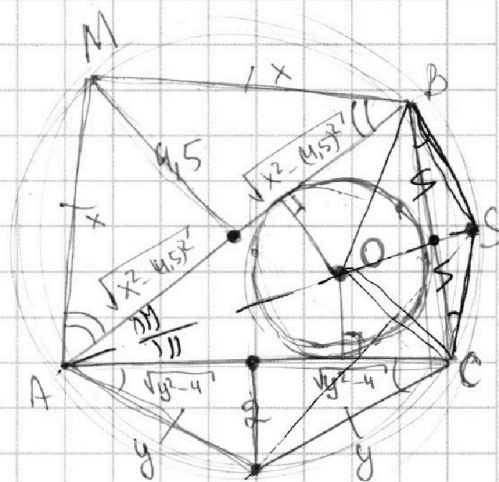
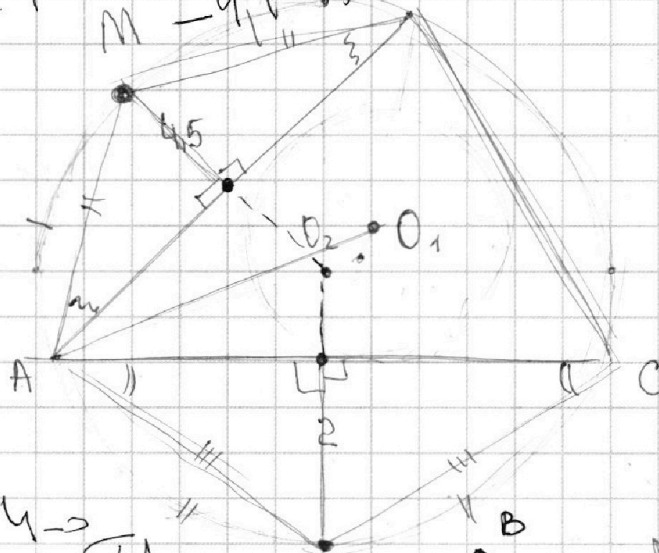
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

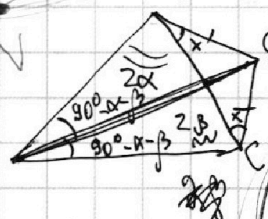
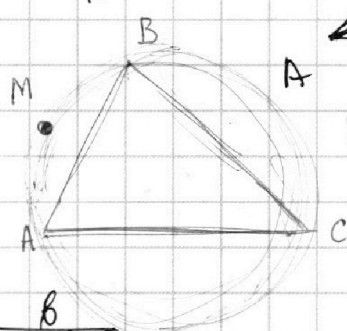
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

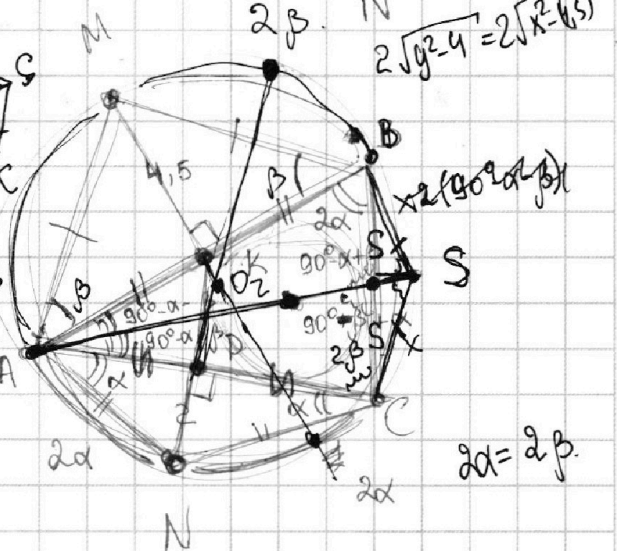
4. 1+3 2-3
M - 4. 1-2-3-3.



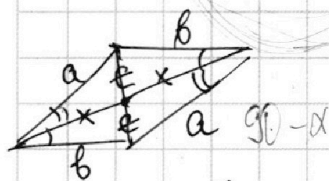
4-2
11-2561
41.



$180^\circ - 2\alpha - x - 90^\circ + \alpha + \beta$
 $90^\circ - \alpha + \beta - x$



$2\alpha = 2\beta$



$180^\circ - 2\beta =$

$MA = \sqrt{180^\circ - 2\alpha - 2\beta}$

$90^\circ - \alpha - \beta$

$180^\circ - 2\alpha - 90^\circ + \alpha + \beta =$

$= 90^\circ - \alpha + \beta$

$180^\circ - 90^\circ + \alpha + \beta - 2\beta = 90^\circ + \beta + \alpha$

$360^\circ - 4\alpha - 4\beta$

$180^\circ - 2\alpha - 2\beta$

$= 90^\circ - \alpha - \beta$

$\angle CAB = 4\alpha + 4(90^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ$

$180^\circ - 2\alpha - 90^\circ + \alpha + \beta = 90^\circ - \alpha + \beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

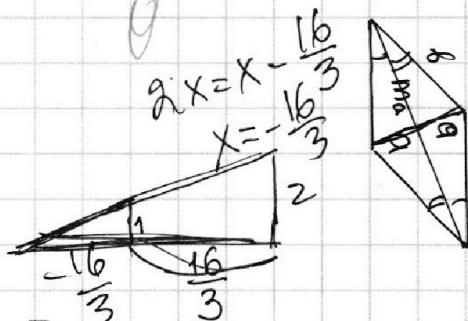
ровно 2 решения - ?

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= ax + 10b \\ (2) \quad ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{x^2 + \frac{16}{3}}$$

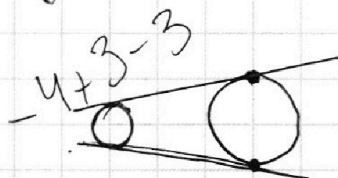


$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

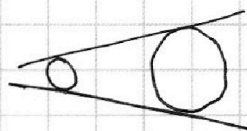
$$(1) \quad y = ax + 10b$$

$$(2) \quad \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$



$$-8A + C > 0$$

$$\begin{aligned} Ax + By + C + 16A + 2C &= C \\ \rho(-8; 0) &= \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-8A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \sqrt{A^2 + B^2} &= \frac{|C|}{2} \\ 1 - 8A + C^2 &= 1 \\ |C| &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -8A + 2C &= C \\ -8A &= -C \\ 8A &= C \end{aligned}$$

$$1 = \frac{24a}{a}$$

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y - ax - b &= 0 \\ y - ax - 16a &= 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 1 - 8A + C \quad \frac{28}{3} \neq \frac{8}{3}$$

$$\rho(0; k) = 1 \quad 2 = \frac{|C|}{1 - 8A + C}$$

$$\rho(C) = 1 \quad 2 = \frac{|C|}{2 - 8A + C + C}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -16k + b \\ y &= kx + b \\ b &= 16k \end{aligned}$$

$$1 = \frac{1 - 8 \cdot (-a) - 16a}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$2 = \frac{1 - 8A + 0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

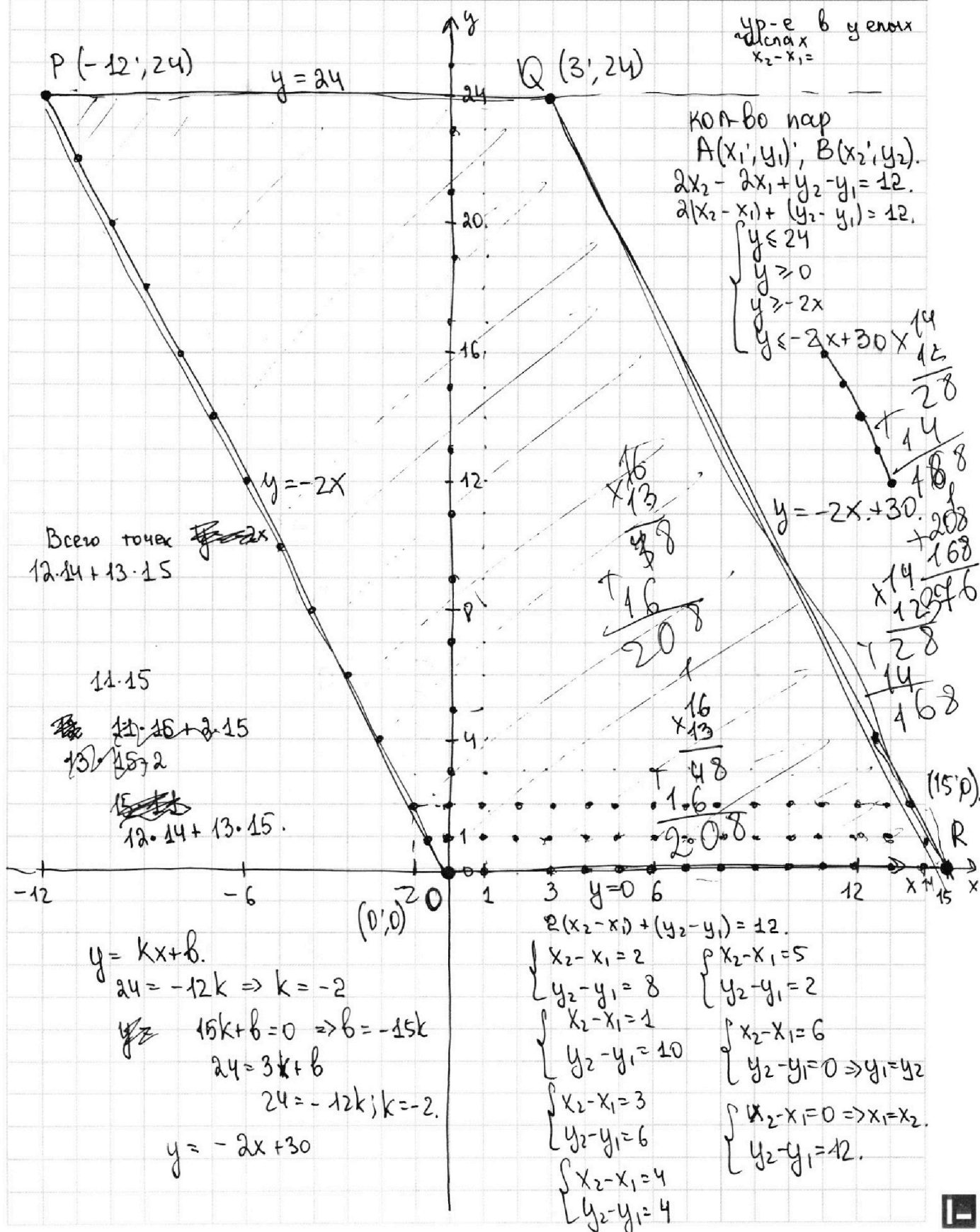
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\bc &: 2^{14} \cdot 7^{17} \\ac &: 2^{20} \cdot 7^{37}\end{aligned}$$

$(abc)_{\text{наим}} = ?$

abc

~~$$abc : 2^{14} \cdot 7^{10}$$~~

~~$$abc :$$~~

~~$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$~~

$$abc : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

ab

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{2^6 \cdot 7^{27}}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{27} \cdot c$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x < 3 \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$$

$$ac : 2^6 \cdot 7^{27} \cdot c$$

$$0 \leq x < 3 \Rightarrow x \in [0, 3)$$

$$0 \leq x < 4 \Rightarrow x \in [0, 4)$$

$$x \in [0, 3) \cap [0, 4) = [0, 3)$$

$$T = 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 5x + 3 = 6x^2 - 8x + 7$$

$$T = 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 5x + 3 = 6x^2 - 8x + 7$$

$$T = 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 5x + 3 = 6x^2 - 8x + 7$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$0 = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

$$0 = (x-2)^2 \Rightarrow x = 2$$

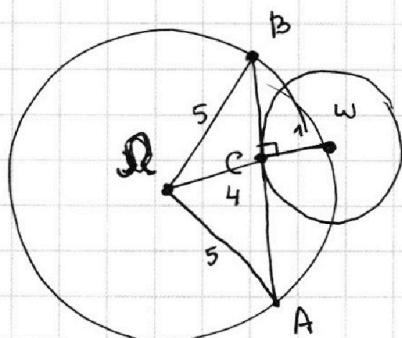
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

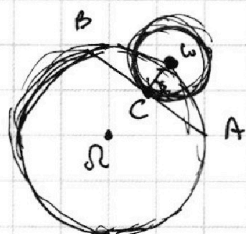


$$AC: CB = 7$$

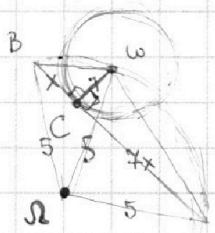
$$\frac{AC}{CB} = 7 \Rightarrow AC = 7CB.$$

$$R_W = 1; R_O = 5.$$

$$49x^2 + 49x^2 + 99x + 99 = 0.$$



$$19404$$



$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$$

$$x = 1$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 \quad | \quad x-1$$

$$49x^4 - 49x^3 \quad | \quad 49x^3 + 50x^2 - 99$$

$$49x^3 - 49x^2 \quad | \quad 99x^2 - 99$$

$$99x^2 - 99x \quad | \quad 99x - 99$$

$$\sqrt{49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1} = 10.$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^2(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = 100$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100.$$

$$Q = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49 =$$

$$= 2500 + 396 \cdot 49 =$$

$$=$$

По т. косинусов:

$$AB^2 = BW^2 + WA^2 - 2 \cdot BW \cdot WA \cdot \cos \angle BWA.$$

$$64x^2 = 1 + x^2 + 49x^2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} \cdot \cos \angle BWA$$

$$14x^2 = 2 - 2\sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} \cdot \cos \angle BWA$$

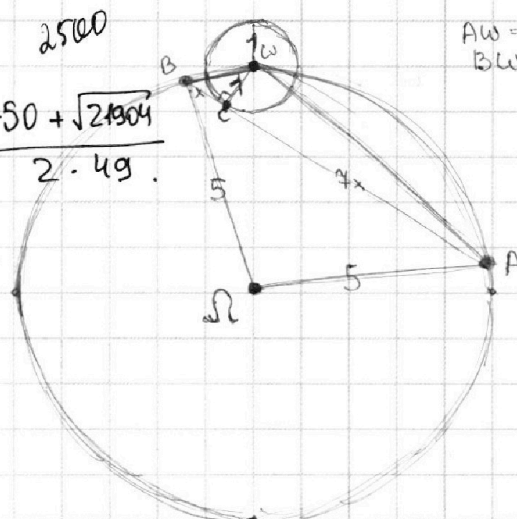
$$\cos \angle BWA = \frac{2 - 14x^2}{\sqrt{2(1+x^2)(49x^2+1)}}.$$

$$2500$$

$$\frac{-50 + \sqrt{21904}}{2 \cdot 49}.$$

$$AW = \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$BW = \sqrt{x^2 + 1}$$



$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 396 \\ \hline 73564 \\ + 1584 \\ \hline 19404 \\ + 19404 \\ \hline 38808 \\ + 38808 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$21904.$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{49x^2+1}}{(\sqrt{49x^2+1})(\sqrt{x^2+1})} = 10 \\ & \sin \angle WBC = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ & \sin \angle WAB = \frac{CW}{WA} = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \\ & \frac{AW}{\sin \angle WBC} = \frac{BW}{\sin \angle WAB} = 2R \\ & \sin \angle BWC = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ & \sin \angle WBC = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AN = CN = x$$

$$AD = \sqrt{x^2 + \frac{25}{4}}$$

$$ma = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2x^2 + 2x^2 - \frac{25}{4}}{4}}$$

$$k_{min} = (a+b+4ab)$$

$$k \geq a+b+4ab$$

$$a+b \leq 0 \rightarrow \text{не можем}$$

$$(a+b)(a+b+4ab-k) \leq 0$$

$$(a+b)^2 + 4ab - k(a+b) \leq 0$$

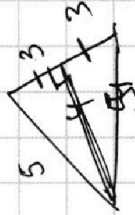
$$k(a+b) \geq (a+b)^2 + 4ab$$

$$k(a+b) \geq a^2 + b^2 + 2ab + 2ab$$

$$mk(a+b) = m(a^2 + b^2 + 4ab)$$

$$25 - \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{\frac{250}{4} - \frac{9}{4}}$$



$$2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 = 100$$

$$19404$$

$$25-9$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 =$$

$$ma = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$



Корни:

3) 6

не m + не m

$$m(a+b) = mk$$

$$\frac{(a+b)^2 + 4ab}{a+b}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab + 2ab$$

$$(a+b)^2 + 4ab$$

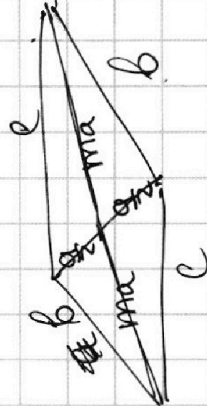
1) не m и не m
2) не m и не m
3) не m и не m

[2, 1], [2, 5]

3) на каком науд m. a и b соответствуют

6 не соответствуют

$$\frac{a^2 + b^2 + 4ab + b^2}{a+b}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle CO_2B; \quad B(-\frac{16}{3}; 0).$$

$$BO_2 = \frac{16}{3}$$

$$BO_2 = \frac{16}{3}; CO_2 = 2.$$

$$BC = \sqrt{4 + \frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{36+256}{9}} = \sqrt{\frac{292}{9}} = \frac{\sqrt{292}}{3}$$

$$BC =$$

$$y = kx + b$$

$$a = 23.720$$

$$a = 23.720$$

$$b = -\frac{16}{3}k + b$$

$$\frac{16}{3}k = b$$

$$ax - y + b = 0$$

$$ax - y + b = 0$$

$$2A = |C|$$

$$C = \frac{16}{3}A = \frac{2 \cdot 16 |C|}{3 \cdot 8}$$

$$k = \frac{C}{3|C|}$$

$$A = |-8A| + |C|$$

$$A = |-8A| + 2A$$

$$-A = |-8A|$$

$$2A = |C|$$

$$A = |-8A + C|$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\rho(O_1; l) = \frac{|-8a - 10b|}{a} = 1$$

$$\rho(O_2; l) = \frac{|-10b|}{a} = 2$$

$$|-8a - 10b| = a$$

$$10b = 2a$$

$$b = \frac{1}{5}a$$

$$-\frac{16}{3}$$

$$y = ax + b$$

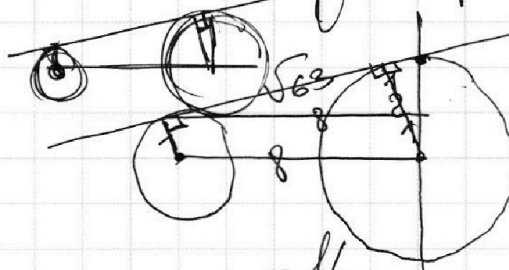
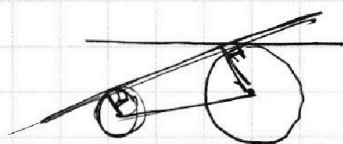
#

$$2 = b$$

$$2 = -\frac{16}{3}$$

$$0 = -16a + 2$$

$$a = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$



$$\left| -8 \cdot \frac{15b}{8} + 10b \right| = 1$$

$$5b = a$$

$$a = \frac{15b}{8} = \frac{3a}{8}$$

$$B\left(-\frac{16}{3}; 0\right)$$

$$y = ax + 10b$$

$$\frac{16}{3}a = 10b$$

$$a = \frac{30}{16}b = \frac{15}{8}b$$

$$\frac{16}{3}a = 10b$$

$$a = \frac{30b}{16} = \frac{15b}{8}$$

$$\rho(O_1; l) = \frac{|-8A + 10C|}{\sqrt{A^2}} = \frac{|-8A + C|}{A}$$

$$1 = \frac{|-8A + C|}{A}$$

$$y = ax + b$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$\frac{|-8A + 10b|}{a}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

$$\begin{cases} 2 - 7x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 2 - 7x. \end{cases}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2 + 7x = 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2 + 7x = 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3}$$

$$4x^2 + 4x + 2 = 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3}.$$

$$4x^2 + 4x + 2 = 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3}.$$

$$4x^2 + 4x + 2 = 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3}.$$

$$4x^2 + 4x + 2 = 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3}.$$

$$(x-1)(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3).$$

$$(x-1)(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3).$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}.$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 7^{14}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{34}$$

наим. возм. $abc = ?$
(произведение).

$$F = \frac{h}{h-3} = 2x$$

$$\frac{z}{3} = \frac{h}{1+3} = x$$

$$F = 3 \cdot 2 \cdot h - 58 = 0$$

$$3 + x \cdot 5 \cdot 2 \cdot x \cdot 8$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$(2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$

$$0 = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$

$$(2x^2 - 5x + 3 - (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)) = 0$$