



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



$$\begin{array}{r} 218 \\ \times 12 \\ \hline 436 \\ 2180 \\ \hline 2608 \end{array}$$

$$\sqrt{169 - 144 \times 2} = 119 \times 2 - 49$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 32 \\ 192 \\ \hline 192 \end{array}$$



3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.



$$3(x+1)^2 - 3x$$

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\begin{array}{r} 1914 \\ \times 14 \\ \hline 7656 \\ 13398 \\ \hline 26796 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3(x-1)^2 - 1$$

$$1 - 3 \cdot 3x$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

$$x^2 - 12x + 1$$

$$2x^2 - 4x + 1$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{array}{r} 959 \\ \times 12 \\ \hline 1918 \\ 19180 \\ \hline 11508 \end{array}$$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

$$(x-1)^2$$

$$(2x-1)/(x-1)$$

$$x^2 - 3x + 1$$

$$(x-2)/(x-1)$$

$$2. 134$$

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

$$x^2 - 3x + 2$$

$$(x-2)/(x-1) + 3x + 2x^2$$

© МФТИ, 2023

$$4x - 14x - 49 = 1$$

$$\begin{array}{r} 692 \\ \times 12 \\ \hline 1384 \\ 6920 \\ \hline 8304 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 4^{11} \quad bc: 2^{14} \cdot 4^{18} \quad ac: 2^{23} \cdot 4^{39}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 4^{y_1} \cdot k_1 \quad k_1 \nmid 2, 4$$

$$b = 2^{y_1} \cdot 4^{y_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{z_1} \cdot 4^{z_2} \cdot k_3$$

$$ab = 2^{x_1 + y_1} \cdot 4^{y_1 + y_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \therefore 2^{15} \cdot 4^{11}$$

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &\geq 15 \\ x_2 + y_2 &\geq 11 \end{aligned}$$

$$\text{аналогично: } y_1 + z_1 \geq 14 \quad y_2 + z_2 \geq 18 \quad x_1 + z_1 \geq 23$$

$$x_2 + z_2 \geq 39$$

~~аналогично: $ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15+14+23} \cdot 4^{11+18+39} = 2^{52} \cdot 4^{68}$~~

~~$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{52} \cdot 4^{68}$~~

~~$2x_2 + 4y_2 + 2z_2 \geq 13 + 39 + 11$ но они не меньше 39.~~

~~$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$~~

~~$ab \cdot c = 2^{x_1 + y_1 + z_1} \cdot 4^{x_2 + y_2 + z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$~~

~~$\geq 2^{23} \cdot 4^{39}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нз / $x_1 + y_1 \geq 15$
 $y_1 + z_1 \geq 17$
 $x_1 + z_1 \geq 23$

$x_2 + y_2 \geq 11$
 $x_2 + z_2 \geq 18$
 $x_2 + z_2 \geq 35$

$2x_1 + 2y_1 + 2z_1 \geq 55$

$2x_2 + y_2 + 2z_2 \geq 48$

$x_1 + y_1 + z_1 \geq 27.5$
 $x_1, y_1, z_1 - \text{целые}$

$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$

$x_1 + y_1 + z_1 \geq 28$

$\Rightarrow abc = 2^{x_1+y_1+z_1} \cdot 4^{x_2+y_2+z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$

$2^{28}, 4^{39}$

Это выражение достигается при

$x_1 = 10$

$x_2 = 11$

$y_1 = 5$

$y_2 = 0$

$z_1 = 13$

$z_2 = 18$

$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$

$b = 2^5$

$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b \div m \quad a^2 - 4ab + b^2 = a + 2ab - 9ab + b^2$$
$$= (a+b)^2 - 9ab \div m$$

$$\div m \Rightarrow 9ab \div m$$

так как $a \div m$ и $b \div m$, то $9ab \div m$

$$a+b \div m, \text{ то } a \div m, b \div m \Rightarrow$$

$$9ab \div m \Rightarrow a \div m \quad m \leq 9$$

$$\text{для } m=9 \quad a=4 \quad b=5$$

$$a+b=9 \quad a^2 - 4ab + b^2 = -99$$

$$- \frac{9}{99} \text{ сок. } \rightarrow - \frac{1}{11}$$

$$\text{Ответ: } m=9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 = 3x^2-27x^2+2$$

$$= 8x^2-18x+1$$

$$1) (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) = 1-9x$$

$$\Rightarrow 1-9x = (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$= (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-6x+2} = 1-9x$$

$$12x^2-24x+8 = 1-18x$$

$$8x^2-12x-4=0$$

$$2) \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

Вспомогат. $2\sqrt{3x^2+3x+1} = 9x$

$$4x^2+12x+4 = 81x^2$$

$$81x^2-12x-4=0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2+4 \cdot 81}}{2 \cdot 81} = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{162}$$

Ответ: $x = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{162}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15

Возьмем все уравнения вида
 $2x + y = k$. Заметим, что
 такая прямая параллельна
 сторонам OP и QR паралл. $\Rightarrow$
 для всех k от 0 (прямая OP)
 до 22 (прямая QR)
 если мы берем две точки x_1, y_1
 и x_2, y_2 так, что
 $(2x_1 + y_1) - (2x_2 + y_2) = 14$, то мы
 $\Rightarrow 2x_2 + y_2 = k_2$ и $2x_1 + y_1 = k_1$, то
 мы можем взять любые две точки
 на A и B , которые лежат
 на $2x + y = k_1$ и $2x + y = k_2$
 для каждой прямой в параллельном
 семействе k
 лежит 26 целых точек (это видно из того
 что каждая прямая покрывает одним из
 точек) и 25 семейств k - нечетного
 семейства что здесь k_1 и k_2 - равной длине
 при переходе чертовски, чтобы из 26^2 не было
 14 - 10 - столько брали 2 точки 26^2 не было
 от. брали - 25^2 . Ответ: всего пер. $10 \cdot 26^2 + 9 \cdot 25^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (пр. 1)

$$f(x) = (x^2 + (3b - ax)^2 - 1)(x^2 + (3b - ax - 1)^2 - 10) \leq 0$$

эта $f(x)$ непрерывна. Заметим,
что если она в какой-то $x < 0$, то
это значит, что левая часть
интервала на котором она ≤ 0

(пусть в x_0 она $f(x) < 0$, тогда
по опред. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$
(или хотя бы сходимости, т.к. она непрерывна.)

сущ. $\delta > 0$ так, что для любого x

$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$$

возьмем $\varepsilon < -f(x_0)$ тогда сущ.

δ , что на отрезке $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$$

если $f(x) < 0$ для точечных решений

то это можно еще так ~~записать~~

$$f(x) = 0 \quad (x^2 + (3b - ax)^2 - 1)(x^2 + (3b - ax - 1)^2 - 10) = 0$$

имеет 2 корня и не имеет $f(x) < 0$

где $g(x)$ и $Q(x)$ — квадратичные функции
значит что $x^2 + (1 + a^2)$ — они совпадают
или $g(x)$ корнями $-x_1$ и x_2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

nb amp. }
 $\Rightarrow 2\text{flex} - 1926 + 724 = 0$ bunga (m.k. mm)

мн кружка и чаша у нас 2 корова,
но все чинили - те корова)

$$\Rightarrow a = 0, 729 - 729b = 0 \quad b = \frac{120}{192}$$

~~g(x) = 2x^2 + 2x + 1~~
 haben $2x^2 + 2x + 1 = 0$ $\Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{0}$

$\Rightarrow y(g(x))$ 2-кратное и $y+h(x)$ простое $\Rightarrow y(g(x)) \neq y+h(x)$

или $q(x)$ и $Q(x)$ по формуле

Вопрос, мы ; т.м. и вспомог.

~~$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1$$~~

~~$$p(g(x)) = (2ka)^2 - 4(1+q^2)(k^2-1) =$$~~

~~$4k^2a^2 - 4k^2a^2 = 4k^2 + 4 + 4a^2$~~

~~$4a^2 - 4k^2 + 4 = 0 \quad a^2 - k^2 + 1 = 0$~~

~~$$\phi'(x) = (2na - 2ak)^2 - 4(1+a^2)$$~~

~~$$(k^2 + 128 - 12k) = 1576a^2 - 26a^2k + 4a^2k^2$$~~

~~$$-4a^2k^2 - 312a^2 + 48a^2k - 4k^2 - 312 + 4a^2k$$~~

$$64a^2 - 48a^2k - 512 - 4k^2 + 48k = 0$$

$$16a^2 - 22a^2k - 123 - k^2 + 43k = 0$$

$$13a^2 - 12a^2k = 129 + 48k = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} a^2 - k^2 + a = 0 \\ 16a^2 - 72a^2k - 72b - k^2 + 43k = 0 \end{cases}$ *нб стр. 4*

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + (y - 72)^2 - 76 = 0$$

$$y^2 - 1 = (y - 72)^2 - 76$$

$$y^2 - 1 = y^2 - 24y + 720$$

$$2: 4y = 720$$

$$y = \frac{720}{24} \Rightarrow y \text{ нис можно}$$

были только $y=0 \Rightarrow$ не было отрицательных $\Rightarrow a=0$

ответ: $y=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~6) (проверка)~~ 26 стр. 2
но на интервале $(x_1; x_2)$ $g(x) \neq -a$
на $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $g(x) \neq -a \Rightarrow$ значит
 $Q(x)$ имеет <0 и >0 на этих
интервалах $\Rightarrow$ есть у $g(x)$ корни x_1 и x_2 ,
то у $Q(x)$ также корни $(x_1$ и $x_2)$ и
было так же $g(x)$ и $Q(x)$ в
разные знаки и $f(x) < 0$.

или $g(x)$ не имеет корней;
то тогда у $Q(x)$ не может
быть 2 корня т.к. или у $Q(x)$
2 корня то есть x_1 при котором
 $Q(x_1) < 0$ и x_2 $Q(x_2) > 0$ и
тогда либо $f(x_1) < 0$ либо $f(x_2) < 0$
 $\Rightarrow$ либо у $Q(x)$ и $f(x)$ общие

Корнями, либо из квадратного по 1 корню
 или из них одним корнем. x_1 и x_2 , то $q(x) - q(x) =$
 $q(x) = x^2 + \underline{a^2} x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = q(x_1)q(x_2)$
 $q(x) = x^2 + \underline{a^2} x^2 + 64b^2 + 144 - 16abx - 192b$
 $q(x) - q(x) = 144 - 192b + 24ax$
 $144 - 192b + 24ax = 0$ при x_1 и x_2