



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заменим, что $abc : 7^{39}$, т.к. $ac : 4^{39}$

Пусть $\text{ord}_2(a) = t_a$; $\text{ord}_2(b) = t_b$; $\text{ord}_2(c) = t_c$,

тогда

$$t \begin{cases} t_a + t_b > 15 & , \text{т.к. } ab : 2^{25} \\ t_b + t_c > 17 & , \text{т.к. } bc : 2^{14} \\ t_a + t_c > 23 & , \text{т.к. } ac : 2^{23} \end{cases}$$

$$2(t_a + t_b + t_c) > 55$$

$$t_a + t_b + t_c > 27,5$$

Но t_a, t_b и t_c - натуральные или 0, тогда $t_a + t_b + t_c > 28$

Получим, что $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$, т.к. $abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^{16} \cdot 1 = 2^{11} \cdot 7^{23}$

$$ab = 2^{11} \cdot 7^{16} \cdot 2^9 = 2^{15} \cdot 7^{16} : 2^{18} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^9 \cdot 2^{13} \cdot 7^{23} = 2^{17} \cdot 7^{23} : 2^{17} \cdot 7^{16}$$

$$ac = 2^{11} \cdot 7^{16} \cdot 2^{13} \cdot 7^{23} = 2^{24} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из задачки следует, что $(a; b) = 1$ ($(a; b) = \text{НОД}(a; b)$).

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

Предположим, что это число можно сократить на k ,
тогда $a+b \equiv k$ по условию не a и не b не делится
на k . Если одно из этих делится на делитель k ,
то и второе также, но $(a; b) = 1$). Тогда и $(a+b)^2 - 9ab \equiv k$,
значит и $-9ab \equiv k$, значит $9 \equiv k$, т.к. $(a; k) = 1; (b; k) = 1$.
Таким образом $9 \equiv k$, тогда $9 \geq k$.

Пример: $a = 100; b = 17$:

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{17} \quad - \text{некорректно}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{100+17}{100^2 - 7 \cdot 17 \cdot 100 + 17^2} = \frac{117}{-1611} = -\frac{13}{179}$$

Ответ: $n = 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

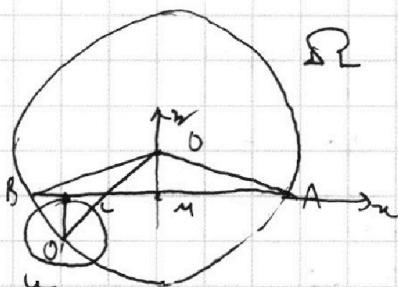
6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) Тогда $\angle BOC = \alpha$, а $\angle BCA = \beta$

Значит, что $O'C \perp BA$
Так как $CM \perp BA$ то $O'C \parallel CM$,
значит, что $BM = MA$

2) Введем систему координат
с началом в точке M и осями
MA и MO.

3) Тогда координаты $O(0; b)$, а точка $A(a; 0)$,
то есть координаты $(\infty (-\frac{5}{12}a; 0))$ и координаты
 $O'(-\frac{5}{12}a; -7)$.

$$\left(\begin{array}{l} \frac{BM}{MA} = \frac{1}{1} \\ \frac{BL}{LA} = \frac{7}{12} \end{array} \right)$$

4) $\triangle OBM$ — прямоугольный;

$$a^2 + b^2 = 13^2$$

Далее симметрия относительно оси O' : $(b+7)^2 + (\frac{5}{12}a)^2 = 13^2$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13^2 & (1) \\ (b+7)^2 + (\frac{5}{12}a)^2 = 13^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 + 49 + 14b + \frac{25}{144}(169 - b^2) &= 169 \\ 144b^2 + 7 \cdot 14^2 + 14 \cdot 12^2 b + 65^2 - 25b^2 &= (13/12)^2 \end{aligned}$$

$$(1) \quad a^2 = \frac{144}{25} (13^2 - (b+7)^2)$$

(2) $b(1)$:

$$\frac{144}{25} (13^2 - (b+7)^2) + b^2 = 13^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3n^2 - 6n + 2} - \sqrt{3n^2 + 3n + 1} = 1 - 9n$$

$$\sqrt{3n^2 - 6n + 2} - (1 - 9n) = \sqrt{3n^2 + 3n + 1}$$

Получим, что $\sqrt{3n^2 - 6n + 2} - (1 - 9n) \geq 0$ (1)

$$3n^2 - 6n + 2 + (1 - 9n)^2 - 2(1 - 9n)\sqrt{3n^2 - 6n + 2} = 3n^2 + 3n + 1$$

$$1 - 9n + (1 - 9n)^2 - 2(1 - 9n)\sqrt{3n^2 - 6n + 2} = 0$$

$$(1 - 9n)(1 + 1 - 9n - 2\sqrt{3n^2 - 6n + 2}) = 0$$

I Решение $n = \frac{1}{9}$:

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{1\frac{2}{3} + \frac{1}{27}} - \sqrt{1\frac{2}{3} + \frac{1}{27}} = 0$$

Получим, что $n = \frac{1}{9}$ - корень.

II $1 - 9n - 2\sqrt{3n^2 - 6n + 2} = 0$

$$2\sqrt{3n^2 - 6n + 2} = 2 - 9n, \text{ получим, что } 2 - 9n \geq 0 \quad (2)$$

$$4(3n^2 - 6n + 2) = 4 + 81n^2 - 36n$$

$$12n^2 - 24n + 8 = 4 + 81n^2 - 36n$$

~~$$64n^2 - 24n - 4 = 0$$~~

$$64n^2 - 12n - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 64 =$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{64}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{64} \quad \cancel{\text{не корень}}$$

Проверим корни:

$$(2): 2 - 9 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{64} \leq 0$$

$$26 \sqrt[4]{18 + 6\sqrt{6 \cdot 13}}$$

$$8 \sqrt[4]{6\sqrt{6 \cdot 13}}$$

$$x_1 \neq \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{64}$$

$$(2): 2 - 9 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{64} \geq 0$$

$$26 \sqrt[4]{18 - 6\sqrt{6 \cdot 13}}$$

~~$$- (1 - 9 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{64}) + \sqrt{3n^2 - 6n + 2} \geq 0$$~~

~~$$3n^2 - 6n + 2 \geq 0 \quad \checkmark \quad 1 - 9n \geq 0 \quad \checkmark$$~~

Ответ: $\left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{64} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3, тогда $y_1 = (2x_1 + y_2 - 14) - 2x_1$,
мы можем упростить, получим, если
 $2x_1 + y_2 - 14$ принимает только чётные
значения из которых $[0; 32]$, то будем получать
13 возможных A , т.к. козероги
при k пары -2 , а $\operatorname{tg} \angle QRO = -2$.

$$2x_1 + y_2 - 14 = c$$

$$y_2 = c + 14 - 2x_1$$

Тогда 3 лежит в первом квадранте, значит
 $c + 14$ принимает чётные значения от 0 до 32.
и c принимает значения от 0 до 32,
меньше $c \leq 2$ и $c \in [0; 18]$. При каждом c
получаем 13 пар для B .

Получим, что всего удовлетворяющих условий
пара $18 \cdot 13 \cdot 13$

Одна из $18 \cdot 13^2$.

* и все сильные задачи будущих поисковых
задач не решали пока $y = k - 2x$, где $k \in \mathbb{R}; k \in [0; 32]$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

Это окружность с центром
в точке $(0; 0)$ и радиусом 1.

$$x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0$$

$$x^2 + (y - 12)^2 \leq 16$$

Это окружность с центром

в точке $(0; 12)$ и радиусом 4.

Значит, что пересечение
окружностей в точке
внешней окружности и
на её границе

$$(1): ax + y - 8b = 0$$

это прямая, значит,
если она пересечет окружно-
стями в точке, то
пересечение будет бесконечно
много, значит эта прямая
касается окружности изнутри.

Значит, что одна из окружностей
касается другой окружности в точке
внешней окружности в точке $(0; 2,4)$, а вторая — в точке $(0; -4)$,
значит внешние наименьшие
расстояния между
окружностями, а внутренние — разные.

$$\text{I} \quad \begin{cases} y = 2,4 - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2(1+a^2) - 4,8ax + 4,76 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 5,76a^2 - 4,76 - 446a^2 = 0$$

$$a^2 = 4,76$$

$$a = \pm \sqrt{4,76}$$

$$\text{Причем } b = 0,3$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \sqrt{4,76}; -\sqrt{4,76}; \sqrt{15}; -\sqrt{15} \right\}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} y = -4 - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

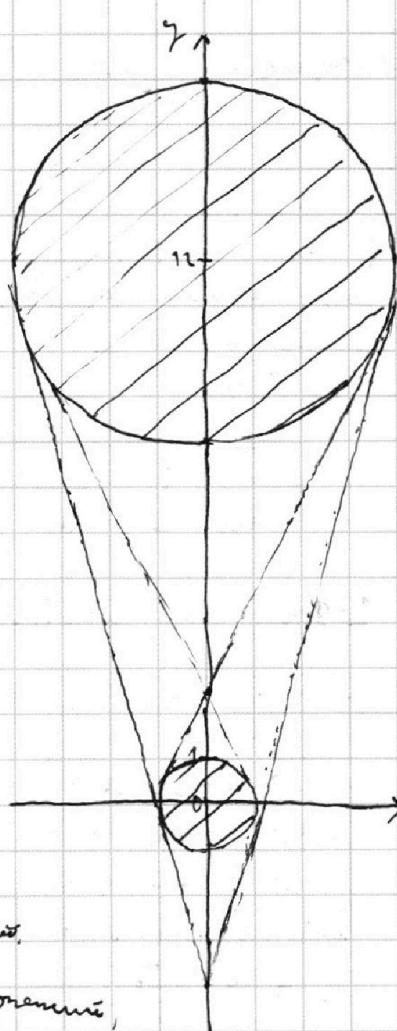
$$(a^2 + 1)x^2 + 8xa + 15 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 16a^2 - 15a^2 - 15 = 0$$

$$a^2 = 15$$

$$a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Причем } b = -\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Найдем действительное определение: $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$ (1)

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-9 + 3\sqrt{3} \geq -9x \geq -9 - 3\sqrt{3}$$

$$0 > -8 + 3\sqrt{3} \geq 1 - 9x \geq -8 - 3\sqrt{3}$$

Получим, что выражение
имеет неотрицательные
значения для

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

(найдем из
выражений не
отрицательные
значения)

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x \geq 0$$

Выражение имеет неотрицательные значения для

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (\text{с помощью метода
квадратных корней})$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 1 + 9x = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1 - 9x)^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1 - 9x)^2 = 0$$

$$(1 - 9x)(1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 1 - 9x) = 0$$

$$\underbrace{1 - 9x}_{< 0} \cdot \underbrace{-2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}}_{\text{неотрицательные}} = 0$$

$$0 > -7 + 3\sqrt{3} \geq 2 - 9x \geq -7 - 3\sqrt{3}$$

Получим, что корней нет.

$$2 - \frac{18 - 6\sqrt{6 \cdot 73}}{13} \geq 0$$

$$2 \geq 18 - 6\sqrt{6 \cdot 73}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\Delta = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 9 - 3 \cdot 4 < 0$$

Сложили неравенства

Равенство нулю, значит

$$3x^2 + 3x + 1 > 0 \text{ на } (-\infty; +\infty)$$

Получим, что $1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \hline 64 \\ 36 \\ \hline 24 \\ + 276 \\ \hline 36 \\ - 312 \\ \hline 3 \\ \hline - 112 \\ \hline 4 \end{array} \quad 3 \cdot 4 \cdot 26$$



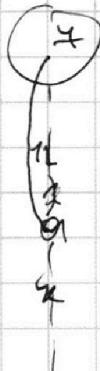
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{u}{n} = \frac{n+n}{y}$$

$$y_n = n + 12$$

$$3n = 12$$

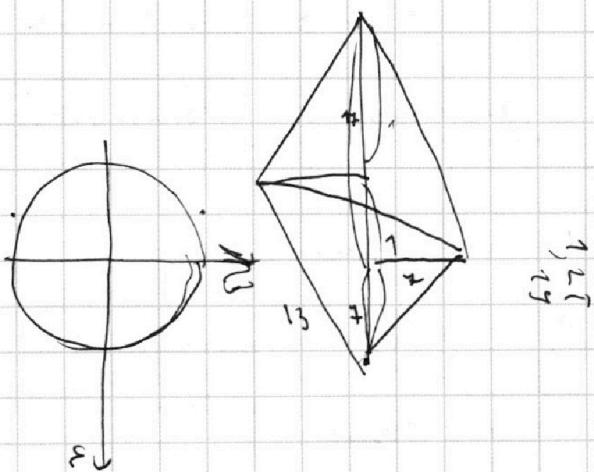
$$n=4$$

$$\frac{1}{y} = \frac{4}{n-2}$$

$$12-n = 4n$$

$$12 = 4y_n$$

$$n = 2,4$$



$$a^2 = \frac{144}{25} \left(13^2 - (b+4)^2 \right)$$

$$13^2 \cdot 13^2 - 5^2 \cdot 4^2 (b+4)^2 = 13^2$$

$$13^2 \cdot 13^2 = 5^2 \cdot 4^2 (b+4)^2$$

$$13^2 \cdot 13^2 = 5^2 \cdot 4^2 (b+4)^2$$

$$b+4 = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 13^2}{5^2 \cdot 4^2}}$$

$$b+4 = \sqrt{\frac{13^2}{5^2}} \cdot \sqrt{\frac{13^2}{4^2}}$$

$$b+4 = \frac{13}{5} \cdot \frac{13}{4}$$

$$b+4 = \frac{169}{20}$$

$$b+4 = 8\frac{9}{20}$$

$$b = 8\frac{9}{20} - 4$$

$$b = 4\frac{9}{20}$$

$$b = 4.45$$

$$(7+b)^2 + \frac{5}{12}a^2 = 73^2$$

$$49 + 14b + b^2 + \frac{5}{12}a^2 = 5369$$

$$a^2 + b^2 = 73^2$$

$$49 + 14b +$$

$$b = \sqrt{73^2 - a^2}$$

$$(7 + \sqrt{73^2 - a^2})^2 + \frac{5}{12}a^2 = 73^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

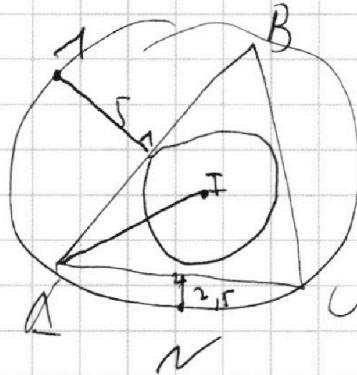
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

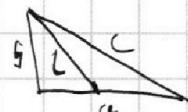
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos 2 = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{1 - \cos 2}{2}$$

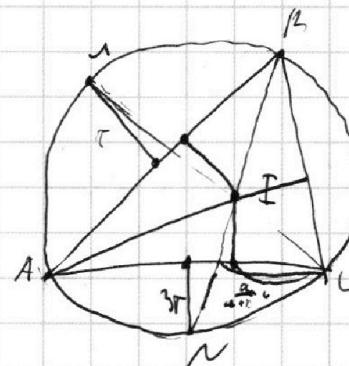


$$\alpha =$$

$$AT = \frac{r}{\sin \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} =$$



$$\cos 2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\frac{1}{2}c - \frac{a}{a+b}c =$$

$$= c \left(\frac{a+b-2a}{2(a+b)} \right) =$$

$$= \frac{c(b-a)}{2(a+b)}$$

$$\frac{12^2}{12^2} + \frac{13^2}{13^2} = 81$$

$$\frac{2}{2a} = \frac{b(\frac{c-a}{2(a+b)})}{(a-b)(a-b+c)} =$$

$$\frac{14}{144}$$

$$= \frac{b}{a+b}$$

7.

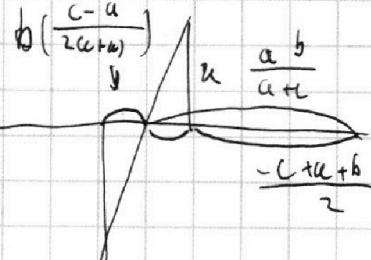
$$r = \frac{2\sqrt{1}(a+b-c)}{b} = \frac{5(a+b-c)}{c}$$

$$7^2 \cdot 12^2 + 7^2 \cdot 13^2 - 13^2 \cdot 12^2 =$$

$$= 7^2(12^2 + 13^2) - 13^2 \cdot 12^2 = \frac{(a+b-c)c}{(a+b-c)b}$$

$$= 7^2 \cdot 12^2 + 7^2$$

$$= \frac{(a-c)(a-b+c)}{2(a+b)}$$



$$= \frac{-c+a+b - \frac{ab}{a+b}}{2} =$$

$$= \frac{(a+b)(a+b-c)-ab}{2(a+b)} =$$

$$= \frac{a^2+ab-ac+cb-c^2-ab}{2(a+b)} =$$

$$= \frac{a^2-ab-ac+ca+cb-c^2}{2(a+b)} =$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

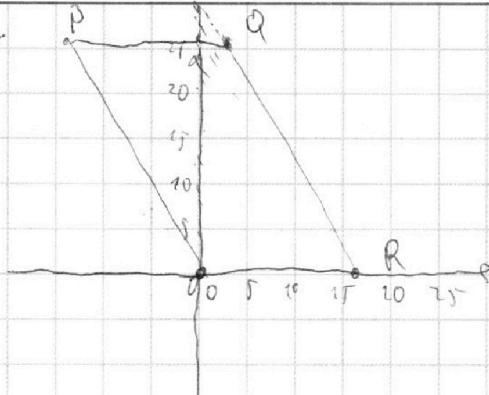
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 + 2x_1 + y_2 - s_2 = 14$$

$$2x_1 + y_1 = \cancel{20} + 2x_2 + y_2$$

$$2x_1 + y_1 + 14 = 2x_2 + y_2$$

13

$$y_1 = \cancel{(2x_2 + y_2 - 14)} - 2x_1$$

$$\sqrt{13^2 - a^2 + q^2} + \frac{5}{2} a^2 = 13^2$$

$$2x_2 + y_2 - 14 \in [0; 36]$$

$$\sqrt{13^2 - a^2 + q^2} + \frac{25}{4a^2} a^2 = y_2$$

$$2x_2 + y_2 - 14 = c$$

$$14\sqrt{13^2 - a^2} = \frac{119}{4a^2} a^2 - q^2$$

$$y_2 = c + 14 - 2x_2$$

$$2\sqrt{13^2 - a^2} = \frac{14}{4a^2} a^2 - q$$

$$(14 - 2x_2) \in [0; 36]$$

$$\begin{cases} y = 24 - ax \\ x^2 + y^2 = 144 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 144 \\ \hline 76 \\ 76 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$a^2 + (24 - ax)^2 = 144$$

$$576$$

$$a^2 + a^2 x^2 - 48ax + 576 = 144$$

$$526$$

$$(1 + ax)^2 - 48ax + 432 = 0$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ 70 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$x = -9 - ax$$

$$\frac{1}{2} = 5,76 \Rightarrow 1,76 - 4,76 a^2 = 0$$

$$a^2 + y^2 = 1$$

area

$$1 - 4,76 a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{4,76}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{4,76}}$$

$$a^2 + 16 + a^2 a^2 + 8ax = 1$$

$$a^2 + 16 + 8ax + 12 = 0$$

$$\underline{D} = 4,6a^2 - 72a - 12 = 0$$

$$4a^2 = 12$$

$$a^2 = 3$$

$$(a^2 + y^2 + 8ax) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{15+14+23} 7^{11+18+39}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} 7^{68}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 14 \\ \hline 15 \\ - 32 \\ \hline 33 \\ - 23 \\ \hline 10 \\ - 18 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$abc : 2^{28} 7^{44}$$

$$abc : 2^{28} 7^{44}$$

$$a = 2^{11} 7^{16}$$

$$b = 2^4$$

$$c = 2^{13} 7^{23}$$

$$m_a + m_b \geq 11$$

$$m_c + m_b \geq 48$$

$$m_a + m_c \geq 39$$

зап

$$\begin{array}{r} 2^1 \\ + 2^4 \\ \hline 2^5 \\ + 2^3 \\ \hline 2^8 \\ + 2^1 \\ \hline 2^9 \end{array} \quad m_a + m_b + m_c \geq 2a + m_b$$

$$28 - t_c \geq 15$$

$$t_c \leq 13$$

$$a = 2^{11} 7^{16}$$

$$t_a + t_b \geq 15$$

$$t_a = t_b + t_c = 28$$

$$\begin{array}{r} 2^3 \\ + 2^6 \\ \hline 2^9 \end{array}$$

$$t_b + t_c \geq 14$$

$$16$$

$$\begin{array}{r} 11900 \\ - 10289 \\ \hline 1611 \end{array}$$

$$28 - t_c \geq 17$$

$$t_c \leq 11$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 43 \\ \hline 719 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times 119 \\ \hline 74 \\ + 74 \\ \hline 849 \end{array}$$

$$m_a + m_b \geq 11$$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ - 289 \\ \hline 9711 \end{array}$$

$$34 - m_c \geq 11$$

$$\begin{array}{r} 10264 \\ - 99400 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$m_c \leq 23$$

$$\begin{array}{r} 11900 \\ - 10000 \\ \hline 1900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1611 \\ \times 4 \\ \hline 6444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1611 \\ \times 4 \\ \hline 6444 \\ - 63 \\ \hline 89 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

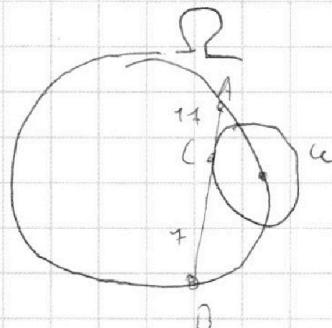
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a; b) = 1$$

$$4ab^2 - 4b^3$$

№3



$$\underline{a+b \cdot p}$$

$$(a+b)^2 - 9ab$$

$\frac{a}{p} \quad \frac{b}{p}$

$a+b \cdot p$

сокр. р

$$100 + 8$$

$$100 + 8$$

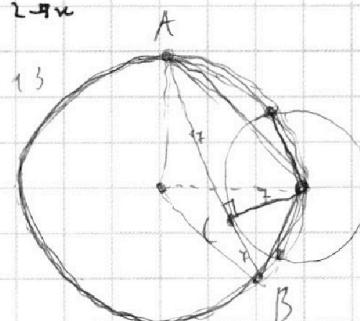
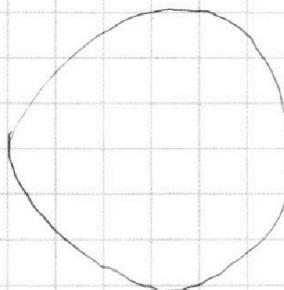
$$\begin{aligned} & \frac{100 + 8}{10000 + 64 - 7 \cdot 1008} \\ & = \frac{108}{10064 - 5600} = \frac{108}{4464} \\ & = 11 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$a = 4 \\ b = 5$$

$$\underline{4+5} \\ 76 - 4 \cdot 5 + 25$$

$$\underline{11+7} \\ 11 + 49 - 4 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} & \frac{100 + 8}{10064} \\ & = \frac{108}{9600} \\ & = \frac{4}{400} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & -7 + 3\sqrt{3} < 0 \\ & 3\sqrt{3} \cdot 7 \\ & 27\sqrt{3} \cdot 7 \end{aligned}$$

4

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 3 = 3$$

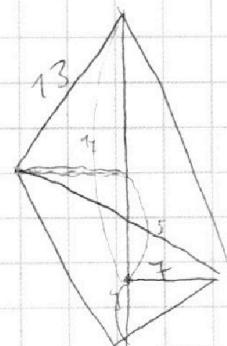
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 + 3x + 7 \geq 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 7 =$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} < \sqrt{3x^2 + 3x + 7}$$

$$3x^2 - 6x + 2 < \sqrt{3x^2 + 3x + 7}$$



$$1 - 9x \leq 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 7}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1 - 9x)^2 = 3x^2 + 3x + 7$$

$$(1 - 9x) - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1 - 9x)^2 = 0$$