



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

55.

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} & \Rightarrow & ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10} & \Rightarrow & abc \geq 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} & \Rightarrow & bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17} & \Rightarrow & abc \geq 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} & \Rightarrow & ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37} & \Rightarrow & abc \geq \end{aligned}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{14} \cdot 7^{10}, abc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}, abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Наименьшее возможное значение abc
можно представить в виде: $abc = 2^x \cdot 7^y \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 14 \\ x \geq 17 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \\ y \geq 17 \\ y \geq 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 37 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Если $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$; тогда найдем

значения a, b, c :

$$a = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$b = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 1$$

$$c = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^6 \cdot 7^{27}$$

$$ab = 2^3 \cdot 7^{20}$$

x, y — целые натур.
т.к. a, b, c — натур.

При этом:

$$abc \geq 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{14+17+20}{2} \\ y \geq \frac{10+17+37}{2} \\ x \geq 20 \\ y \geq 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 25,5 \\ y \geq 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 25,5 \\ y \geq 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 26 \\ y \geq 32 \end{cases}$$

Пусть $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$a = \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^9 \cdot 7^{20} = a$$

$$b = \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{26} \cdot 7^{37}} = 1 = b$$

$$c = \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^{12} \cdot 7^{27} = c$$

Минимальное
значение
 $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

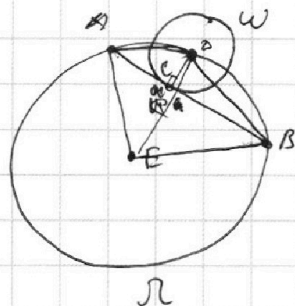
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ДЗ.



Д, Е - центры ω и Ω , соответственно
Проведем AD, DB, EA, EB, ED :

Рассмотрим 4-угольник
 $ADEB$ индольно:

$DC \perp AB$ по св.
касательной AB
 $\Rightarrow DC$ - высота на AB

По условию: $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

$DC = 1$ $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

Пусть $BC = x$. Тогда $AC = 7x$

$\Rightarrow \Omega$ - описанная окружность для $\triangle ADB$

$\Rightarrow$ Площадь $\triangle ADB$: $S = \frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4R}$, где

$R = AE = ED = EB = 5$. Также: $S = \frac{DC \cdot AB}{2}$

$AD = \sqrt{1 + 49x^2}$, $DB = \sqrt{1 + x^2}$, $AB = 8x$

$$\frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4R} = \frac{DC \cdot AB}{2}$$

$$AD \cdot DB = 2DCR = 2 \cdot 1 \cdot 2R = 4R$$

$$AD \cdot DB = \sqrt{1 + 49x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2} = 2 \cdot 5$$

$$(1 + 49x^2)(1 + x^2) = 4 \cdot 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

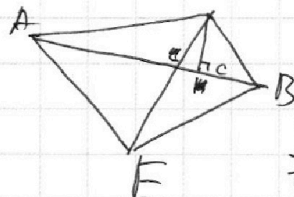
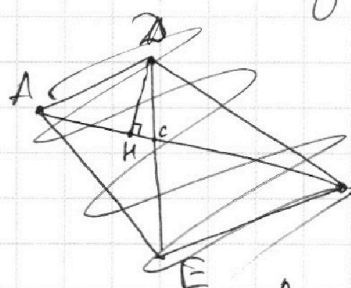
$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$\text{Заменим } t = x^2 \geq 0$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 21904 =$$

$$= 16 \cdot 1369 = 16 \cdot 37^2 = (4 \cdot 37)^2 = 148^2$$



$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 49 \\ \hline 891 \\ 396 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4851 \\ 4 \\ \hline 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ 12 \\ \hline 98 \\ 498 \\ \hline 588 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3088 \overline{) 18} \\ 24 \\ \underline{- 24} \\ 388 \\ 386 \\ \underline{- 386} \\ 2 \\ 148 \\ \underline{- 148} \\ 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$\left[t = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 3916}}{2 \cdot 49} = \frac{-50 \pm 82}{98} \right] \Rightarrow X^2 = 1 \Rightarrow X = 1$$

$$\left[t = \frac{-50 - 82}{98} < 0 \right]$$

$$AB = 7x + x = 8x = 8$$

Ответ: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замена переменных: $a = 2x^2 - 5x + 3$

$$b = 2x^2 + 2x + 1.$$

$$2 - 7x = 2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1) = a - b \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{b} &= a - b \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= (a - \sqrt{a})(\sqrt{a} + 1) \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) \end{aligned}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \text{ ①} \\ b \geq 0 \text{ ②} \\ \sqrt{a} = \sqrt{b} \text{ ③} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \text{ ④} \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно:

① $a \geq 0$

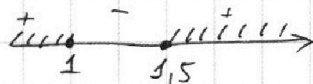
$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$2\left(x - \frac{5-1}{4}\right)\left(x - \frac{5+1}{4}\right) \geq 0$$

$$2(x-1)(x-1,5) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty)$$



② $b \geq 0$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$$

$$\text{Т.к. } 2 > 0, \text{ то}$$

$$b > 0 \text{ всегда } \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\text{④ } \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

④ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{a}$$

$$b = a - 2\sqrt{a} + 1$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

$$\text{т.к. } \sqrt{b} \geq 0$$

③ $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

$$a = b$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{aligned} 7x &= 2 \\ x &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$\begin{cases} 3 - 7x \geq 0 \\ 4(2x^2 - 5x + 3) = 9 + 49x^2 - 42x \end{cases} \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① Продолжение

$$\begin{cases} 7x \leq 3 \\ 8x^2 - 20x + 12 = 9 + 49x^2 - 42x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{7} \\ 41x^2 - 62x - 3 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно:

$$41x^2 - 62x - 3 = 0$$

$$D = 62^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

Итоговая система:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty) \\ x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{2}{7} < 1 < 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Проверка
того, что
корни входят
в промежутки

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 101 \\ 10201 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 61 \\ 16 \\ 366 \\ 61 \\ 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 1244} \\ 8 \overline{) 12} \\ 16 \\ 16 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 62 \\ 62 \\ 382 \\ 3844 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 41 \\ 12 \\ 82 \\ 41 \\ 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 41 \\ 15 \\ 492 \\ 484 \\ 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 41 \\ 15 \\ 492 \\ 484 \\ 976 \end{array}$$

$$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \vee 1,5$$

$\vee$
 0

$$\begin{aligned} 11 + 2\sqrt{61} &\vee 61,5 \\ 2\sqrt{61} &\vee 50,5 \\ \sqrt{61} &\vee 25,25 = \frac{101}{4} \end{aligned}$$

$$61 \vee \frac{101^2}{16}$$

$$976 < 10201$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < 1,5$$

$$\begin{aligned} 22 \vee 4\sqrt{61} \\ 5,5 < 6 < \sqrt{61} \\ 36 < 61 \end{aligned}$$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} < 0$$

$$26 > 20 > \sqrt{61} \quad \text{т.к. } 400 > 61$$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} > -1$$

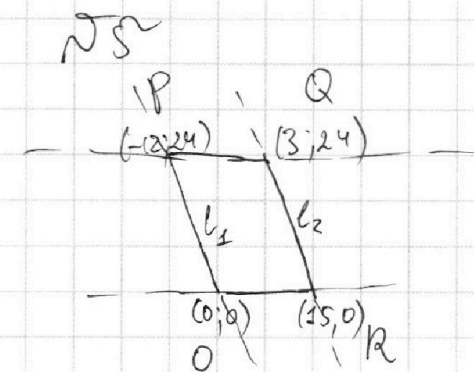
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



l_1 - прямая через PO .

у-е прямой l
из графика:

$$l_1: y = -2x$$

Аналогично

для l_2 : $l_2 \parallel l_1$, то
у-е l_2 вида: $-2x + b = 0$
 $-2 \cdot 5 + b = 0$
 $b = 30$

$$l_2: y = -2x + 30$$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 30 \\ 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2x_1 \in [0, 30] \\ 0 \leq y_1 \leq 24, 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 42 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \\ 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24, 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \\ y_1 + 2x_1 \in [0, 30] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

Если точка $M(x; y)$
принадлежит парал-лу
 $PQRO$, то:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 24 \\ y \leq -2x + 30 \\ y \geq -2x \end{cases}$$

$$2) x \in [-2; 5]$$

Для точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$:

$$\begin{cases} y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \\ y_1 \leq 24, y_2 \leq 24 \\ y_1 \leq -2x_1 + 30 \\ y_2 \leq -2x_2 + 30 \\ y_1 \geq -2x_1 \\ y_2 \geq -2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ -2x_1 \leq y_1 \leq 30 - 2x_1 \\ -2x_2 \leq y_2 \leq 30 - 2x_2 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \\ 0 \leq 2x_1 + y_1 \leq 30 \end{cases}$$

~~$x_1 = 0$~~ ~~$x_1 \in [-12; 15]$~~

Далее переберём значения
 $A(x_1; y_1)$ и посчитаем кол-во
подходящих $B(x_2; y_2)$

$x_1 = -12$
 $y_1 = 14$
 $y_1 = 10$
 $y_1 = 9$

~~$x_1 = -12$~~ ~~$y_1 \in [24]$~~

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 - 2x_2 \leq y_2 \leq 30 - 2x_2 \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \end{cases}$$

$$2x_2 + y_2 = 2(x_1 + 3) + y_1 + 4$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Т. - точка

Рассмотрим отдельно первое ур-е:

$$ax - y + 10b = 0$$

(1) $ax + 10b = y$ - ур-е прямой.

Рассмотрим отдельно второе ур-е:

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \quad (2)$$

$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$ - верно для точек, лежащих ~~внутри~~ принадлежащих окр-ти ^{ω₁} радиуса 1 с центром в Т. ~~ω₁~~ $(-8; 0)$; $(x+8)^2 + y^2 \geq 1$ - для точек вне этой окр-ти и на ее границе.

$x^2 + y^2 \leq 4$ - верно для точек, принадлежащих окр-ти ^{ω₂} радиуса 2 с центром в $(0; 0)$; $x^2 + y^2 \geq 4$ - для точек вне этой окр-ти и на ее границе.

Решение системы (2) - это точки

$(x_0; y_0)$ - решение системы (2), если:

Т. $(x_0; y_0)$ ~~лежит~~ принадлежит ω_1 и не лежит внутри ω_2

или принадлежит ω_2 и не лежит внутри ω_1 .

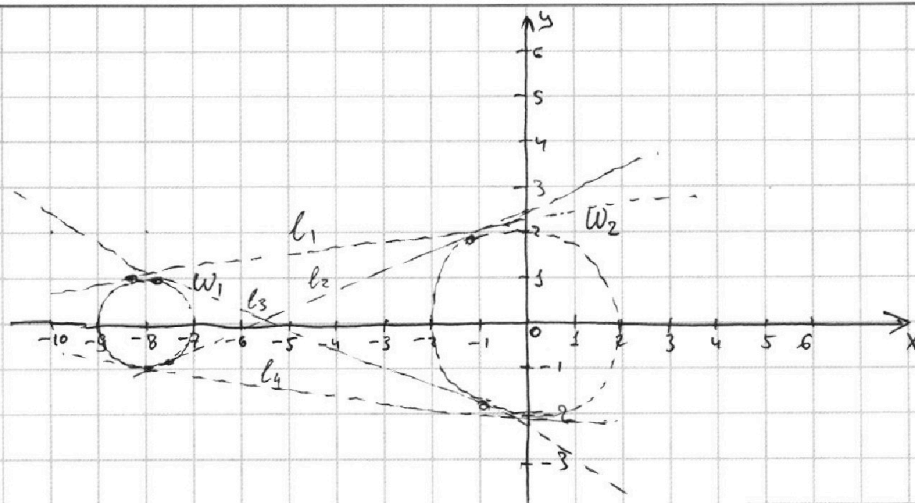
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



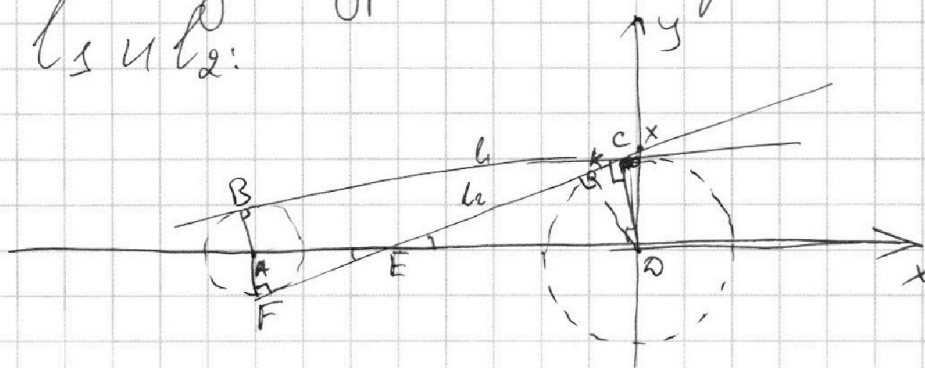
Исходная система:

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) имеет ~~ровно~~ ровно 2 решения только если прямая $y = ax + 10b$ касается обеих окружностей (точки касания — решения системы)

Общих касательных к 2 окр-там можно провести 4 (см. рис: l_1, l_2, l_3, l_4). ^{на рисунке} ~~Собираем все прямые~~

Найдем уравнение прямой l_1, l_2, l_3, l_4 :
 l_1 и l_2 :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AE + ED = 8$$

$$AF = 1$$

$$ED \text{ с.к.} = 5$$

$\angle CED = \angle AEF$ как вертикальные
углы

$$\angle AFE = \angle DCE = 90^\circ$$

по св. касательной

$$\Delta CED \sim \Delta FEA$$

$$\frac{ED}{AE} = \frac{CD}{AF} = \frac{5}{1} \Rightarrow ED = 5AE$$

$$AE + 5AE = 8$$

$$AE = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$ED = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\Delta EAD \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{ED}{ED} = 1$$

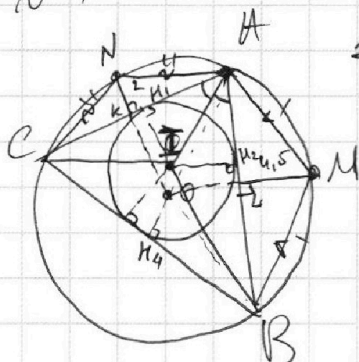
$$\Delta EAD \sim \Delta EAF \Rightarrow$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



р/б - равнобедренный

1. Т. О - центр описанной окр-ти для $\triangle ABC$, R - её радиус
2. Т. I - центр вписанной окр-ти для $\triangle ABC$, r - её радиус.

3. Т.к. $UCN = UAN$, то $AN = CN$
 $UAM = UBM$, то $AM = BM$

4. Пусть NK и ML - высоты из т. N и т. M на AC и AB, соответственно. Тогда по усл. $NK = 2$, $ML = 4,5$.

5. Из 3) $\triangle CNA$ и $\triangle AMB$ - р/б. $\Rightarrow$

NK и ML - серединные перпендикуляры к AC и AB соответственно $\Rightarrow$ Третье NK и ML

пересекаются в т. O по св. описанной окр-ти.

6. $OM = ON = R = NK + OK = ML + OL$

7. Опустим из т. I высоты IH_1 и IH_2 на AC и AB соответственно. $IH_1 = IH_2 = r$

8. $AO = ON = OB \Rightarrow \triangle AMB = \triangle AOB \Rightarrow ML = OL \Rightarrow OM = 2ML = 9$
~~Она же точка, $OM = 4$~~

- ~~8. $IH_2 = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} R = IH_1 = r$~~

8. $AI = 2OH_1$ (св. р/б) $\Rightarrow OH_1 = \frac{1}{2} AI$

9. $OH_1 + OK + OL = 3r \Rightarrow 2R + OH_1 = 3r + 6,5$
 $2R + \frac{1}{2} AI = 3r + 6,5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2R + \frac{1}{2}AI = 6,5 + 3n$$

$$2R + 0,5n = 6,5 + 3n$$

$$2,5n = 2R - 6,5$$

~~Найти~~ Найти:
 $AI = n - ?$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{1} \text{ ab: } 2^{14} 7^{10} \Rightarrow \min \text{ ab} = 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} 7^{17} \Rightarrow \min bc = 2^{17} 7^{17}$$

$$ae : 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow \min ae = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{15}$$

$$6 = 2^6 \cdot 95$$

$$C = 2^{12} \cdot 7^{22}$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$W = 4 - 4$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$2\left(x - \frac{5-1}{4}\right)\left(x - \frac{5+1}{4}\right)$$

$$2(x-1)(x-1.5)$$

$$bc_{\min} = 2 \cdot 2^{17} \cdot 2^{17} = 2^{18} \cdot 2^{17}$$

$$ab^2c^2 = 2 \quad 14 + 8 + 20$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{52} \cdot 7^{64}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$a + b$

$$a^2 - 6ab + b^2$$

$$a^2 - 6ab + b^2$$

$$Q = 36 - 4 = 32$$

$$W = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$$

~~$$\left(a - \frac{6 - \sqrt{32}}{2}\right)$$~~

$$\left(a - \frac{6 - 4\sqrt{2}b}{2}\right) \left(a - \frac{6 + 4\sqrt{2}b}{2}\right)$$

$$(a - 3 + 2\sqrt{2}b)(a - 3 - 2\sqrt{2}b)$$

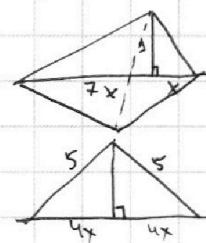
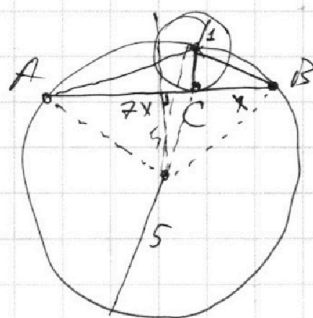
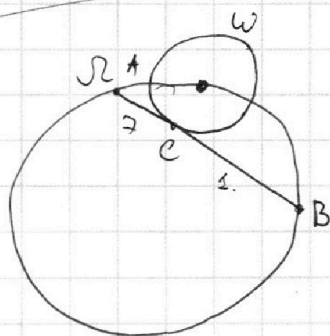
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b.$$

$$\frac{a+b}{(a-7b)(a+b)+8b^2}$$

$$8b^2 : a+b ?$$

$$8b^2 = (a+b)k$$

$$a+b=8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x = \frac{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}}{20}$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$49t^2 - 6350t + 1 = 0$$

$$D = 6350^2 - 4.49 = 60229$$

$$\begin{array}{r} 21904 \overline{) 45111} \\ \underline{4380} \\ 1311 \\ \underline{1311} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 203 \\ \times 203 \\ \hline 609 \\ 4060 \\ \hline 41209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 130 \\ \hline 269 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 278 \\ 26 \\ \hline 916 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 253 \\ 253 \\ \hline 759 \\ 265 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 06 \\ 4009 \\ \hline 43 \\ 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 2 \\ \hline 49 \end{array}$$

5/20

~~10/6/20~~

$$\begin{array}{r} 237 \\ \times 237 \\ \hline 1659 \\ 711 \\ 474 \\ \hline 56169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 217 \\ \times 217 \\ \hline 1519 \\ 217 \\ 434 \\ \hline 47089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 243 \\ 243 \\ \hline 729 \\ 982 \\ 486 \\ \hline 59049 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 287 \\ \times 287 \\ \hline 2009 \\ 2296 \\ 574 \\ \hline 82369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 247 \\ \times 247 \\ \hline 1729 \\ 988 \\ 494 \\ \hline 61009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 243 \\ \hline 729 \\ 972 \\ 486 \\ \hline 59049 \end{array}$$

~~$$\begin{array}{r} 1606 \\ \times 606 \\ \hline 9636 \\ 9636 \\ \hline 9636 \\ \hline 9636 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \geq -2x_1, -2x_2$$

$$y_1, y_2 \leq 24$$

$$y_1, y_2 \leq -2x_1 + 30, -2x_2 + 30$$

$$3k + 6 = 24$$

$$35k + 6 = 0$$

$$12k = 24$$

$k = -2$

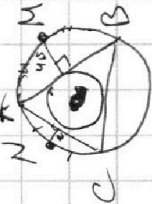
$$b = 30$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 4} \\ \underline{124} \\ 8 \overline{) 17} \\ \underline{16} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4336 \\ -4 \\ \hline 33 \\ -32 \\ \hline 16 \\ -16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 56 \\ \hline 336 \\ 2800 \\ \hline 3136 \end{array}$$



$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



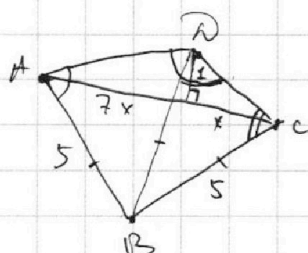
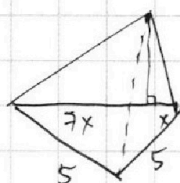
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle B$$

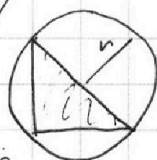
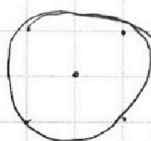
~~8x1.5~~

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S_{ABC}$$

$$S_{ABC} =$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8x = 4x$$

$$S_{ADC} = \frac{abc}{4R} ?$$



$$r = \sqrt{2}$$

$$S = 2$$

$$\frac{abc}{R} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{2}} = 2$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2}}{4 \cdot 5}$$

$$\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 49 \\ 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2500 \\ - 196 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$D = 50^2 - 4 \cdot 49 = 2500 - 196 = 2304 = 48^2$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 42 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$4x = \frac{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}}{20}$$

$$80x^2 = \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}$$

$$6400x^2 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$49x^4 - 6350x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{-50 + 48}{2 \cdot 49} = -\frac{1}{49}$$

$$x^2 = \frac{-50 - 48}{2 \cdot 49} =$$

$$49t^2 - 6350t + 1 = 0$$

$$D = 6350^2 - 4 \cdot 49$$

$$2415 \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 22919} \\ \underline{57} \\ 32 \\ \underline{19} \\ 132 \\ \underline{114} \\ 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 635 \\ 635 \\ \hline 3175 \\ 1905 \\ 3810 \\ \hline 60325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60325 \\ - 196 \\ \hline 60229 \overline{) 17} \\ - 58 \\ \hline 22 \\ - 22 \\ \hline 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N}$$

П.к. abc - натуральное, то $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$

Если $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$, то:

$$\begin{matrix} 2^{26} & 7^{32} \\ a & - & b & c \\ 2^{18} & 7^{17} & 2^{14} & 7^{10} \end{matrix}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

~~Минимальные значения~~
 ~~$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$~~

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37}$$

$$(abc)^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc \geq 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

~~Подходят значения:~~
 ~~a, b, c~~

для a, b, c

$$a = \frac{abc}{bc} = \frac{2^{26} \cdot 7^{32}}{2^{18} \cdot 7^{17}} = 2^8 \cdot 7^{15}$$

$$b = \frac{abc}{ac} = \frac{2^{26} \cdot 7^{32}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 2^6 \cdot 7^{-5}$$

$$c = \frac{abc}{ab} =$$

№1.

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$abc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow abc \geq \text{НОК}(2^{14} \cdot 7^{10}, 2^{17} \cdot 7^{17}, 2^{20} \cdot 7^{37})$$

$$abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\text{НОК}(2^{14} \cdot 7^{10}, 2^{17} \cdot 7^{17}, 2^{20} \cdot 7^{37}) = 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

При $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$:

$$a = \frac{abc}{bc} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$b = \frac{abc}{ac} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 1$$

$$c = \frac{abc}{ab} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^6 \cdot 7^{27}$$

возможны
следующие
значения a, b, c :