



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{14} \cdot 7^{10} m$; $b = 2^{17} \cdot 7^{17} n$; $c = 2^{70} \cdot 7^{37} k$; $m, n, k \in \mathbb{N}$. Замечу, что

если в числах m, n и k есть простые делители, отличные от 2 и 7, то можно их вычеркнуть, уменьшив числа, и все необходимые условия trotzdem выполняются. Таким образом, в числах m, n и k используются у простых множителей только 2 и 7 $\Rightarrow a, b, c = 7^x \cdot 2^y$.

Рассмотрим оба простых делителя по отдельности.

I. Рассмотрим 2. Переписываем все равенства в начале:

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{67} mnk \Rightarrow abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{67} mnk} \Rightarrow \text{н.к. } abc \in \mathbb{N}, \text{ то } abc : 2^{26}, \text{ н.к. } \sqrt{2^{51}} = 2^{25} \cdot 2,$$

но $m, n, k \geq 1 \Rightarrow \min y = 26$. Приведу пример:

$a \rightarrow 2^9$; $b \rightarrow 2^5$; $c \rightarrow 2^{11}$ (здесь сопоставлены числа с их макс степенями 2). Можно заметить, что $abc : 2^{26}$, но $abc \nmid 2^{27}$ и все 3 условия выполнены $\Rightarrow y = 26$.

II. Рассмотрим 7. Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc : c$, но $ac : 7^{37} \Rightarrow abc : 7^{37} \Rightarrow \min x = 37$.

Приведу пример:

$a \rightarrow 7^{10}$; $b \rightarrow 7^7$; $c \rightarrow 7^{20}$. Аналогично, все условия выполнены $\Rightarrow \min x = 37 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a; a+b) = 1$ и

$\text{НОД}(b; a+b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(ab; a+b) = 1$. Теперь преобразуем начальное выражение:

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}. \text{ Заметим, что } \text{НОД}(a+b; (a+b)^2 - 8ab) = \text{НОД}(a+b; 8ab). \text{ Но}$$

$\text{НОД}(a+b; ab) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; 8ab) > 1$ если $\text{НОД}(a+b; 8) > 1$. Но $\max \text{НОД}(a+b; 8) = 8$.

Таким образом, $\max m \in \mathbb{N} = 8$. Этот случай достигается, если $(a+b) : 8$. Приведу

пример, в котором это выполняется:

$$a=1; b=7 \Rightarrow \frac{1+7}{1-6 \cdot 7 \cdot 1+7^2} = \frac{8}{6} \Rightarrow m=8.$$

П.е. было доказано, что $m \leq 8$ и приведён пример на $m=8$.

Ответ: 8

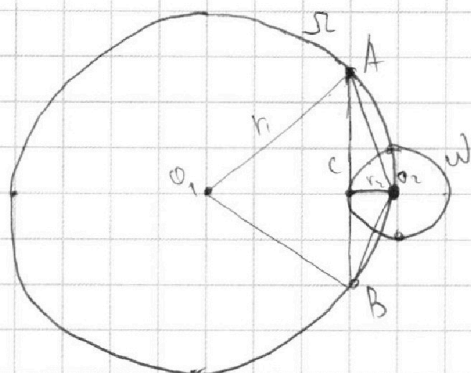
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$r_1 = 5$$

$$r_2 = 1$$

AB - касат. к ω

$$AC:CB = 7$$

$$AB = ?$$

Решение:

1) Введём обозначения: O_1 - центр Ω_1 ; O_2 - центр ω ; r_1 и r_2 - их радиусы соответственно.

2) AB - касательная к $\omega \Rightarrow O_2C \perp AB$.

3) Пусть $BC = x \Rightarrow AC = 7x$. По теореме Пифагора для ΔACO_2 : $AO_2^2 = AC^2 + CO_2^2$; для ΔBCO_2 :

$$BO_2^2 = BC^2 + CO_2^2 \Rightarrow AO_2^2 = 49x^2 + r_2^2; BO_2^2 = x^2 + r_2^2 \Rightarrow AO_2 = \sqrt{49x^2 + r_2^2}; BO_2 = \sqrt{x^2 + r_2^2}$$

4) По теореме cos для ΔAO_2B :

$$AO_2^2 + BO_2^2 - 2 \cdot AO_2 \cdot BO_2 \cos \angle AO_2B = AB^2. \text{ Пусть } \angle AO_2B = \alpha =$$

$$\Rightarrow 49x^2 + r_2^2 + x^2 + r_2^2 - 2 \sqrt{(49x^2 + r_2^2)(x^2 + r_2^2)} \cos \alpha = 64x^2$$

$$2r_2^2 - 2\sqrt{49x^2 + 50x^2r_2^2 + r_2^4} \cos \alpha = 14x^2. \quad | : 2$$

$$\text{т.к. } r_2 = 1$$

$$1 - \sqrt{49x^2 + 50x^2 + 1} \cos \alpha = 7x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - 7x^2}{\sqrt{49x^2 + 50x^2 + 1}}$$

Продолжение см. на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $\angle AOB = \frac{\widehat{AB}}{2}$; $\angle AOB = \widehat{AOB}$, но $\widehat{AB} + \widehat{AOB} = 360^\circ \Rightarrow \angle AOB = 360^\circ - 2\angle AOB = 360^\circ - 2\alpha$.

6) $\cos \angle AOB = \cos(360^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2 - (1 - 7x^2)^2}{49x^4 + 50x^2 + 1} - 1 = \frac{2 + 98x^4 - 28x^2}{49x^4 + 50x^2 + 1} - 1 =$
 $= \frac{99x^4 - 78x^2 + 1}{49x^4 + 50x^2 + 1}$

7) По теореме кос для $\triangle AOB$:

$$AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB = AB^2. \text{ Так } AO = BO = r, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha = 64x^2$$

$$r^2 - r^2 \cos 2\alpha = 64x^2. \text{ По условию } r = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 - 25(99x^4 - 78x^2 + 1)}{49x^4 + 50x^2 + 1} = 64x^2$$

$$64 \cdot 49x^6 + 64 \cdot 50x^4 + 64x^2 + 25 \cdot 98x^4 - 25 \cdot 78x^2 + 25 - 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 50x^2 - 25 = 0$$

$$32 \cdot 49x^6 + 32 \cdot 50x^4 + (32 - 25 \cdot 78 - 25 \cdot 50)x^2 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 98 = 0$$

Пусть $y = x^2 \Rightarrow y \geq 0$.

$$49y^2 + 50y - 98 = 0$$

$$D = 21504$$

$$\sqrt{D} = 148$$

$$y_1 = \frac{-148 - 50}{98} < 0 \text{ — не подходит}$$

$$y_2 = \frac{148 - 50}{98} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x^2 = 1, \text{ так } x > 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)} - (2 - 2x) = 2 - 2x$$

Пусть $y = 2x^2 - 5x + 3$, $z = 2 - 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{y - z} = z$$

$$y + y - z - 2\sqrt{y(y - z)} = z^2$$

$$2y - z^2 - z = 2\sqrt{y(y - z)}$$

$$4y^2 + z^4 + z^2 - 4yz^2 - 4yz + 2z^3 = 4y^2 - 4yz$$

$$z^4 + 2z^3 + (1 - 4y)z^2 = 0$$

$$z^2(z^2 + 2z + 1 - 4y) = 0$$

$$(2 - 2x)^2(4 + 49x^2 - 28x + 4 - 14x + 1 - 8x^2 + 20x - 12) = 0$$

$$(2 - 2x)^2(41x^2 - 22x - 3) = 0$$

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{2} \Rightarrow \text{так } z = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$\sqrt{D} = 4\sqrt{61}$$

$$x_2 = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_3 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

Значит, что $2x^2 - 5x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$. $2x^2 + 2x + 1 > 0$ всегда.

Но при этом $1 < \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$. Оставшиеся корни подходят.

Ответ: $\left\{ \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}; \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

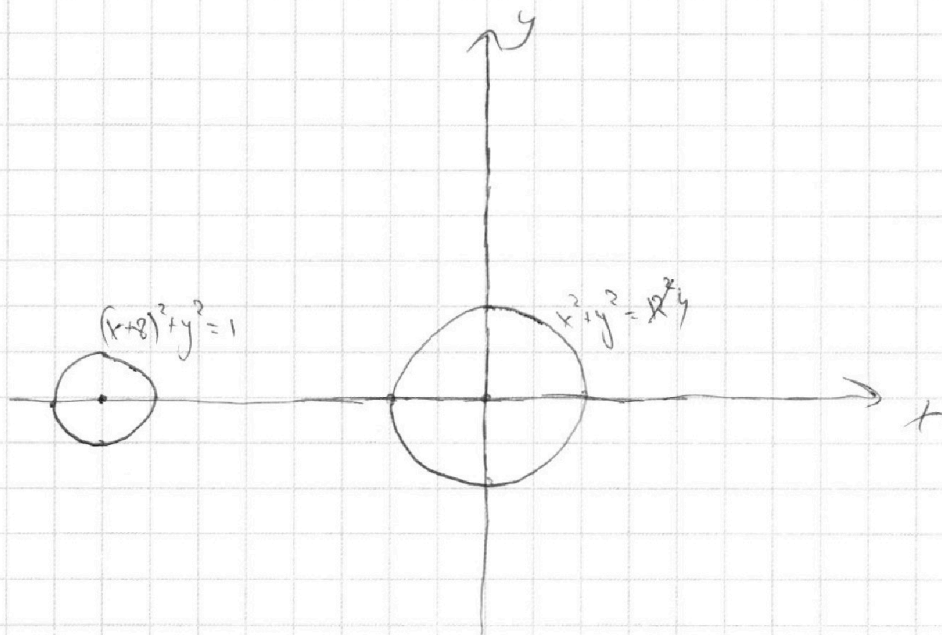
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Построим графики функций $(x+2)^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4$. Это окружности:



Заметим, что неравенство верно, когда точка лежит внутри одной окружности и вне другой. Т.к. окружности не касаются, то это верно при всех x и y . Т.е. у неравенства $((x+2)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ бесконечно много решений, и оно всегда верно $\Rightarrow$ на количество решений оно не влияет. У функции $y = ax + b$ бесконечно много решений, т.к. $y = ax + b$ — прямая. Таким образом, при любых a и b данная система имеет бесконечно много решений, т.е. 2 решения не будет ни при каких a .

Ответ: $\emptyset$.



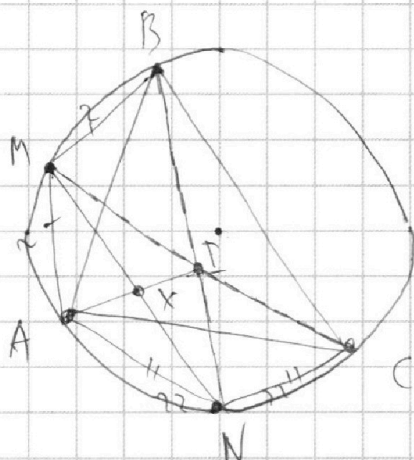
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}, \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NC}$$

$$h_1 = 7,5; h_2 = 2$$

$AI = ?$

Решение:

1) Пусть h_1 - расстояние от M до AB - или же высота из M $\triangle AMB$; h_2 - аналогично высота из N в $\triangle ANC$.

2) Пусть I - пересечение CM и BN. $\angle ABN = \frac{\overset{\frown}{AN}}{2}$, $\angle CBN = \frac{\overset{\frown}{CN}}{2}$, но $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{CN}$

$\Rightarrow \angle ABN = \angle CBN \Rightarrow BN$ - биссектриса угла $\angle ABC$. Аналогично CM - биссектриса $\angle ACB$.

Центр вписанной окр. - точка пересеч. бисс. $\Rightarrow I$ - центр впис. окр. $\triangle ABC \Rightarrow$ нам необходимо найти AI .

3) Т.к. $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow AM = MB = a$; Аналогично $AN = CN = b$. Пусть $\angle BCM = \angle ACM = \alpha$; $\angle ABN = \angle CBN = \beta$.

4) $\triangle AMB$ - впис. $\Rightarrow$ по св-ву впис. центр: $\angle MAB = \angle MCB = \alpha$. Но $\angle MCB = \angle MAB = \alpha$ ($\triangle AMB$ - р/б.). Аналогично $\angle BAC = \angle BCA = \beta$.

5) Выпишем пары равных вписанных углов, опирающихся на одну дугу:
 $\angle AMN = \angle ABN = \beta$; $\angle CMA = \angle CBN = \beta$; $\angle ANM = \angle ACM = \alpha$; $\angle MNB = \angle MCB = \alpha$.

6) По теореме синусов формуле площади для $\triangle ABM$.

$$S = \frac{a^2 \sin(180^\circ - 2\alpha)}{2} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2} \quad \text{с другой стороны } S = \frac{AB \cdot h_1}{2}$$

CM. продолжение



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)

$$a^2 \sin 2\alpha = AB \cdot h_1$$

По теореме синусов в $\triangle AMB$:

$$\frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow AB = \frac{a \sin 2\alpha}{\sin \alpha}$$

1)

$$\frac{a^2 \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a \sin 2\alpha \cdot h_1}{\sin \alpha} \Rightarrow a \sin 2\alpha = h_1$$

Аналогично из $\triangle ANC$:

$$b \sin \beta = h_2$$

2) $\triangle MAN = \triangle MIN$ по II уп. ($\angle AMN = \angle INM = \beta$; $\angle ANM = \angle INM = \alpha$; MN - общ.) $\Rightarrow AM = IN$;

$AN = IN \Rightarrow AMIN$ - ромб $\Rightarrow AI \perp MN$ и $AX = IX$.

3) По теореме синусов в $\triangle MAX$:

$$\frac{AX}{\sin \beta} = \frac{AM}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AX = a \sin \beta$$

Аналогично из $\triangle NAX$:

$$\frac{AX}{\sin \alpha} = \frac{AN}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AX = b \sin \alpha$$

Из двух полученных равенств следует: $AI = 2a \sin \beta = 2b \sin \alpha \Rightarrow AI^2 = 4ab \sin \alpha \sin \beta$,

$$\text{но } a \sin 2\alpha = h_1; b \sin \beta = h_2 \Rightarrow AI^2 = 4h_1 h_2 = 36 \Rightarrow AI = 6.$$

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+b)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = ax + 10b$$

$$((x+b)^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1)(x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4) \leq 0$$

$$((a^2+1)x^2 + (20ab+16)x + (100b^2+6))((a^2+1)x^2 + 20abx + (100b^2-4)) \leq 0$$

$$y = (a^2+1)x^2 + 20abx + (100b^2-4)$$

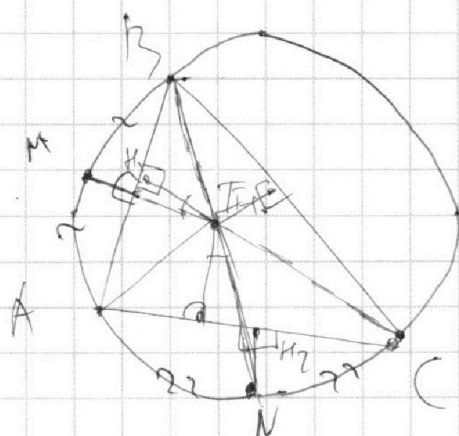
$$y(y+16x+62) \leq 0$$

$$D = (20ab+16)^2 - 4(a^2+1)(100b^2+6) = 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 4a^2b^2 - 252a^2 - 400b^2 - 252 = 640ab - 252a^2 - 400b^2 + 4$$

$$MH_1 = 9,5$$

$$MH_2 = 2$$

AI - ?



CM и BN — бисс. перес.
I — их точка перес.

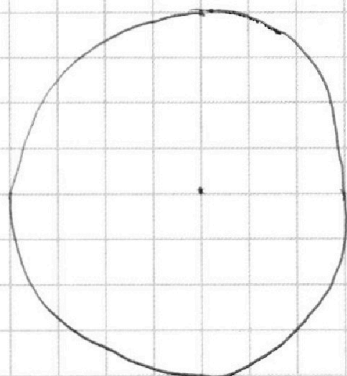
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Зеркало

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ м}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \text{ н}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \text{ к}$$

$$abc = 2^{51} \cdot 7^{64} \text{ ммк.}$$

2. *конкретно 26 чисел*
 $a+c \rightarrow 20$

x, y, z - числами 2
 a, b, c

$$\begin{aligned} x+y &\geq 14 \\ y+z &\geq 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \cdot a &\rightarrow 2^9 \\ y \cdot b &\rightarrow 2^5 \\ y \cdot c &\rightarrow 2^2 \end{aligned}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{27}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$\min abc = ?$

$$2^{20} \cdot 7^{37} = ?$$

$$a \rightarrow 7^{10}$$

$$b \rightarrow 7^{27}$$

$$c \rightarrow 7^0$$

$$a \rightarrow$$

$$c \rightarrow$$

$$b \rightarrow 2^0$$

$$b = 1$$

$$a = 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ м}$$

$$c = 2^{17} \cdot 7^{17} \text{ н}$$

$$ac = 2^{30} \cdot 7^{37} \text{ к}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{z} - \sqrt{y-z} = y$$

черновик

$$z + y - z - 2\sqrt{z(y-z)} = y^2$$

$$2\sqrt{z(y-z)} = 0$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2-7x - 2x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x - 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 2x - 1 \\ z = 2 - 7x \end{cases}$$

$$y - y^2 = 2\sqrt{z(y-z)}$$

$$y^4 - 2y^3 + y^2 = 4yz - 4z^2$$

$$y^4 - 2y^3 + (2z - y)^2 = 0$$

$$y^3(y-z) + (2z-y)^2 = 0$$

$$(2x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 2x - 1) = 4x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 2x^2 + 2x + 1 = 4x^5 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$$

$$(4x^5 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1)(2x^2 + 2x - 1) = 8x^6 + 8x^5 + 4x^4 + 16x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 16x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 2x^2 + 2x - 4x^5 - 8x^3 - 8x^2 - 4x - 1 = 8x^6 + 24x^5 + 36x^4 + 32x^3 + 18x^2 + 6x + 1$$

$$(8x^6 + 24x^5 + 36x^4 + 32x^3 + 18x^2 + 6x + 1)(2x^2 + 2x - 1) + (4 - 4x - 2x^2 - 2x - 1)^2 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x - 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{y-z} = z$$

$$y + y - z - 2\sqrt{y(y-z)} = z^2$$

$$2y - z - z = 2\sqrt{y(y-z)}$$

$$4y^2 + 2y - z - 4yz - 4y^2 + 4z^2 = 4y^2 - 4yz$$

$$y = 2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 + 2x - 1 = y - z$$

$$z = 2 - 7x$$

$$\begin{array}{r} 1045 \\ 115 \end{array} \Bigg| 9$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 20 \\ \hline 820 \\ 1045 \end{array}$$

$$2^4 2^3 + 2^2 - 4y^2 = 0$$

$$2^2 + 2 + (1-y)^2 = 0$$

$$4 + 49x^2 - 28x + 2 - 7x + 1 - 8x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$41x^2 - 15x - 5 = 0$$

$$D = 225 + 820 = 1045$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

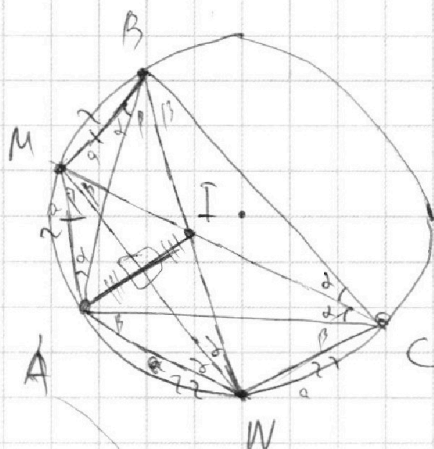
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик



AI - ?

$$S = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha}$$

$$c = \frac{a \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2a \cos \alpha$$

$$\frac{a \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\gamma} = \frac{2 \cos \alpha \cdot a \cdot h}{\gamma}$$

$$a \sin \alpha = h_1$$

$$b \sin \beta = h_2$$

$$\frac{\frac{AI}{2}}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin 90^\circ}$$

$$AI = 2a \sin \beta$$

$$AI = 2b \sin \alpha$$

$$AI^2 = 4h_1 h_2 = 8 \cdot 4,5 = 36 \Rightarrow AI = 6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

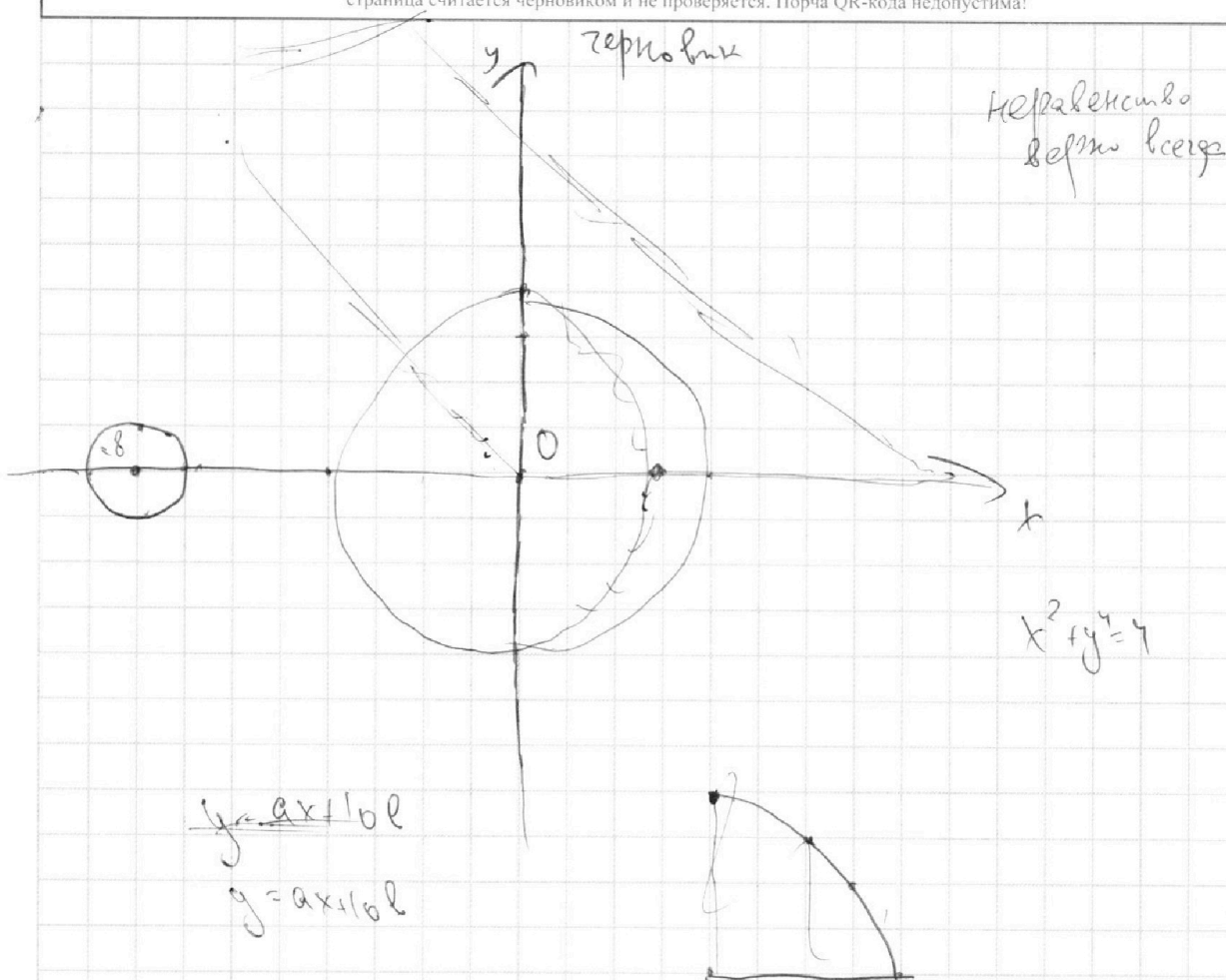
5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2-2x+1} = 2-2x$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{(2x^2-5x+3)+(2-2x)} = 2-2x$$

$$y = 2-2x$$

$$z = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{z} - \sqrt{y+z} = y$$

$$z+y+z-2\sqrt{z(y+z)} = y^2$$

$$y-y^2+2z = 2\sqrt{z(y+z)}$$

$$y^2+y^4-4z^2-2y^3+4yz-4y^2z = 4yz+4z^2$$

$$4y^2z = y^4-2y^3+y^2$$

$$z = \frac{y^2-2y+1}{4}$$

$$4z = (y-1)^2$$

$$4(2x^2-5x+3) = (2-2x-1)^2$$

$$8x^2-20x+12 = 1+4x^2-4x$$

$$41x^2+6x-11=0$$

$$D = 36+1804 = 1840$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{1840}}{82} = \frac{-4\sqrt{115} - 6}{82} = \frac{-2\sqrt{115} - 3}{41}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{1840} - 6}{82} = \frac{2\sqrt{115} - 3}{41}$$

$$\frac{2\sqrt{61}+11}{41} > \frac{3}{2}$$

$$\frac{4\sqrt{61}+22-341}{82} < 0$$

$$2x^2-5x+3 = 0$$

$$D = 25-24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$< 1 \text{ или } > \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 812 \\ 22 \\ + 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$(1-2x)^2$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 41 \\ \hline 44 \\ 176 \\ \hline 1804 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ + 494 \\ \hline 986 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1890 \\ - 460 \\ \hline 1430 \\ 73 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ 244 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$4\sqrt{61} - 101$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-2x$$

переносим

$$2x^2-5x+3=0$$

$$D=25-24=1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$\sqrt{(2x-3)(x+1)} -$$

$$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1 - 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 4+4x^2-28x$$

$$x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$45x^2 - 75x + 2\sqrt{4x^2-6x^3-7x^2+x+3} = 0$$

$$2025x^4 + 625x^2 - 2250x^3 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$2x^2-5x+3 = (2x-3)(x-1)$$

$$2x^2+2x+1$$

$$D=4-8$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 50 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) =$$

$$\begin{array}{r} 2250 \\ 24 \\ \hline 2226 \end{array}$$

$$= 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x +$$

$$+ 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x + 3$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 50 \\ \hline 225 \\ 2025 \\ \hline 2226 \end{array}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$(0;0)$$

$$2x_1 + y_2 = 12$$

$$(x_1, y_1) = \text{const}$$

$$y_2 = -2x_1 + (y_1 + 12)$$

$$(0;12)$$

$$(1;10)$$

$$(2;8)$$

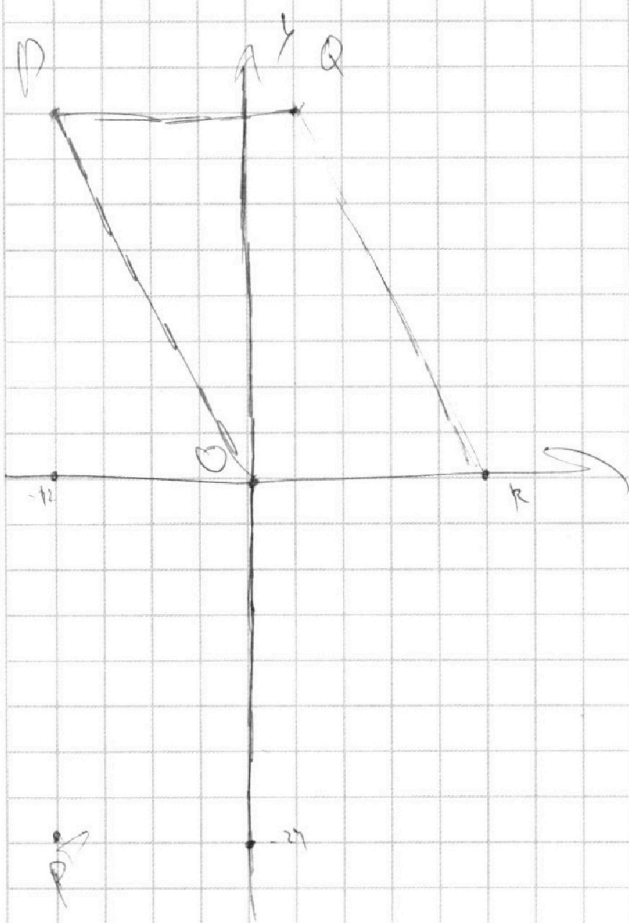
$$(3;6)$$

$$(4;4)$$

$$(5;2)$$

$$(6;0)$$

матрица



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \alpha = \frac{1 - x^2}{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}} \quad \text{черновик}$$

$$\angle AOB = 360^\circ - 2\alpha$$

$$\cos \angle AOB = \cos(360^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2(1 - x^2)^2}{49x^4 + 50x^2 + 1} - 1 =$$

$$= \frac{2 + 98x^2 - 78x^2 - 49x^2 - 50x^2 - 1}{49x^4 + 50x^2 + 1} = \frac{49x^2 - 78x^2 + 1}{49x^4 + 50x^2 + 1}$$

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\alpha = 64x^2$$

$$50 - 50 \cos 2\alpha = 64x^2$$

$$25 - 25 \cos 2\alpha = 32x^2$$

$$25 - \frac{25(49x^4 - 78x^2 + 1)}{49x^4 + 50x^2 + 1} = 32x^2$$

$$32 \cdot 49x^4 + 32 \cdot 50x^2 + 32x^2 + 25 \cdot 49x^4 - 75 \cdot 78x^2 + 25 - 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 50x^2 - 25 = 0$$

$$32 \cdot 49x^4 + 82 \cdot 50x^2 + 32 \cdot 50x^2 + (32 - 25 \cdot 78 - 25 \cdot 50)x^2 = 0$$

$$32 \cdot 49x^4 + 32 \cdot 50x^2 + (32 - 25 \cdot 128)x^2 = 0 \quad \rightarrow 32$$

$$49x^4 + 50x^2 + (1 - 25 \cdot 4)x^2 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$y = x^2$$

$$49y^2 + 50y - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 19907 = 21907$$

$$\sqrt{D} = 148$$

$$y = \frac{148 - 50}{98} = 1 \quad \rightarrow$$

$$x = 1 \Rightarrow AB = 8$$

$$\begin{array}{r} 21907 \\ 5426 \overline{) 21907} \\ 1389 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3564 \\ 1524 \overline{) 3564} \\ 9464 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19404 \\ 2500 \overline{) 19404} \\ 21907 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 37 \overline{) 37} \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 111 \overline{) 111} \\ 369 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $a, b, c \in \mathbb{N}$

$\min abc = ?$

рекуррент

$ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot n$

$a^2 b^2 c^2: 2^{14} \cdot 7^{20} \cdot 7^{10} \cdot 7^{17} \cdot 7^{37} \cdot mnk = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk$

$bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot m$

$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk}$

$ac: 2^{20} \cdot 7^{32} \cdot k$

$c: 2^{20} \cdot$

$m=2; n=1; k=1$

$a=2^{14} \cdot$

$b=2^0 \cdot$

$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} = 2^{26} \cdot 7^{32}$

2) $\text{НОД}(a, b) = 1$

$a, b \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

$\max m \in \mathbb{N}: \frac{a+b}{m} \in \mathbb{N}; \frac{a^2 - 6ab + b^2}{m} \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$\text{НОД}(8ab; (a+b))$

$\text{НОД}(a; a+b) = 1$

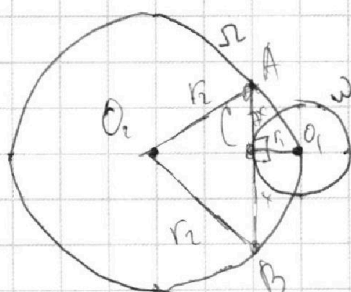
$\text{НОД}(b; a+b) = 1$

$\text{НОД}(a, a+b) = 1; 2; 4 \text{ и т.д. } \textcircled{8}$

$m=8$

$\text{Знаменатель}(a+b): 8$

3)



$AC: (B=7)$

$AB=?$

$r_1=1; r_2=5$

$AO_1 = \sqrt{49x^2 + r_1^2}$

$BO_2 = \sqrt{x^2 + r_2^2}$

$AO_1^2 + BO_2^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot BO_2 \cdot \cos \alpha = AB^2$

$49x^2 + r_1^2 + x^2 + r_2^2 - 2\sqrt{49x^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{x^2 + r_2^2} \cdot \cos \alpha =$
 $= 64x^2$

$2r_1^2 - 2\cos \alpha \sqrt{49x^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{x^2 + r_2^2} = 14x^2$

$1 - \cos \alpha \sqrt{49x^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{x^2 + r_2^2} = 7x^2$

$1 - \cos \alpha \sqrt{49x^2 + 50x^2 + r_1^2} = 7x^2$

$\angle AOB = ?$