



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : d^{15} 7^{11} \Rightarrow ab = 2^{15} 7^{11} x, \quad x \in \mathbb{N}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18} \Rightarrow bc = 2^{17} 7^{18} y, \quad y \in \mathbb{N}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39} \Rightarrow ac = 2^{23} 7^{39} z, \quad z \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &= ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 2^{17} \cdot 2^{23} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39} x y z = \\ &= 2^{45} \cdot 7^{68} x y z \end{aligned}$$

$(2, 7) = 1$. Очевидно, $abc \rightarrow \min$ при

$x, y, z \rightarrow \min$. $x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow \min(x) = \min(y) = \min(z) = 1$.

$$\begin{aligned} (abc)^2 &= 2^{45} \cdot 7^{68} \cdot x y z \Rightarrow abc = 7^{34} \sqrt{2^{45} x y z} = \\ &= 7^{34} \cdot 2^{22} \sqrt{2 x y z}. \end{aligned}$$

Очевидно, если $x = y = z = 1$, то abc будет иррациональным \Rightarrow какое-то из чисел > 1 . Минимальное число $\in \mathbb{N} > 1$ это 2.

$$\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 2 \text{ — рациональное} \Rightarrow x > 2, y \geq 1, z \geq 1.$$

$$abc = 7^{34} \cdot 2^{22} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 7^{34} \cdot 2^{23}$$

Ответ: $7^{34} \cdot 2^{23}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$\frac{a}{b}$ — несократимая $\Rightarrow (a, b) = 1$ ($(a, b) = \text{НОД}(a, b)$)

Пусть $a + b =$

Докажем, что $m = 9$ подходит.

$$a + b = 9x \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + 2ab = 81x^2$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = 9y \quad ((x, y) = 1)$$

$$\Downarrow$$

$$81x^2 - 9ab = 9y, \quad 9x^2 - ab = y$$

Допустим, $\exists m > 9: m = 9 + n \quad (n \geq 1)$

$$a + b = (9 + n)x \quad (x \in \mathbb{Z})$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = (81 + 18n + n^2)x^2, \quad a^2 + b^2 - 7ab = (9 + n)y$$

$$(81 + 18n + n^2)x^2 - 9ab = (9 + n)y$$

$$81x^2 + 18nx^2 + n^2x^2 - 9ab = 9y + ny$$

$$81x^2 + 18nx^2 - 9ab + n^2x^2 - ny = 9y$$

$$\Downarrow$$

$$n(n^2x^2 - y) = 9$$

$$(9 + n)^2x^2 - 9ab = (9 + n)y$$

$$\Downarrow$$

$$: 9 + n$$

$$9ab : 9 + n \Rightarrow 9ab \equiv 0 \equiv 9 + n$$

$$9ab = (9 + n)k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$9ab = 9k + nk \Rightarrow nk = 9$$

$$9(ab - 1) \equiv n$$

$$9(ab - 1) \equiv n - 9 - n = -9 \Rightarrow ab - 1 \equiv -1 \Rightarrow ab \equiv 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$ab \equiv 0 \pmod{g+n} \Rightarrow ab = (g+n)k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(g+n)k}{b^2} \quad \frac{b}{a} = \frac{(g+n)k}{a^2}$$

\downarrow \downarrow
целое целое

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & ((g+n)k; a^2; b^2) = 1 \\ & \leftarrow ((g+n)k; a; b) = 1 \end{aligned}$$

$y = (g+n)k$, a и b не имеют общ. множителя \Rightarrow

~~$ab = (g+n)k$~~

$ab \neq (g+n)k$

Противоречие.

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

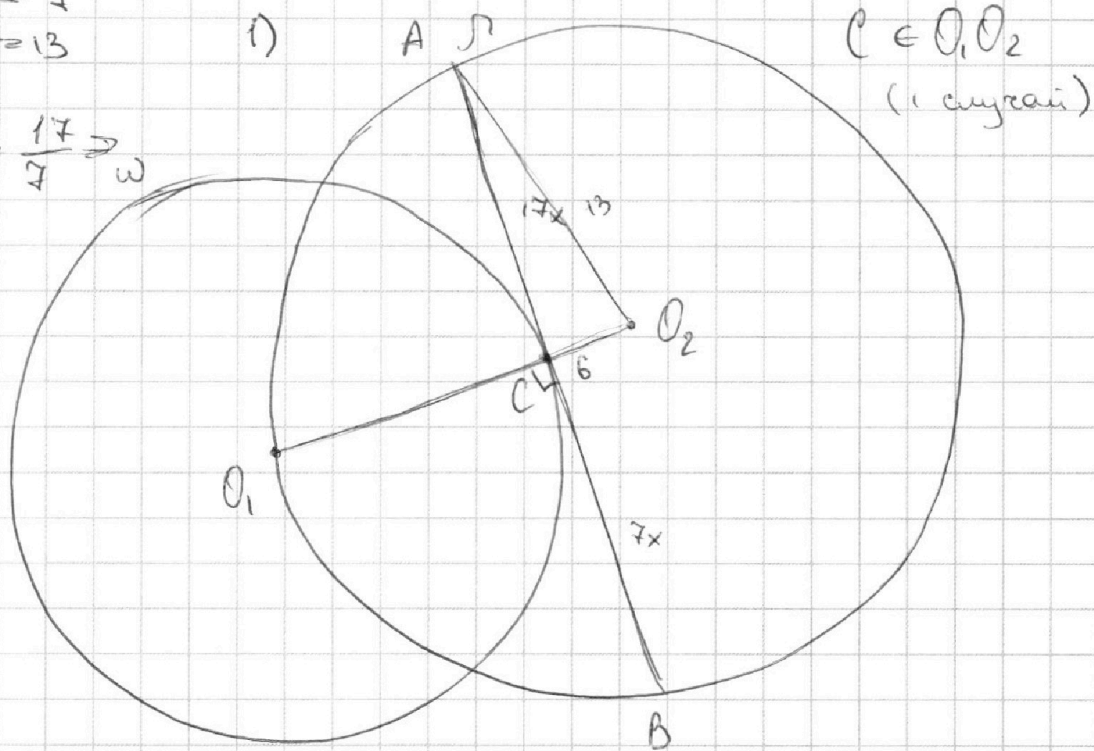
$$R(\omega) = 4$$

$$R(\Omega) = 13$$

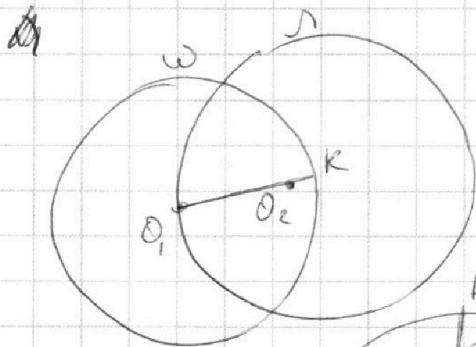
$$\frac{AB \cdot AC}{CB} = \frac{17}{7} \Rightarrow \omega$$

$$AC = 17x,$$

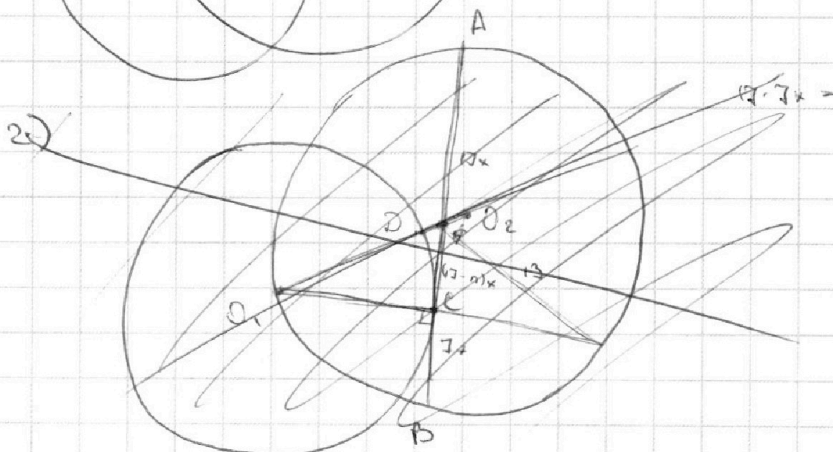
$$CB = 7x$$



Докажем, что такого расположения быть не может.



В таком случае $O_1 O_2 = R(\Omega) = 13$, $O_1 K = R(\omega) = 4$,
 $O_2 O_1 + O_2 K = O_1 K \Rightarrow 13 + O_2 K = 4 \Rightarrow O_2 K \leq -9$ — невозможно.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

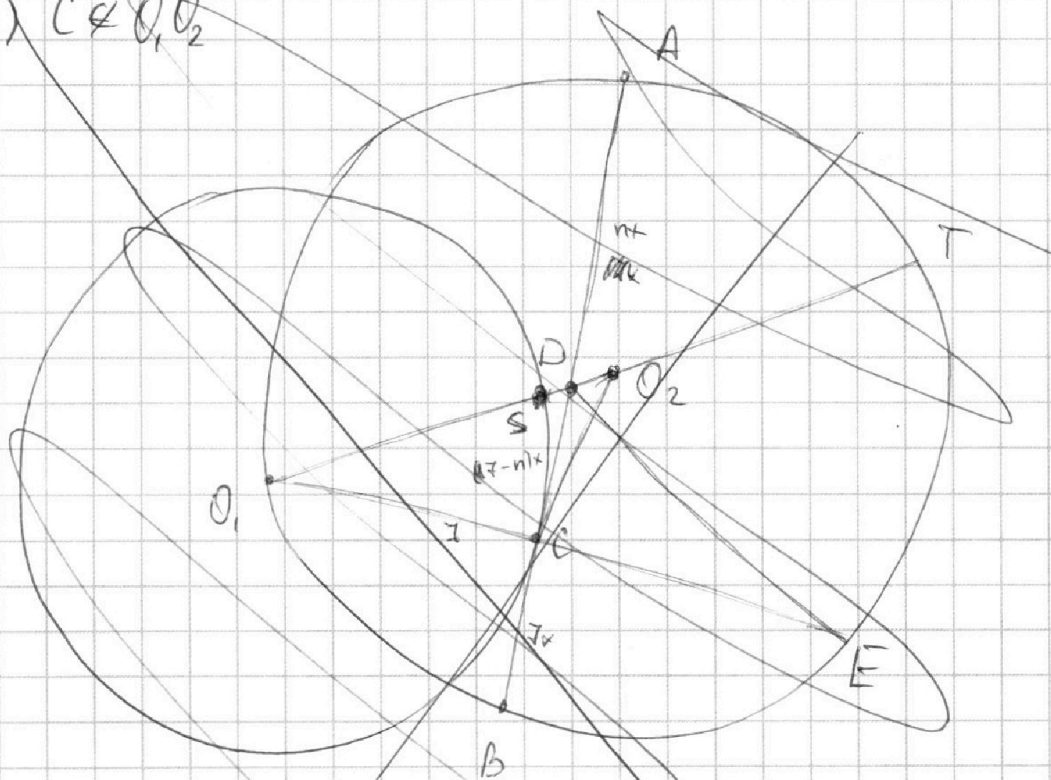
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

по св-ву окр-ти радиусе \perp касательной \Rightarrow
 $O_1C \perp AB$. $O_1C = R(\omega) = 7$, $O_1O_2 = R(\lambda) = 13 \Rightarrow$
 $O_2C = O_1O_2 - O_1C = 13 - 7 = 6$. $O_2A = R(\lambda) = 13$, По
 м. Пифагора $AC = 17x = \sqrt{13^2 - 6^2} = \sqrt{(13-6)(13+6)} =$
 $= \sqrt{7 \cdot 19} = \sqrt{133} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{133}}{17}$. $AB = 17x + 7x = 24x$.
 $AB = \frac{\sqrt{133} \cdot 24}{17} = \frac{24\sqrt{133}}{17}$

2) $C \notin O_1O_2$



Пусть $DC = (17-n)x$. По св-ву \perp хорд

$$AC \cdot CB = O_1C \cdot CE \Rightarrow 17 \cdot 7x^2 = 7 \cdot CE \Rightarrow 17x^2 = CE$$

$R(\omega) = 7$

$O_1E \perp AB$, т.к. AB — касательная

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad 49 + 289x^2 - 338 + 338 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$$

$$-289 + 289x^2 + \frac{338x^2 - 338}{x^2 + 1} = 0$$

$$-289(x^2 + 1) + 289(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 338(x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(289x^2 + 289 + 338) = 0$$

$$x^2 = 1 \\ x = 1$$

$$x^2 = -\frac{627}{289} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

Значит, $x = 1$.

$$AB = 24x = 24.$$

$$\text{Ответ: } 24; \frac{24\sqrt{133}}{17}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

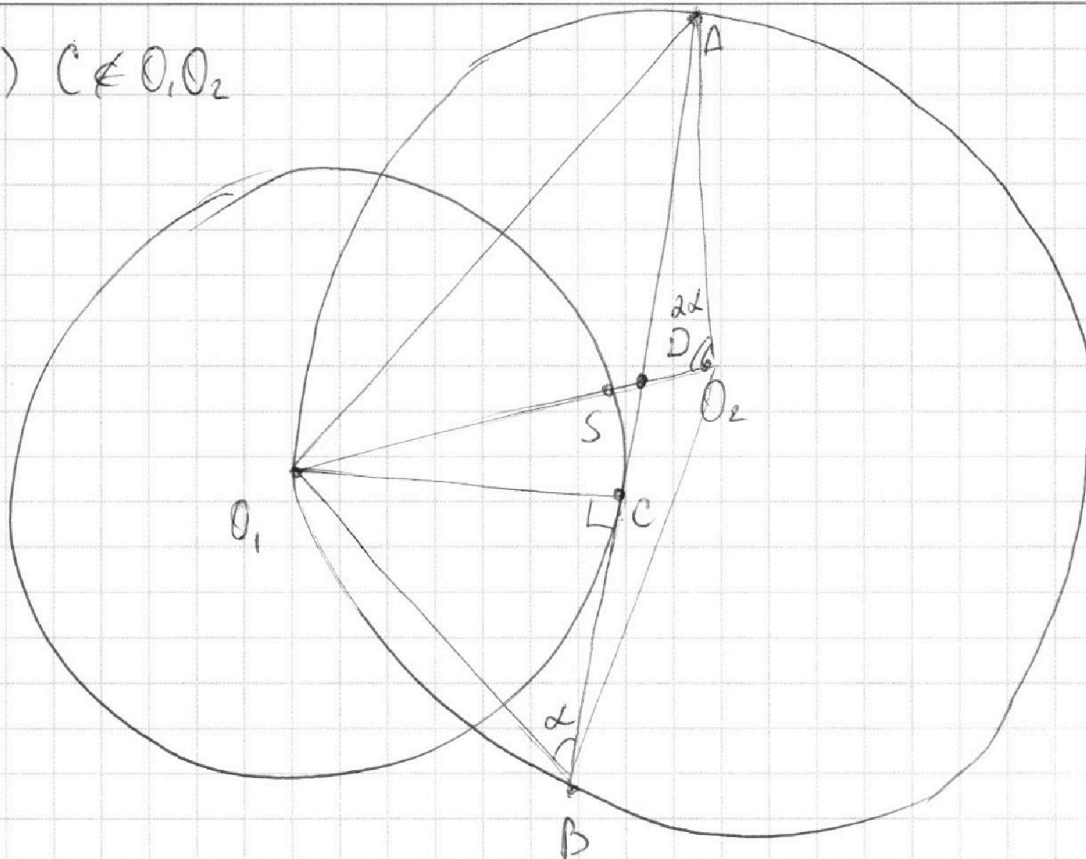
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.
2) $C \in O_1 O_2$



$$AC = 17x, \quad CB = 7x,$$

$O_1 C \perp AB$ (AB — кас.; $O_1 C$ — радиус) \Rightarrow
по т. Пифагора:

$$O_1 A = \sqrt{O_1 C^2 + AC^2} = \sqrt{7^2 + 17^2 x^2}; \quad O_1 B = \sqrt{O_1 C^2 + BC^2} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$\angle O_1 B A = \alpha$ — впис.; $\angle O_1 O_2 A = 2\angle O_1 B A = 2\alpha$ — центральный.

по т. косинусов $O_1 A^2 = O_1 O_2^2 + O_2 A^2 - 2 \cdot O_1 O_2 \cdot O_2 A \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow$

$$7^2 + 17^2 x^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

в $\triangle O_1 B C$:

$$\sin \alpha = \frac{O_1 C}{O_1 B} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow \cos 2\alpha =$$

$$= 1 - \frac{2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$49 + 289x^2 = 338 - 338 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{ОДЗ: } 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0 \Rightarrow$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \text{ всегда}$$

$$\text{Заметим, что } 3x^2 - 6x + 2 - (1 - 9x) = 3x^2 + 3x + 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = a, \quad 3x^2 + 3x + 1 = b \Rightarrow 1 - 9x = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\text{Пусть } \sqrt{a} = c, \quad \sqrt{b} = d \Rightarrow a - b = c^2 - d^2$$

$$c - d = c^2 - d^2 \Rightarrow (c - d)(1 - c - d) = 0$$

$$(c - d)(c + d)$$

$$c = d \quad 1 = c + d$$

$$1) c = d \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$-6x + 3x + 2 - 1 = 0$$

$$-3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ОДЗ: } 3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 =$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 2 = \frac{1}{3} \geq 0.$$

возможно.

$$2) 1 = c + d \Rightarrow 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$1 = a + b + 2\sqrt{ab} \quad \sqrt{a} = 1 - \sqrt{b} \Rightarrow a = 1 + b - 2\sqrt{b}$$

$$2\sqrt{b} = 1 + b - a$$

$$\sqrt{b} = \frac{1 + b - a}{2}$$

$$b = \frac{(1 + b - a)^2}{4} \Rightarrow 4b = (1 + b - a)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.

$$4 \cdot (3x^2 - 3x + 1) = (1 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 6x - 2)^2 =$$
$$= 4 \cdot 9x^2$$

$$12x^2 - 3x + 1 = 9x^2 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

$D < 0 \Rightarrow$ нет корней.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

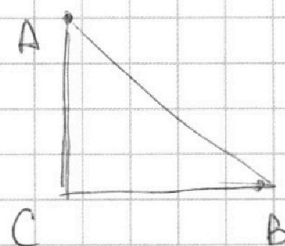
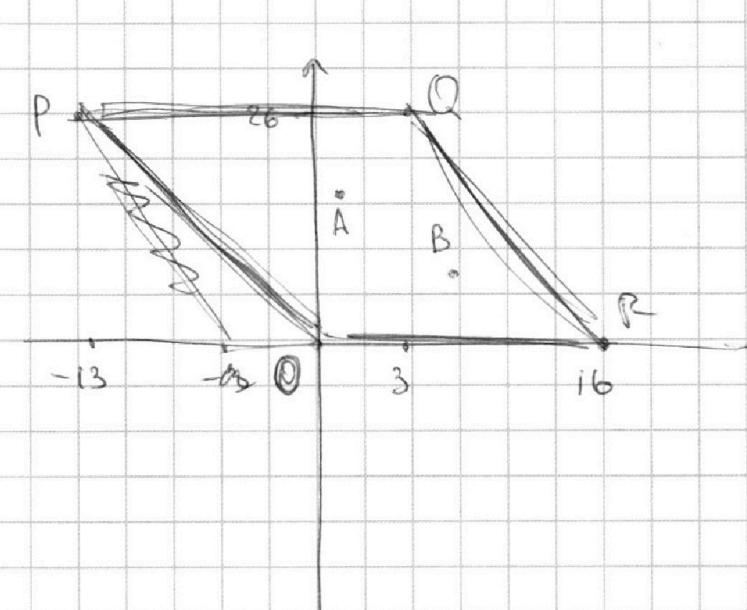
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$AC = y_2 - y_1 \quad BC = x_2 - x_1$$

$$2BC + AC = 14 \Rightarrow AC = 14 - 2BC$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{14 - 28BC + 4BC^2 + BC^2} =$$
$$= \sqrt{14 - 28BC + 5BC^2}$$

$$0 \leq AC \leq 26; \quad 0 \leq BC \leq 16.$$

$$\Downarrow$$
$$0 \leq AB \leq \sqrt{14 - 28 \cdot 16 + 5 \cdot 16^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

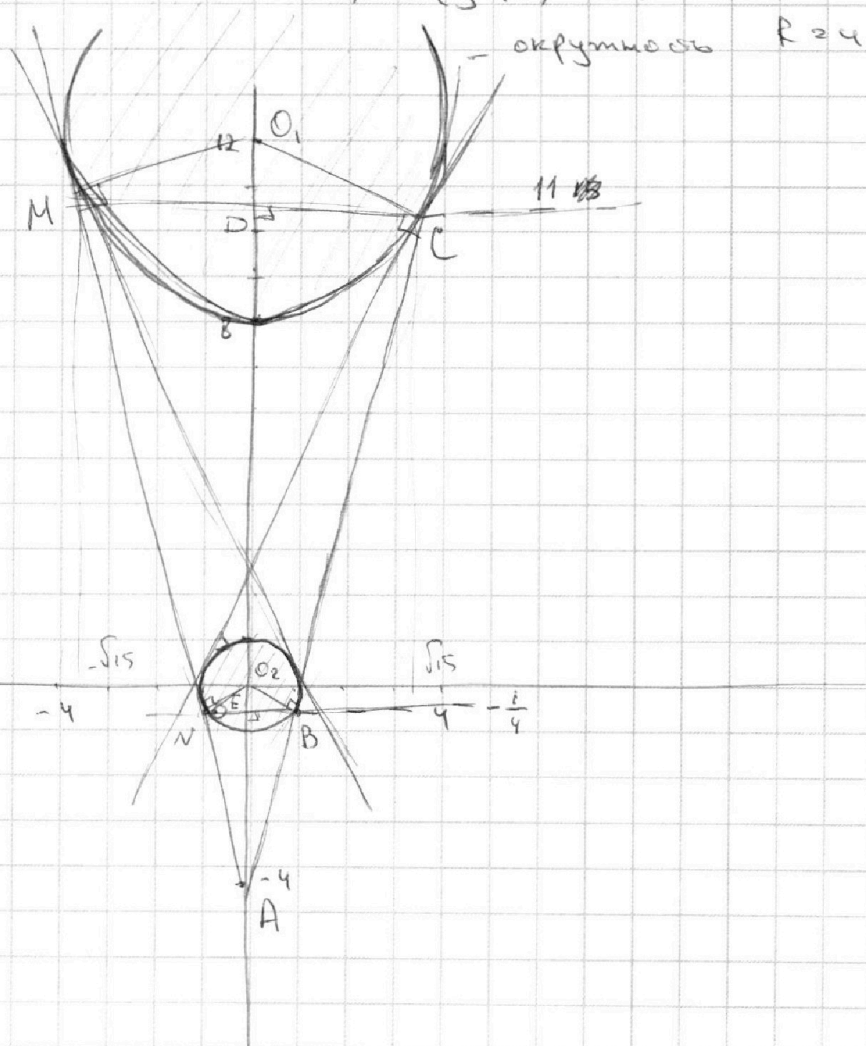
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax & \text{— график прямой} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2-е уравнение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 4^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 4^2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y(N) = 8b_1 - a_1 x(N)$$

$$y(M) = 8b_1 - a_1 x(M)$$

$$-\frac{1}{4} = 8b_1 + a_1 \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$11 = 8b_1 + a_1 \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$11 + \frac{1}{4} = a_1 \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4} \right)$$

$$\frac{45}{4} = a_1 \left(\frac{3\sqrt{15}}{4} \right)$$

$$a_1 = \frac{15 \cdot 45}{3\sqrt{15}} = \frac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

$$y(C) = 8b_2 - a_2 x(C)$$

$$y(B) = 8b_2 - a_2 x(B)$$

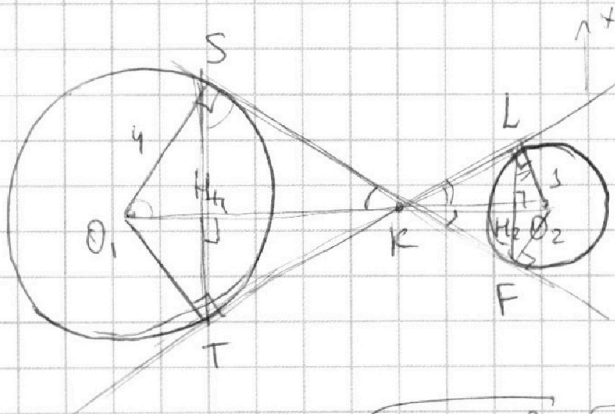
$$11 = 8b_2 - a_2 \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$-\frac{1}{4} = 8b_2 - a_2 \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$11 + \frac{1}{4} = -\sqrt{15} a_2 + \frac{\sqrt{15}}{4} a_2$$

$$\frac{45}{4} = \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \sqrt{15} \right) a_2 = -\frac{3\sqrt{15}}{4} a_2$$

$$a_2 = -\frac{45}{3\sqrt{15}} = -\frac{15}{\sqrt{15}} = -\sqrt{15}$$



нужно найти OH_1 и

$O_2 H_2$.

$O_1 S = 4, O_2 F = 5$

$\triangle O_1 S K \sim \triangle K F O_2 \Rightarrow$

$$\frac{O_1 S}{O_2 F} = \frac{4}{5} = \frac{O_1 K}{K O_2} \Rightarrow 4 K O_2 = O_1 K$$

$$K O_2 + K O_1 = O_1 O_2 = 12 \Rightarrow$$

$$5 K O_2 = 12, K O_2 = \frac{12}{5}, O_1 K = \frac{48}{5}$$

по т. Пифагора $SK = \sqrt{O_1 K^2 - O_1 S^2} = \sqrt{\frac{48^2}{25} - 4^2} = \sqrt{\frac{48^2 - 4 \cdot 20^2}{25}} = \frac{\sqrt{28 \cdot 68}}{5} = \frac{4\sqrt{119}}{5}$

$KF = \sqrt{K O_2^2 - O_2 F^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 5} = \frac{\sqrt{144 - 125}}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5}$

$\triangle O_1 S K \sim \triangle O_1 S H_1 \sim \triangle S H_1 K \Rightarrow \frac{S H_1}{H_1 K} = \frac{O_1 H_1}{S H_1} = \frac{O_1 S}{S K} = \frac{5}{\frac{4\sqrt{119}}{5}} \Rightarrow \sqrt{119} S H_1 = 5 H_1 K$

$\sqrt{119} O_1 H_1 = 5 S H_1 \Rightarrow 119 O_1 H_1 = 25 S H_1 \Rightarrow O_1 H_1 K = \frac{119}{25} O_1 H_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

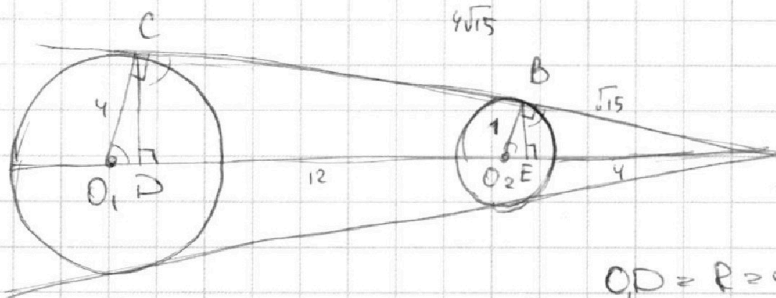
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



получившаяся совокупность дуг окружностей с двумя окр-тями $r=1$ и $R=4$. Позже, области внутри них (включая их самих) Такое уравнение может иметь 2 решения, если прямая $y=8b-ax$ — общая касательная. Рассмотрим внешние касательные.



O_1, O_2 — осн. получившегося угла. Нужно найти O_1D и O_2E .

$O_1D = R = 4, O_2E = r = 1.$

$\triangle AO_1E \sim \triangle AO_2B \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{O_2A}{O_1A} = \frac{O_2B}{O_1C} = \frac{1}{4}, O_1O_2 = 12 \Rightarrow$

$\frac{O_2A}{12 + O_2A} = \frac{1}{4} \Rightarrow O_2A = 4.$

По т. Пифагора для $\triangle O_2BA$

$\triangle O_1CA: AB = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}, AC = \sqrt{16^2-4^2} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15}$

$\triangle O_2BE \sim \triangle EBA: \frac{BE}{EA} = \frac{O_2E}{BE} = \frac{O_2B}{BA} = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow \sqrt{15}BE = EA, BE = \sqrt{15}O_2E = \sqrt{15}$

$\Rightarrow 15O_2E = EA \Rightarrow 15 \cdot \sqrt{15}O_2E = 16O_2E = 4 \Rightarrow O_2E = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$y(B) = y(N) = -\frac{1}{4}, M, B \in \text{окр. } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$

$x(B)^2 + \frac{1}{16} = 1 \Rightarrow x(B) = \frac{\sqrt{15}}{4}; x(N) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\triangle O_1CD \sim \triangle DCA \Rightarrow \frac{CD}{DA} = \frac{O_1D}{CD} = \frac{O_1C}{CA} = \frac{4}{4\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow$

$\sqrt{15}CD = DA, \sqrt{15}O_1D = CD \Rightarrow 15O_1D = DA, DA + O_1D = 16O_1D = O_1A$

$= 16 \Rightarrow O_1D = 1, DA = 15 \Rightarrow y(C) = y(M) = 11, C, M \in \text{окр.}$

$x^2 + (y-12)^2 = 16 \Rightarrow x(C)^2 + (11-12)^2 = 16, x(C) = 15 \Rightarrow x(C) = \sqrt{15}, x(M) = -\sqrt{15}$

Значит, если прямые $y = 8b_1 - a_1x$, сог. N и M

$y = 8b_2 - a_2x$, сог. C и B

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$O_{H_1} + H_1 K = O_2 K = \frac{48}{5} = O_1 H + \frac{119}{25} O_1 H = \frac{144}{25} O_1 H, \quad O_1 H = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$y(S) = y(T) = O_1 O_2 - O_1 H = 12 - \frac{5}{3} = \frac{36 - 5}{3} = \frac{31}{3}$$

Аналогично $\Delta K L H_2 \sim \Delta O_2 L H_2 \Rightarrow \frac{L H_2}{H_2 O_1} = \frac{K H_2}{L H_2} = \frac{K L}{L O_2} = \frac{K F}{L O_2} =$
 $(K L = K F)$
 $= \frac{\sqrt{119}}{5}$

$$5 L H_2 = \sqrt{119} H_2 O_2$$

$$5 K H_2 = \sqrt{119} L H_2$$

$$25 K H_2 = 119 H_2 O_2 \Rightarrow K H_2 = \frac{119}{25} H_2 O_2$$

$$H_2 O_2 + K H_2 = O_2 K = \frac{12}{5} = \frac{119 + 25}{25} H_2 O_2 = \frac{144}{25} H_2 O_2 \Rightarrow H_2 O_2 = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$y(L) = y(F) = \frac{5}{25}$$

$$S, T \in \mathbb{K} \quad x^2 + (y - 12)^2 = 16 \Rightarrow x(S) =$$

$$x(S)^2 + \left(\frac{31}{3} - \frac{36}{3}\right)^2 = 16 \Rightarrow x(S) = \sqrt{16 - \frac{25}{9}} = 12$$

$$x(T) = -12$$

$$L, F \in \mathbb{K} \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x(L) = \sqrt{1 - \frac{25}{225}} = -\frac{\sqrt{200}}{15} = -\frac{10\sqrt{2}}{15}$$

$$x(F) = -\frac{10\sqrt{2}}{15}$$

$$S, F \in \mathbb{K} \quad y = 8b_3 - a_3 x \Rightarrow y(S) = 8b_3 - a_3 x(S)$$

$$y(F) = 8b_3 - a_3 x(F)$$

$$\frac{31}{3} = 8b_3 - a_3 \cdot 12 \quad \frac{5}{25} = 8b_3 + a_3 \cdot \frac{10\sqrt{2}}{15}$$

$$\frac{5}{25} - \frac{31}{3} = a_3 \left(\frac{10\sqrt{2}}{15} + 12\right)$$

$$\frac{15 - 775}{75} = \frac{700}{75} = \frac{10(\sqrt{2} + 18)}{15} a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{70}{3(\sqrt{2} + 18)}$$

Аналогично:

$$y(L) = 8b_4 - a_4 x(L) \Rightarrow \frac{5}{25} = 8b_4 - a_4 \frac{10\sqrt{2}}{15} \rightarrow \frac{700}{75} = -\left(\frac{10\sqrt{2}}{15} + 12\right) a_4 \Rightarrow a_4 = -\frac{70}{3(\sqrt{2} + 18)}$$

$$y(T) = 8b_4 - a_4 x(T) \quad \frac{31}{3} = 8b_4 + 12a_4$$

Ответ: $\pm \frac{70}{3(\sqrt{2} + 18)}$; $\pm \sqrt{15}$.

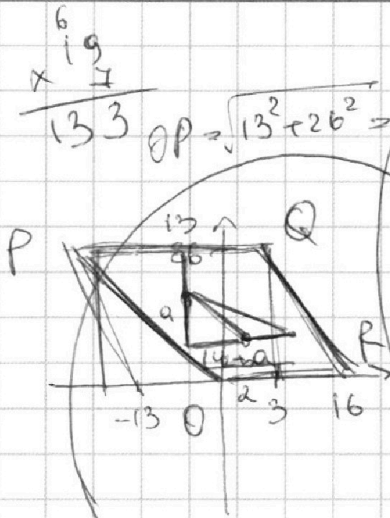
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + b = 18x$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = 18y$$

$$18x - 9ab = 18y$$

$$9ab : 18 \Rightarrow ab = 2$$

$$ab = 2k \quad (2k, a^2, b^2) = 1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2k}{b^2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2k}{a^2}$$

$$a + b = 9x$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 81x^2$$

$$a^2 + b^2 - 9ab = 9y$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{81x^2 - 7ab}{81x^2 - 7ab}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 81x^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab - 9ab = 81x^2 - 9ab = 9y$$

$$((g+n)k; b^2, a^2) = 1$$

$$a^2 + 4b^2 =$$

$$AB = a^2 + 14^2 - 28a + a^2 =$$

$$2a^2 + 14^2 - 28a$$

$$\frac{g+n}{z} k = 9ab$$

$$g = \frac{r}{z} k$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{mx}{my}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = \frac{mx}{my}$$

$$a+b - \frac{9ab}{a+b} = \frac{mx}{my}$$

$$a+b - \frac{mx}{my} = \frac{9ab}{a+b}$$

$$\frac{my(a+b) - mx}{my} = \frac{9ab}{a+b}$$

$$\frac{my}{m(ya+yb-x)} = \frac{1}{9b} + \frac{1}{9a}$$

$$ab : g+n$$

$$ab = (g+n)k$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(g+n)k}{b^2}$$

$$9ab \equiv 9 \cdot 0$$

$$g+n \equiv 9ab \Rightarrow n \equiv 9(ab-1)$$

$$-9 \equiv 9(ab-1) \Rightarrow -1 \equiv ab-1 \Rightarrow ab \equiv 0$$

$$a+b = (g+n)x = 9x + nx$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = (81 + 18n + n^2)x^2$$

$$a^2 + b^2$$

$$(81 + 18n + n^2)x^2 - 9ab = (g+n)y$$

$$81x^2 + 18nx^2 + n^2x^2 - 9ab = 9y + ny$$

$$81x^2 + 18nx^2 - 9ab + n^2x^2 - ny = 9y \Rightarrow n(nx^2 - y) : 9$$

$$(g+n)^2x^2 - 9ab = (g+n)y$$

$$9ab : g+n$$

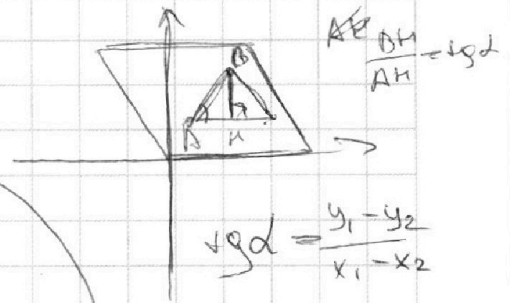
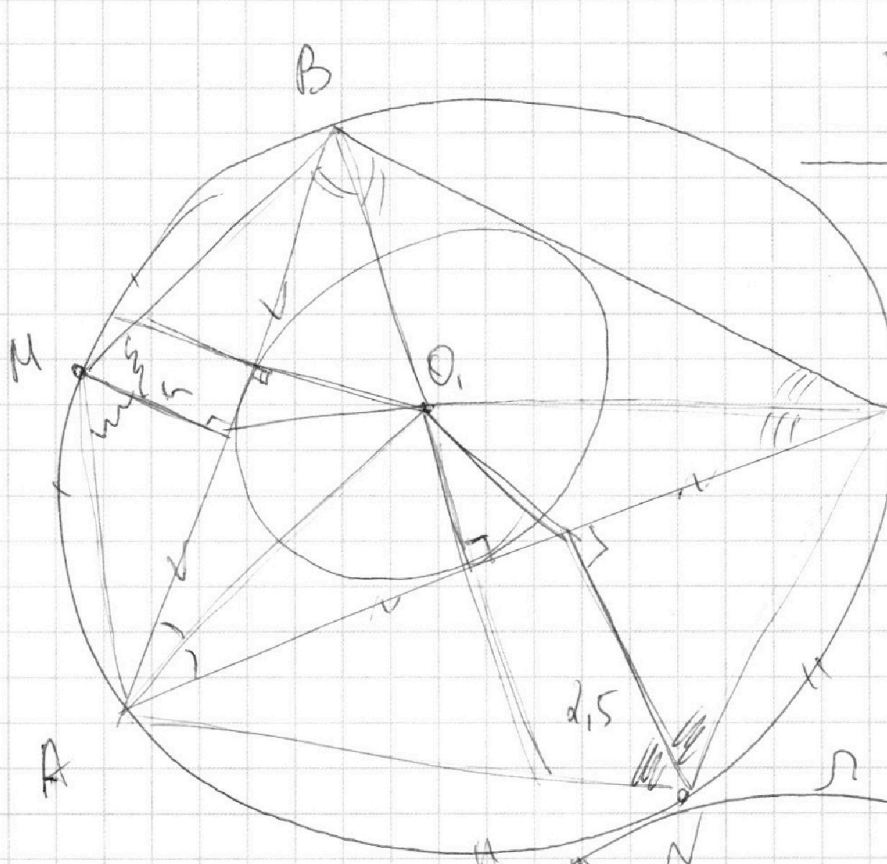
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$BH = AH + tg \alpha$$

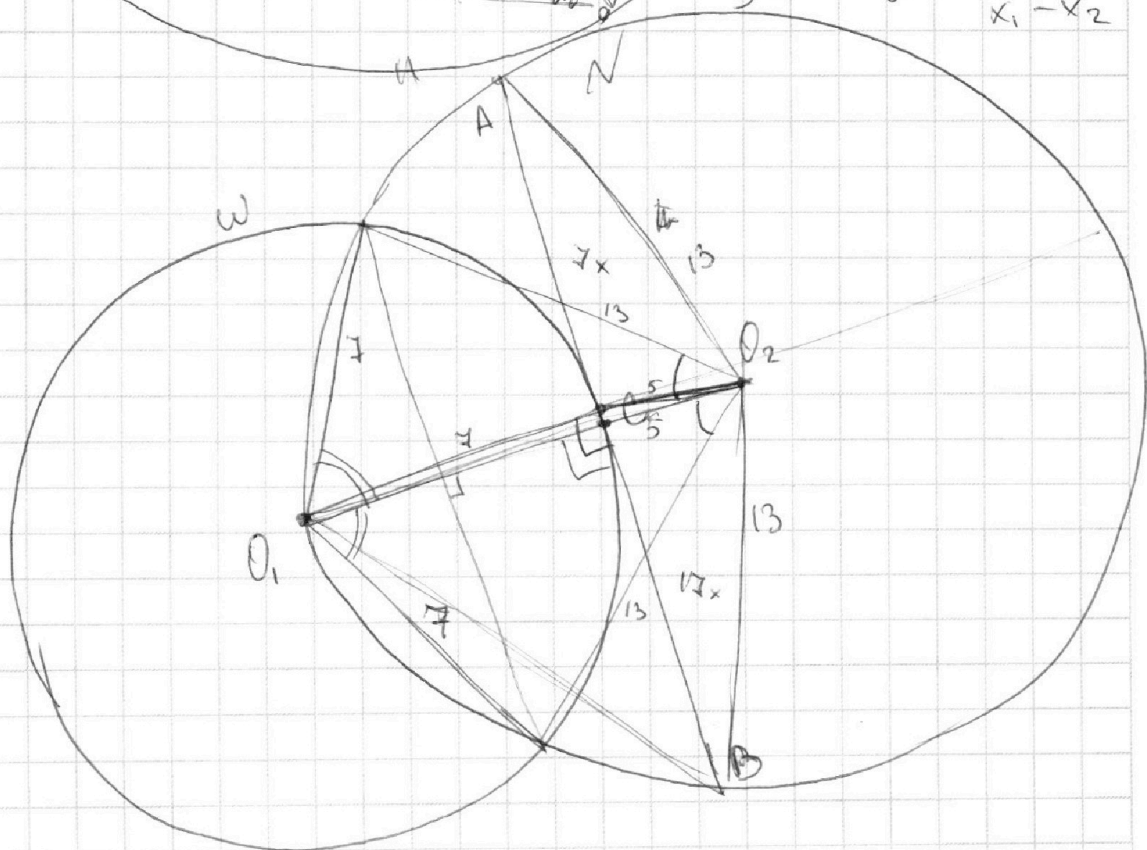
$$C \quad AH (2 + tg \alpha) AH = 14$$

$$AB: y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$$

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{gab} \left(\frac{a}{gb} + \frac{b}{ga} + \frac{2}{g} \right)$$

$$\frac{1}{gb} + \frac{1}{ga}$$

$$\frac{1}{g} \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{b}{a} \right)$$

$$= \frac{a}{gb} + \frac{b}{ga} + \frac{2}{g}$$

$$\frac{a}{b}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$AC + BM = 14$$

$$2AM + BM = 14$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{xm}{ym}$$

$$4AM^2 + BM^2 + 4AMBK = 196$$

$$AB^2 + AM^2 + 4AMBK = 196$$

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{gab}$$

$$= \frac{1}{a+b} - \frac{1}{gab}$$

$$= (a+b) \left(\frac{1}{gb} + \frac{1}{ga} \right) - 1$$

$$\frac{14}{196}$$

$$(a+b)y = (a^2 - 7ab + b^2)x$$

$$ay + by = a^2x - 7abx + b^2x$$

$$a^2x =$$

$$a^2x + b^2x - 7abx - ay - by = 0 \quad | :ab$$

$$\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} - 7x - \frac{y}{b} - \frac{y}{a} = 0$$

$$\frac{ax-y}{b} + \frac{bx-y}{a} = 7x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.

по св-ву \angle хорд $O_1D \cdot DT = AD \cdot DB$

$$DC = (17-n)x \Rightarrow AD = AC - DC = 17x - (17x - nx) = nx$$

$$BD = BC + CD = 7x + 17x - nx = (24-n)x$$

$$O_1O_2 = 13, O_1D = 7 \Rightarrow O_2D = 13 - 7 = 6 \Rightarrow DT = O_2D + O_2T = 6 + 13 = 19$$

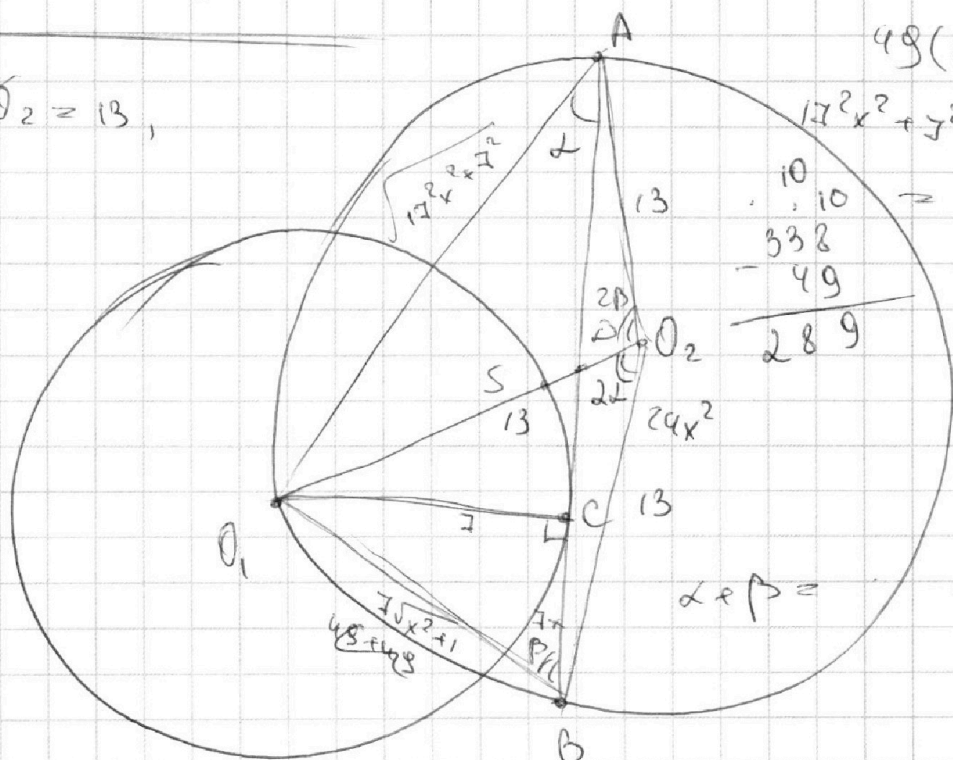
$$O_1D \cdot DT = 7 \cdot 19 = nx \cdot (24-n)x = n(24-n)x^2$$

$$24n - n^2 = \frac{133}{x^2} \Rightarrow n^2 - 24n + \frac{133}{x^2} = 0$$

$$D = 24 - \frac{4 \cdot 133}{x^2}$$

$$n = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 x^2 - 4 \cdot 133}}{2} = 12 \pm \frac{\sqrt{24^2 x^2 - 4 \cdot 133}}{2x}$$

$$O_1O_2 = 13,$$



$$\cos \alpha =$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ + 289 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 2 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$49(x^2 + 7)^2$$

$$\begin{array}{r} 17^2 x^2 + 7^2 + 7^2 x^2 + 7^2 = \\ 10 \cdot 10 = 338 \\ - 49 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\sin \rho = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\cos \beta =$$

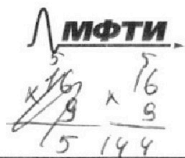
$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ + 3 \\ \hline 169 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. It includes several diagrams and calculations:

- Top left:** Calculations for $ab = 2^{15} \cdot 4^4 \cdot x$, $bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot y$, $ac = 2^{23} \cdot 3^9 \cdot z$. Also $46 \cdot 2 = 2^3$, $68 \cdot 2 = 4 \cdot 34$, $a^2 b^2 c^2 = 2^{45} \cdot 7^{68} \cdot x^2 y^2 z^2$.
- Top right:** A right-angled triangle with vertices C (top), D (left), and A (right). CD is the altitude from C to DA . Calculations: $\frac{CD}{DA} = \frac{0,1 \cdot D}{CD} = \frac{4}{\sqrt{128}}$, $\frac{CD}{DA} = \frac{4}{2 \cdot 3 \sqrt{2} \cdot 2 \sqrt{2}} = \frac{1}{6}$.
- Middle left:** Division $\frac{128}{8} = 16$, $128 = 2^7$. Another division $\frac{128}{8} = 16$. $17 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4$.
- Middle right:** A right-angled triangle with vertices B (top), E (left), and A (right). BE is the altitude from B to EA . Calculations: $\frac{BE}{EA} = \frac{0,2 \cdot E}{EA} = \frac{1}{\sqrt{15}}$, $\frac{BE}{EA} = \frac{15 \cdot 0,2 \cdot E}{EA} = \frac{3 \cdot E}{EA}$.
- Bottom left:** A system of inequalities: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 \leq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$. Below it, $ax + y - 8b = 0$, $y = 8b - ax$.
- Bottom center:** A complex geometric diagram showing two circles O_1 and O_2 with centers $O_1(12, 0)$ and $O_2(0, 12)$. A line AB passes through O_1 and O_2 . A point A is at $(-4, -4)$. Calculations: $\frac{AB}{AC} = \frac{O_2A}{O_1A} = \frac{1}{4}$, $\frac{O_2A}{12 + O_2A} = \frac{1}{4}$, $4O_2A = 12 + O_2A \Rightarrow O_2A = 4$.
- Bottom right:** Calculations: $\sqrt{16-1} = \sqrt{15}$, $144-16 = \sqrt{128}$, $12 \cdot 20 = 240$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $40 = 2^4 \cdot 5$, $O_1 O_2 = 12$, $R = 4$, $r = 1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 36 - 24 = 12$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 =$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$a - \sqrt{a} = a - b + \sqrt{b}$$

$$c - d = c^2 - d^2$$

$$c - d = (c - d)(c + d)$$

$$(c - d)(1 - c - d) = 0$$

$$c = d$$

$$1 = c + d$$

$$(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) =$$

$$= \underline{9x^4} - \underline{18x^3} + \underline{6x^2} + \underline{3x^3} - \underline{18x} + \underline{6x} + \underline{3x^2} - \underline{6x} + \underline{2} =$$

$$= 9x^4 - 15x^3 + 9x^2 - 18x + 2$$

$$a = 1 + b - 2\sqrt{b}$$