



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заменим, что $abc : 7^{39}$, т.к. $ac : 7^{39}$

Пусть $ord_2(a) = t_a$; $ord_2(b) = t_b$; $ord_2(c) = t_c$,
тогда

$$t \begin{cases} t_a + t_b \geq 15, & \text{т.к. } ab : 2^{15} \\ t_b + t_c \geq 17, & \text{т.к. } bc : 2^{17} \\ t_a + t_c \geq 23, & \text{т.к. } ac : 2^{23} \end{cases}$$

$$2(t_a + t_b + t_c) \geq 55$$

$$t_a + t_b + t_c \geq 27,5$$

Но t_a, t_b и t_c — натуральные или 0, тогда $t_a + t_b + t_c \geq 28$

Получим, что $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$, т.к. $abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^{16}$; $b = 2^4$; $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

$$ab = 2^{11} \cdot 7^{16} \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 7^{16} : 2^{15} \cdot 7^{16}$$

$$bc = 2^4 \cdot 2^{13} \cdot 7^{23} = 2^{17} \cdot 7^{23} : 2^{17} \cdot 7^{23}$$

$$ac = 2^{11} \cdot 7^{16} \cdot 2^{13} \cdot 7^{23} = 2^{24} \cdot 7^{39} : 2^{24} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия следует, что $(a; b) = 1$ ($(a; b) = \text{НОД}(a; b)$).

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Предположим, что эту дробь можно сократить на k , тогда $a+b \div k$, значит на a , на b не делится на k (или одно из них делится на k , но a второе тоже, но $(a; b) = 1$). Тогда и $(a+b)^2-9ab \div k$, значит $a^2-9ab \div k$, значит $9 \div k$, т.к. $(a; k) = 1; (b; k) = 1$. Получили $9 \div k$, тогда $9 \geq k$.

Значит дробь сократится на m . Больше 9.

Пример: $a=100; b=17$.

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{17} - \text{несократима}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{100+17}{100^2-7 \cdot 17 \cdot 100 + 17^2} = \frac{117}{-1611} = -\frac{13}{179}$$

Ответ: $n=9$.

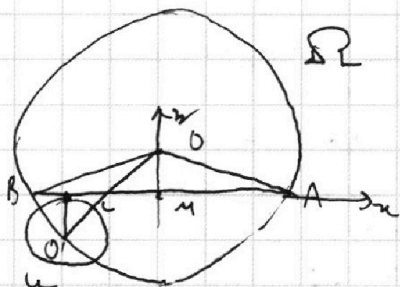
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) Пусть центр $\omega - O'$, а $\Omega - O$
 Известно, что $O'C \perp BA$
 Проведем перпендикуляр OM на AB , известно, что $BM = MA$

2) Введем систему координат с центром в точке M и осью MA и MO .

3) Пусть координаты $O(0; b)$, а точки $A(a; 0)$, точка координатами $C(-\frac{\sqrt{2}}{2}a; 0)$ и координаты $O'(-\frac{\sqrt{2}}{2}a; -7)$.

$$\left(\begin{aligned} \frac{BM}{MA} &= \frac{1}{1} \\ \frac{BC}{CA} &= \frac{7}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right)$$

4) $\triangle OBM$ - прямоугольный:
 $a^2 + b^2 = 13^2$

Расстояние от O' до O равно 13: $(b + 7)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = 13^2$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13^2 & (1) \\ (b + 7)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = 13^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 + 49 + 14b + \frac{25}{244}(169 - b^2) &= 169 \\ 144b^2 + (7 \cdot 74)^2 + 14 \cdot 72^2 b + 65^2 - 25b^2 &= (13 \cdot 72)^2 \end{aligned}$$

(1) $a^2 = \frac{244}{25}(13^2 - (b + 7)^2)$

(2) $b(1)$:

$$\frac{144}{25}(13^2 - (b + 7)^2) + b^2 = 13^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Получим, что $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) \geq 0$ (1)

$$3x^2 - 6x + 2 + (1 - 9x)^2 - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x + (1 - 9x)^2 - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$$

$$(1 - 9x)(1 + 1 - 9x - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}) = 0$$

I Положим $x = \frac{1}{9}$:

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{1\frac{1}{3} + \frac{1}{27}} - \sqrt{1\frac{1}{3} + \frac{1}{27}} = 0$$

Получим, что $x = \frac{1}{9}$ - корень.

II $1 - 9x - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x, \text{ получим, что } 1 - 9x \geq 0 \text{ (2)}$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 1 - 18x + 81x^2 - 36x$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 1 - 18x + 81x^2 - 36x$$

$$69x^2 - 24x - 7 = 0$$

$$69x^2 - 24x - 7 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 69 =$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69}$$

Проверим корни:

$$(1): 1 - 9 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69} \geq 0$$

$$26 \geq 18 + 6\sqrt{6 \cdot 13}$$

$$8 \geq 6\sqrt{6 \cdot 13}$$

$$x \neq \frac{6 + 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69}$$

$$(2): 1 - 9 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69} \geq 0$$

$$26 \geq 18 - 6\sqrt{6 \cdot 13}$$

$$8 \geq 9 - \frac{6 \cdot 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 1 + 81x^2 - 9$$

$$(1): \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) = 1 > 0$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 13}}{69} \right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Зафиксируем B , тогда $y_1 = (2x_2 + y_2 - 14) - 2x_1$.
Мы знаем, что y_1 принимает значения, если
 $2x_2 + y_2 - 14$ принимает какое-то целое
значение на отрезке $[0; 32]$, но будем считать
13 похуже, так как $\tan \angle QPO = -2$.
при x равен -2 , а $\tan \angle QPO = -2$.

$$2x_2 + y_2 - 14 = c$$

$$y_2 = c + 14 - 2x_2$$

Точка B лежит в параллелограмме, поэтому
 $c + 14$ принимает целые значения от 0 до 32 .
 c принимает значения от 0 до 32 ,
точка $c \in \mathbb{Z}$ и $c \in [0; 18]$. При каждом c
существует 13 точек B .

Получили, что всего удовлетворяющих условию
точек $13 \cdot 13 \cdot 13$

Ответ: $13 \cdot 13^2$.

* и все другие точки внутри параллелограмма
лежат на прямой $y = k - 2x$, где $k \in \mathbb{Z}; k \in [0; 32]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \geq 0 & (2) \end{cases}$$

(2): $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Это окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 1

$$x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$$

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$

Это окружность с центром в точке $(0; 12)$ и радиусом 4.

Решим, но проверим, удовлетворяет ли условиям все точки внутри окружностей и на их границах

a): $ax + y - 8b = 0$

Это прямая, заметим, если она пересекает концы-то окружностей уже тогда, то решений будет бесконечно много, значит эта прямая касается концевой из окружностей.

Заметим, по сути из четкой геометрии, касаясь одну окружность в центре, касаемся в точке $(0; 4)$, а второй - в точке $(0; -4)$, значит внешне касаются по касательной к концевой точке, а внутренне касаются в центре:

I $\begin{cases} y = 4 - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$x^2(1+a^2) - 4,8ax + 4,76 = 0$$

$$D = 5,76a^2 - 4,76 - 4,76a^2 = 0$$

$$a^2 = 4,76$$

$$a = \pm \sqrt{4,76}$$

Получим $b = 0,3$

Ответ: $\{\sqrt{4,76}; -\sqrt{4,76}\}; \sqrt{15}; -\sqrt{15}\}$

II $\begin{cases} y = -4 - ax \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$

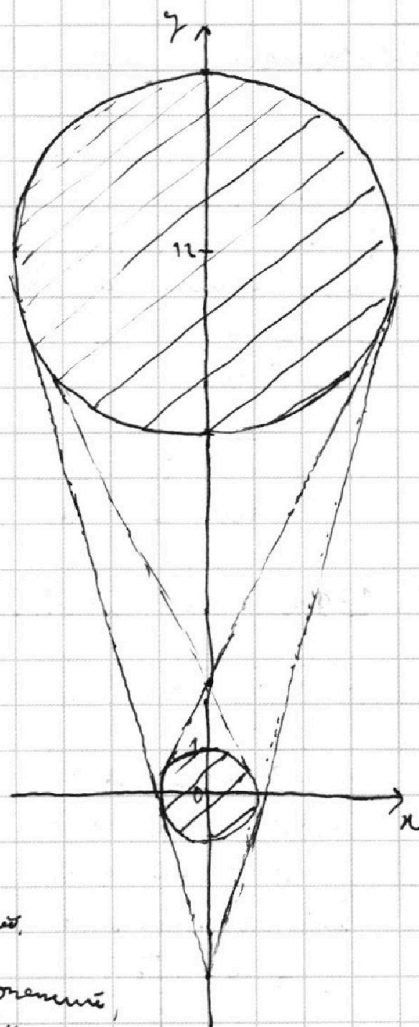
$$(a^2 + 1)x^2 + 8ax + 15 = 0$$

$$D = 16a^2 - 15a^2 - 15 = 0$$

$$a^2 = 15$$

$$a = \pm \sqrt{15}$$

Получим $b = -\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Найдем область определения:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-9 + 3\sqrt{3} \geq -9x \geq -9 - 3\sqrt{3}$$

$$0 > -8 + 3\sqrt{3} \geq 1 - 9x \geq -8 - 3\sqrt{3}$$

Проверим, но выполните условие меньше нуля

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Каждое из выражений не меньше нуля!

$$3x^2 - 6x + 2 \leq 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x < 0$$

Выполнение условия больше нуля меньше нуля:

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - (1 - 9x) = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (\text{с каждой стороны вынесем больше нуля})$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1 - 9x)^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1 - 9x)^2 = 0$$

$$(1 - 9x)(1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 1 - 9x) = 0$$

$$\begin{matrix} \uparrow < 0 \\ 2 - 9x < 0 \\ \underbrace{2 - 9x - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}}_{\text{не больше нуля}} = 0 \end{matrix}$$

$$0 > -7 + 3\sqrt{3} \geq 2 - 9x \geq -7 - 3\sqrt{3}$$

Проверим, но корни нет.

$$2 - \frac{18 - 6\sqrt{6 \cdot 73}}{13} \leq 0$$

$$26 \leq 18 - 6\sqrt{6 \cdot 73}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

Самый маленький коэффициент больше нуля, значит парабола больше нуля, значит $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$ на $(-\infty; +\infty)$

Проверим, но $1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ 69 \\ \hline 36 \\ 24 \\ \hline 276 \\ 66 \\ \hline 312 \\ 3 \\ \hline 12 \\ 4 \end{array} \quad 3 \cdot 4 \cdot 26$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

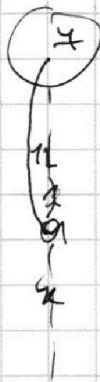
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{(b+c-a)^2 + r^2} = \frac{b+c-a}{\frac{2+ab^2+ac^2}{bc}}$$

$$(b+c-a)^2 + r^2 = \frac{bc(b+c-a)^2}{2+ab^2+ac^2}$$



$$\frac{x}{2} = \frac{n+n}{4}$$

$$4n = x + 12$$

$$3n = 12$$

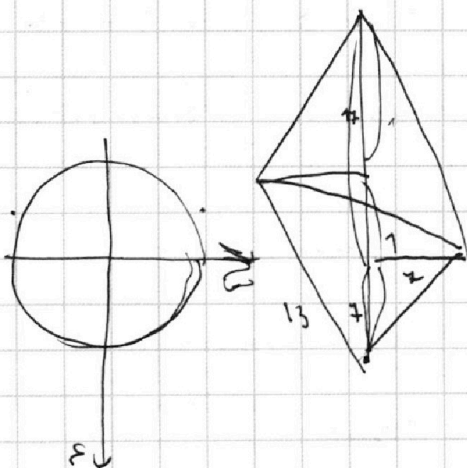
$$n = 4$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{n-2}$$

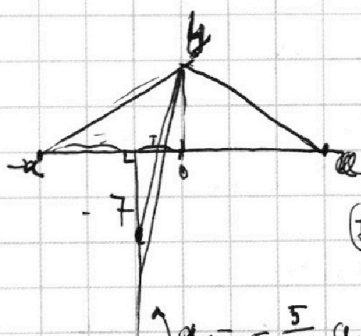
$$12 - n = 4n$$

$$12 = 4n$$

$$n = 3, 4$$



12
12
12



13
23
39
13
719

$$(7+b)^2 + \frac{5}{12}a^2 = 73^2$$

$$49 + 14b + b^2 + \frac{5}{12}a^2 = 769$$

$$a^2 + b^2 = 13^2$$

$$49 + 14b +$$

$$b = \sqrt{13^2 - a^2}$$

$$(7 + \sqrt{13^2 - a^2})^2 + \frac{5}{12}a^2 = 73^2$$

76
14
25

$$a^2 = \frac{144}{25} (13^2 - (b+7)^2)$$

$$5 \cdot 76 \cdot 13^2 - 5 \cdot 76 \cdot (b+7)^2 = 13^2$$

$$13^2 \cdot 76 = 5 \cdot 76 \cdot (b+7)^2$$

$$13^2 \cdot 19 = 5 \cdot 19 \cdot (b+7)^2$$

$$b+7 = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 19}{5 \cdot 19}}$$

b =

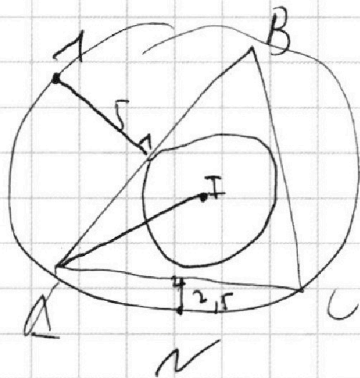
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

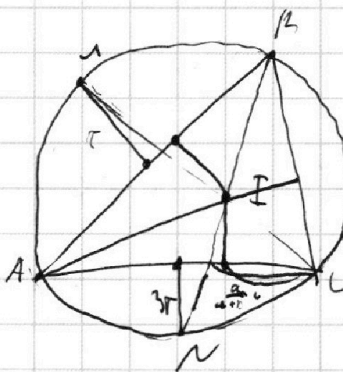
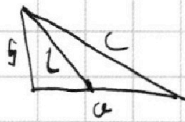
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \frac{2\alpha}{2} - \sin^2 \frac{2\alpha}{2} = \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{2\alpha}{2} \\ \sin^2 \frac{2\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$



$$\cos 2\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$\frac{a}{b}$

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{2\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{r}{\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}} = \frac{\frac{b+c-a}{2}}{\cos \frac{2\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{b+c-a}{2}}{\sqrt{\frac{1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}} = \frac{b+c-a}{\sqrt{\frac{2+b^2+c^2-a^2}{bc}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c - \frac{ac}{a+b} &= \\ &= c \left(\frac{a+b-2a}{2(a+b)} \right) = \\ &= \frac{c(b-a)}{2(a+b)} \end{aligned}$$

$$\frac{7^2}{12^2} + \frac{7^2}{13^2} = 2$$

$$\frac{7}{2} = \frac{b \left(\frac{c-a}{2(a+b)} \right)}{\frac{(a-b)(a+b)}{2(a+b)}} =$$

$$\frac{b \left(\frac{c-a}{2(a+b)} \right)}{\frac{a-b}{2}} = \frac{a-b}{a+c}$$

$$\frac{14}{144}$$

7.

$$r = \frac{2 \cdot 5 \cdot (a+b-c)}{b} = \frac{5(a+b-c)}{c}$$

$$\frac{-c + a + b}{2} - \frac{ab}{a+c} =$$

$$7^2 \cdot 12^2 + 7^2 \cdot 13^2 - 13^2 \cdot 12^2 =$$

$$= 7^2 (12^2 + 13^2) - 13^2 \cdot 12^2 = \frac{(a+b-c) \cdot c}{(a+b-c) \cdot b}$$

$$= \frac{(a+c)(a+b-c) - 2ab}{2(a+c)} =$$

$$= 7^2 \cdot 12^2 + 7^2$$

$$= \frac{(a-c)(a-b+c)}{2(a+c)}$$

$$= \frac{a^2 + ab - ac + ca + cb - c^2 - 2ab}{2(a+c)} =$$

$$= \frac{a^2 - ab - ac + ca + cb - c^2}{2(a+c)} =$$

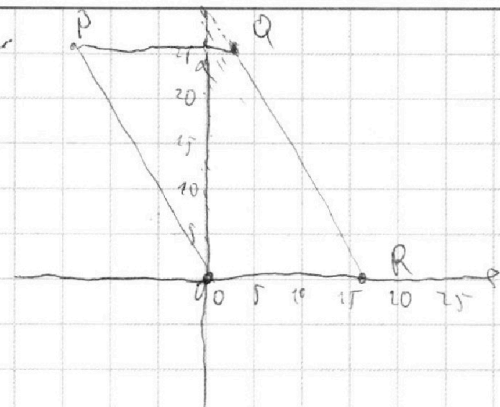
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2$$

$$2x_1 + y_1 + 14 = 2x_2 + y_2$$

$$y_1 = \frac{2x_2 + y_2 - 14}{2} = 2x_2$$

$$2x_2 + y_2 - 14 \in [0; 18]$$

$$2x_2 + y_2 - 14 = c$$

$$y_2 = c + 14 - 2x_2$$

$$2\sqrt{13^2 - a^2} = \frac{14}{244} a^2 - 9$$

$$c \in [0; 32]$$

$$c \in [0; 32]$$

$$c \in [0; 18]$$

$$\sqrt{13^2 - a^2} + 2 + \frac{5}{12} a^2 = 13^2$$

$$13^2 - a^2 + 49 + 24\sqrt{13^2 - a^2} + \frac{25}{12} a^2 = 13^2$$

$$24\sqrt{13^2 - a^2} = \frac{119}{12} a^2 - 49$$

$$\begin{cases} y = 24 - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (24 - ax)^2 = 1$$

$$x^2 + a^2 x^2 - 48ax + 576 = 1$$

$$(1 + a^2)x^2 - 48ax + 575 = 0$$

$$D_x = 576a^2 - 48a^2 = 0$$

$$a = 2a$$

$$1 - 48a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{48}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{48}}$$

$$x^2 + 16 + a^2 x^2 + 1 = 1$$

$$(1 + a^2)x^2 + 17 = 1$$

$$\frac{D}{4} = 16a^2 - 12a^2 - 12 = 0$$

$$4a^2 = 12$$

$$a^2 = 3$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 8xa = 0$$

$$\begin{array}{r} 119 \mid 7 \\ - 70 \mid 77 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = -4 - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{15+17+23} 7^{11+18+39}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} 7^{68}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 14 \\ \hline 15 \\ 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 32 \\ 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ + 18 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$abc : 2^{28} 7^{44}$$

$$abc : 2^{28} 7^{44}$$

$$a = 2^{11} 7^{16}$$

$$b = 2^4$$

$$c = 2^{13} 7^{23}$$

$$m_a + m_b \geq 11$$

$$m_c + m_b \geq 18$$

$$m_a + m_c \geq 39$$

$$a = 2^{t_a} 7^{k_a}$$

$$t_a + t_b \geq 15$$

$$t_a = t_b + t_c = 28$$

$$28 - t_c \geq 15$$

$$t_c \leq 13$$

$$2^{15}$$

$$\begin{array}{r} 2^{11} \\ 2^4 \\ 2^{13} \\ \hline 2^{16} \end{array}$$

$$m_a + m_b + m_c \geq 29 - m_b$$

$$t_b + t_c \geq 14$$

$$28 + t_c \geq 17$$

$$t_c \leq 11$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11900 \\ - 10289 \\ \hline 1611 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 10000 \\ 289 \\ \hline - 10289 \\ \hline 71400 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$m_a + m_b \geq 11$$

$$39 - m_c \geq 11$$

$$m_c \leq 28$$

$$11219$$

$$\begin{array}{r} 1611 \\ - 4 \\ \hline 1615 \\ - 71 \\ \hline 1544 \\ - 89 \\ \hline 1455 \end{array}$$

$$10000 + 289 - 11900$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

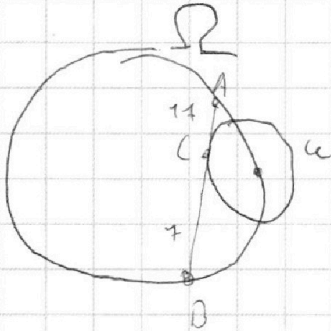
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(a, b) = 1$

$49b^2 - 4b^3$

13



$\frac{a+b}{p}$
 $\frac{(a+b)^2 - 9ab}{p}$

~~$a+b = p$~~

сокр. p

g, p

g
 $mp = 5$

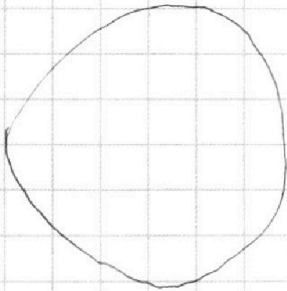
$\frac{100 + 8}{100 + 8} =$
 $\frac{10000 + 64 - 7 \cdot 1008}{10000 + 64 - 7 \cdot 1008} =$
 $\frac{108}{10064 - 7056} = \frac{108}{3008}$
 $\frac{108}{11 \cdot 7} = \frac{108}{77}$

$a = 4$
 $b = 5$

$\frac{4+5}{16 - 4 \cdot 5 + 25}$

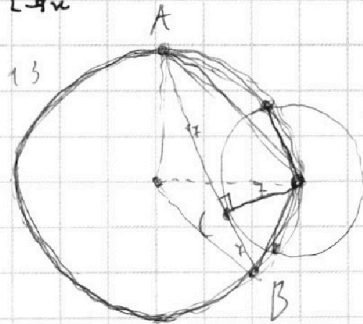
$\frac{11+4}{11+49 - 4 \cdot 7 \cdot 11}$

$\frac{18064}{9600} = 464$



$(1-9x)(1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 1-9x) = 0$

$2 - 9x - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$



$-7 + 3\sqrt{3} < 0$
 $3\sqrt{3} \sqrt{4}$
 $27 \sqrt{49}$

14

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$\frac{D}{a} = 9 - 6 = 3$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$D = 9 - 4 \cdot 3 =$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$3x^2 - 6x + 2 \leq 3x^2 + 3x + 1$

$1 - 9x \leq 0$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$3x^2 - 6x + 2 - 2(1-9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1-9x)^2 = 3x^2 + 3x + 1$

$(1-9x) - 2(1-9x)\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (1-9x)^2 = 0$

