



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N^o. 7. П.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, что $a, b, c \neq 0$.

Поэтому $a \cdot b : 2^{15} \cdot 7^{19}$, что $ab \geq 2^{15} \cdot 7^{19}$
 аналогично: $ab \geq 2^{15} \cdot 7^{19}$
 $b \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$
 $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

Применив к введенных неравенств $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$
 ~~$abc \geq 2^{55} \cdot 7^{34}$~~

П.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, что $abc \in \mathbb{N}$,
 поэтому $abc \geq 2^{27+1} \cdot 7^{39} = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

~~Покажем, что некая оценка достигнута.~~

~~Пусть $a = 2^{11} \cdot 7^{19}$
 $b = 2^{12} \cdot 7^{20}$
 $c = 2^{15} \cdot 7^{20}$~~

Пусть $a = 2^\alpha$, $b = 2^\beta$, $c = 2^\gamma$
 $\alpha + \beta + \gamma = 39$

Тогда $ac : 7^{\alpha+\gamma}$, но $ac : 7^{39}$,

поэтому $\alpha + \gamma \geq 39$,
 то есть $\min(\alpha + \gamma) = 39$.

П.к. $ac : 7^{39}$, что и $abc : 7^{39}$
 поэтому $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Покажем, что некая оценка достигнута:

Изм.:

$$\begin{aligned} a &= 2^{11} \cdot 7^{19} \\ b &= 2^{12} \cdot 7^{20} \\ c &= 2^{15} \end{aligned}$$

Тогда $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Немногую проверим и
 докажем континуальность пар
 из соответствующих степеней
 2-октаэдров и септиков.

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N_3^0 . \quad 24 \sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 13 \cdot 33} - 169$$

$$13^4 = (169)^2 = (170-1)^2 = 28900 - 2 \cdot 170 + 1$$

$$13^4 + 17^2 \cdot 13 \cdot 33 = 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + 17^2 \cdot 13 \cdot 33 =$$

$$= 28901 + 17(17 \cdot 13 \cdot 33 - 20) =$$

$$= 28901 + 17(17 \cdot 13 \cdot 33 - 19 - 1) =$$

$$= 28901 + 17(19 \cdot (17 \cdot 33 - 1) - 1) =$$

$$= 28901 + 17(19 \cdot 560 - 1) =$$

$$= 28901 + 17(10639) =$$

$$= 28901 + 180863 =$$

$$= 209764$$

$$\text{Ответ: } 24 \sqrt{209764} - 169$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \\ 17 \\ \hline + 231 \\ 33 \\ \hline 561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \times 19 \\ \hline 3040 \\ 560 \\ \hline 10640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10639 \\ \times 17 \\ \hline 79973 \\ 10639 \\ \hline 180863 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28901 \\ 180863 \\ \hline 209764 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Уз условие следует, что $\text{НОД}(a; b) = 1$.

$$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 2ab - 7ab = (a+b)^2 - 9ab.$$

Поскольку

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}.$$

Если это дробь можно сократить на m ,

то $a+b : m$, но т.к. $(a; b) = 1$, то $a \not\mid m$ и $b \not\mid m$

(Если $a : m$ и $a+b : m$, то $a \mid b : m \Rightarrow \text{НОД}(a; b) \geq m$)

Но т.к. $(a+b) : m$, то и $(a+b)^2 : m$.

Но т.к. дробь сокращена на m , то $(a+b)^2 - 9ab : m$

но т.к. $(a+b)^2 : m$, то и $9ab : m$, но $a \not\mid m$ и $b \not\mid m \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9 : m \Rightarrow \boxed{m \leq 9}.$$

Проверим варинт такие a и b , что $\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$ сокращено на 9 :

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 5 \end{aligned} \quad \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81(-100)} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: при $m = 9$.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

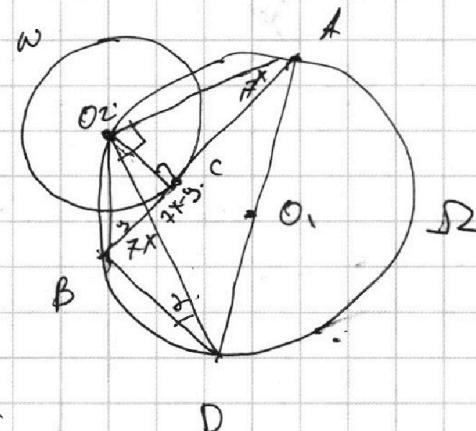
№ 3.

Пусть $AC = 17x$,
тогда $BC = 7x$.

Очевидно, $\triangle O_2BC$ - прямоугольник.

тогда $\tan \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BC} = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$.

Продолжим AO_1 до пересеч. с Γ_2 ,
когда она пересекаетася в т. D ,
тогда AD - диаметр $\Rightarrow \angle DO_2A = \frac{\pi}{2}$.



По т. Пифагора для $\triangle O_2CA$: $O_2A = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 289x^2}$

По т. Пифагора для $\triangle O_2AD$: $O_2D = \sqrt{AD^2 - AO_2^2} = \sqrt{26^2 - 49 - 289x^2}$

$\angle O_2BA = \angle O_2DA$, как вписаные $\Rightarrow \tan \angle O_2BA = \tan \angle O_2DA = \frac{1}{x}$

Угл. $\triangle O_2AD$: $\tan \angle O_2DA = \frac{O_2A}{O_2D} = \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{\sqrt{26^2 - 49 - 289x^2}}$,

т.к. $\tan \angle O_2DA = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{\sqrt{(26 - 7)(26 + 7) - 289x^2}}$$

$$\sqrt{19 \cdot 33 - 289x^2} = x \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$19 \cdot 33 - 289x^2 = x^2 (49 + 289x^2)$$

$$19 \cdot 33 - 289x^2 = 49x^2 + 289x^4$$

$$x^2 = t$$

$$289t^2 + (49 + 289)x^2 - 19 \cdot 33 = 0$$

$$289t^2 + (49 + 289)t - 19 \cdot 33 = 0$$

$$D = (49 + 289)^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= (2 \cdot 169)^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 = 4 \cdot 13^4 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= 4 (13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33)$$

$$\text{Получаем } t = \frac{338 + 2\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33}}{2} = -169 + \sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33}$$

$$\text{Получаем } x = \sqrt{\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} - 169}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N_9. \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Обозначим ~~$3x^2 - 6x + 2$~~ $3x^2 - 6x + 2 = a \geq 0$
 $3x^2 + 3x + 1 = b \geq 0$.

Замечаем, что $a - b = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$.

Тогда исходное уравнение имеет вид:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b, \quad a, b \geq 0$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases}$$

1) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$a = b, \quad a \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$3x = 1 \quad \text{Проверка: } 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \neq 0$$

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 > 0$$

Значит, $x = \frac{1}{3}$ - реш.

2) $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = 1^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2 \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$$
$$6x^2 - 3x + 2 = -2 \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Замечаем, что краял всегда неотрицательна, т.к.

$$b \geq 0 : \sqrt{b} \geq 0. \quad 6x^2 - 3x + 2, D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 9 - 48 < 0.$$

Проверяем, что $6x^2 - 3x + 2$ - это выражение с вещественными коэффициентами
квадратичной (6>0) и отрицательным дискриминантом. Значит
 $x = 6x^2 - 3x + 2 > 0$. Но проверку $x = 6x^2 - 3x + 2 \neq -2 \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$ (т.к. краял всегда неотрицательна)



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N^o 6. *написать*

$$\begin{cases} \alpha x + y - 8\beta = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

а: 36: 2 реш.

Построим график системы неравенств:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \quad - \text{окр. с центром в т. } (0;0) \text{ и радиусом } 1. \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 &= 0 \quad - \text{окр. с центром в т. } (0;12) \text{ и радиусом } 4. \end{aligned}$$

Эти окружности вида

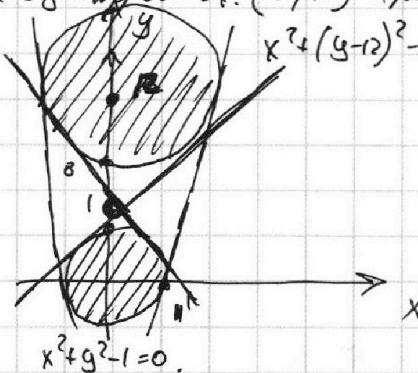
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Значение выражения $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2$
будет отрицательным только
если x и y лежат внутри
этой окружности и больше ее радиуса.

Таким x и y - все окр. решени

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ достигаются
только для x и y на этой

окр.



Комбинирование всех 2-х нерв. ≤ 0 , можно если
одно из них ≤ 0 а второе ≥ 0 . Поэтому
тогда $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$.

Условие наложено, т.к. решение окружностей - это
все пересечение, что можно
записать с помощью

$$\alpha x + y - 8\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\alpha x + 8\beta \quad - \text{это уравнение прямой}$$

Установлено доказательство Задачи, что если прямая пересекает
какую-либо окружность, то решения будут состоять из этого.
Причем единонинческий возможный случай - это
когда прямая $y = -\alpha x + 8\beta$ касается обеих окружностей.

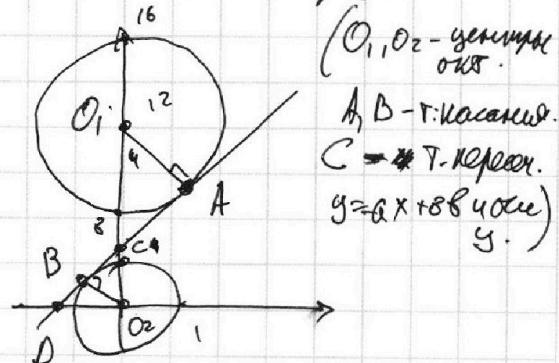
1) Рассмотрим случай, когда прямой
попадет на рисунке:

$$\angle BCO_2 = \angle O_1CA \quad (\text{как вертикальные})$$

$$\angle O_2BC = \angle O_1AC = 90^\circ \quad (\text{рад. б. кас.})$$

Значит, $\triangle O_1CA \sim \triangle O_2CB \quad (B \Rightarrow)$

$$\Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A}{BO_2} = \frac{9}{1}$$



На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6. Установление.

$$O_1C = 4CO_2 \quad O_1O_2 = 12 = O_1C + CO_2 = 5CO_2 \\ CO_2 = \frac{12}{5}$$

Расстояния $\triangle BO_2C$:

$$BC = \sqrt{O_2C^2 - BO_2^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{25}{25}} = \frac{CO_2}{5} = \frac{12}{5}, \quad OB_2 = 1 \\ \sqrt{\frac{119}{25}} = \frac{1}{5} \sqrt{119}.$$

$$\tan \angle BCO_2 = \frac{BO_2}{BC} = \frac{1}{\frac{1}{5} \sqrt{119}} = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$\angle DO_2C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle CDO_2 = \frac{\pi}{2} - \angle BCO_2 \Rightarrow \tan \angle CDO_2 =$$

$$\tan \angle CDO_2 = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{119}}{5}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{119}} \\ &\text{Наклонка} \\ &|a| = -\frac{\sqrt{119}}{5}. \end{aligned}$$

$y = -ax + b$; $-a$ — это наклоне угла прямой, поэтому $-a = \tan \angle CDO_2 = \frac{\sqrt{119}}{5}$

Заметим, что если отразить прямую AB относительно оси O_2 , то новый угол может быть косинусом, а a имеет "з" конечный свой знак, тогда $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$.

2) Расстояния 2-й альтернативы:

Очевидно, $\triangle XAO_1 \sim \triangle XBO_2$:

$$\frac{XO_2}{XO_1} = \frac{O_2B}{O_1A} = \frac{1}{4} \quad 4XO_2 = XO_1$$

$$O_1O_2 = 12 = XO_1 - XO_2 = 3 XO_2$$

$$XO_2 = 4$$

$$= \sqrt{15}$$

$$\cot \angle XBO_2 = \frac{XB}{BO_2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

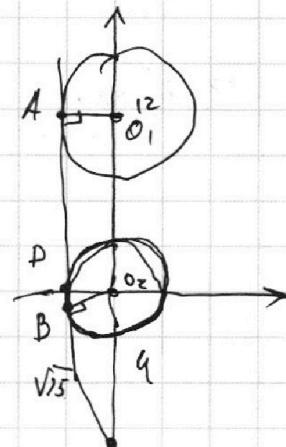
$$\angle DO_2X = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle XDO_2 = \frac{\pi}{2} - \angle DXO_2 \Rightarrow \cot \angle XDO_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}, \quad \angle ADO_2 = \pi - \angle XDO_2 = \frac{\pi}{2} + \angle DXO_2$$

$$-a = \cot (\angle ADO_2) = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \angle DXO_2 \right) = -\cot \angle DXO_2 = -\sqrt{15}. \quad |a| = \sqrt{15}$$

Аналогично первому альтернативному $a = -\sqrt{15}$ тоже подходит.

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{1}{5} \sqrt{119} \right\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$13^4 = 169^2 \quad ? \quad 7(70-1)^2 : 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + \\ + 17^2 \cdot 33 \cdot 19$$

$$\begin{aligned} &= 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33 - \\ &= 28900 + 1 - 17(19 \cdot 33 - 20) = \\ &= 28900 + 1 - 17(19 \cdot 32 + 1) = \\ &= 28901 - 17 \cdot 19 \cdot 32 + 17. \end{aligned}$$

$$20 \cdot 32 = 32 \cdot 640 - 32 = 608.$$

$$28901 - 608 + 17.$$

$$\begin{array}{r} 28901 \\ - 608 \\ \hline 28293 \end{array}$$

$$28293 + 17 = 28300.$$

$$209764$$

$$\begin{array}{r} 100^2 = 1000, \\ 104^2 = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 104 \\ 104 \\ \hline 916 \\ + 104 \\ \hline 10816 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

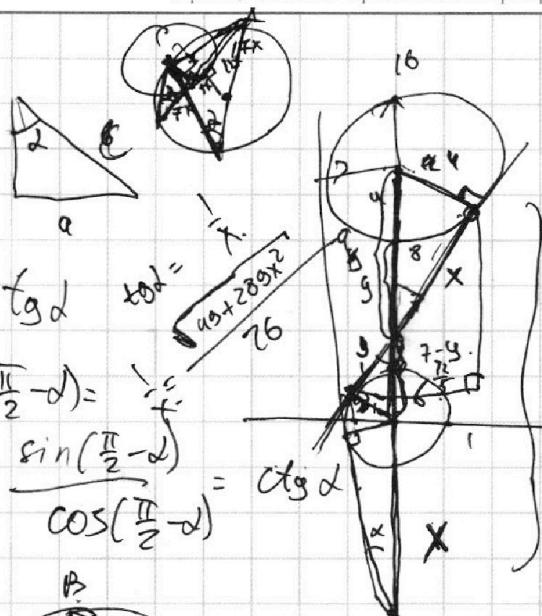
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



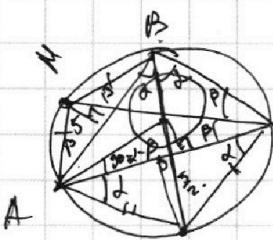
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \operatorname{ctg}\alpha \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}$$

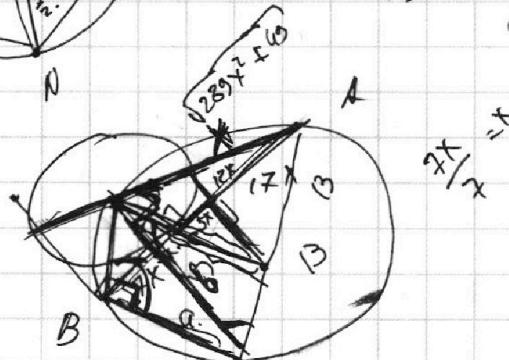


$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2AN}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{AM}$$

$$\operatorname{tg}(90-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90-\alpha-\beta) = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$

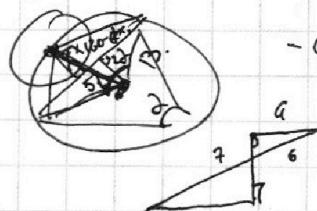


$$\left(\sqrt{289x^2 + 49} + 7 \right)^2 - 2q^2 x^2 = \left(\frac{7 \cdot 17}{24} \right)^2$$

$$289x^2 + 49 + 49 + 14\sqrt{289x^2 + 49} + 49 = \frac{7 \cdot 17}{24}$$

$$-41x^2 + 2\sqrt{289x^2 + 49} + 17^2 - 2q^2 = -7 \cdot 41x$$

$$(7x)^2 + (17x)^2 - 2q^2 = 0, \quad -7 \cdot 41x^2 + 2 \cdot 7^2 + 14\sqrt{289x^2 + 49} = \frac{7 \cdot 17^2}{24}$$



$$-41x^2 + 14 + 2\sqrt{289x^2 + 49} = \frac{7 \cdot 17^2}{24}$$

$$\frac{x \cdot 17}{24} - 14 = 0,$$

$$\begin{aligned} AB &: 2^{15} 7^{11} \quad c = 2^9 \\ BC &: 2^{17} \cdot 7^{16} \quad b = 2^8 \\ AC &: 2^{23} \cdot 7^{23} \quad a = 15. \end{aligned}$$

$$\sqrt{6+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 12. \quad c = 15. \\ \frac{4}{x} = \frac{1}{y} \quad abc \geq 2^{23} \cdot 7^{23} \\ 4y = x$$

$$\begin{aligned} abc &\geq 2^{23} \cdot 7^{23} \\ a = 48, \quad &a+b \geq 15 \\ a+b = 12, \quad &b+d \geq 16 \\ 56 = 12, \quad &d+d \geq 23 \\ 3x = & \quad b = \frac{12}{5}, \quad a+b+d \geq 28 \\ 3x = & \quad -\operatorname{sin}\alpha \\ & \quad 2(\alpha + \beta + d) \geq 55. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{17}{24} & \quad \alpha + \beta + d \geq 28. \quad 17 \\ \frac{7 \cdot 17}{24} & \quad \beta - d = -8. \\ & \quad \beta + d = 17. \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\text{Пусть } AC = 17x, \text{ тогда } BC = 7x.$$

Следует, $\triangle O_2BC$ - прямоугольный,
тогда $\tg \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BC} = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$

Продолжим AO_1 до пересечения с Γ_2 .

Точка O_2 тоже пересекает BTD .

AD -диаметр, поэтому $\angle AOD = \frac{\pi}{2}$.

$\angle O_2BC = \angle O_2DA$ как вписанные.

Поэтому $\tg \angle O_2BC = \tg \angle O_2DA = \frac{1}{x}$

$$\text{Но } \angle O_2DA = \tg \angle O_2DA = \frac{O_2A}{AD} = \frac{O_2A}{26}.$$

Получаем, $\frac{O_2A}{26} = \frac{1}{x}$.

$$\tg \angle O_2CA : O_2A = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$\text{Но } \angle O_2CA : \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{26} = \frac{1}{x}$$

$$289 + 49 =$$

$$= 200 + 50 - 2 = \frac{x \sqrt{49 + 289x^2}}{26} = 26.$$

$$= 340 - 2 = \sqrt{49x^2 + 289x^4} = 26.$$

$$\cdot 338.$$

$$338 = 2 \cdot 169$$

$$49x^2 + 289x^4 = 26^2$$

$$x^2 = t$$

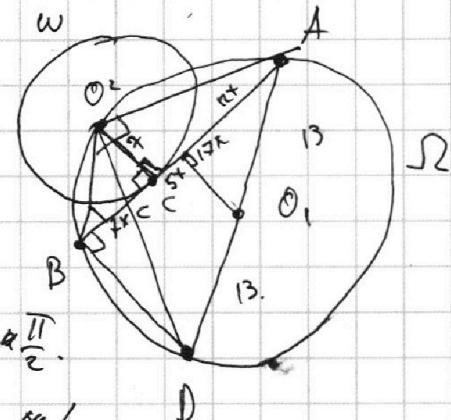
$$289t^2 + 49t - 26^2 = 0$$

$$D = 49^2 + 4 \cdot 289 \cdot 26^2$$

$$49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 289 + 289^2 + 4 \cdot 289 \cdot 169 \cdot 33 = 19 \cdot 33 - 289x^2$$

$$49^2 + 289^2 (2 \cdot 49 + 289 + 4 \cdot 19 \cdot 33) 26^2 - 987^2 = (26-7)(26+7) =$$

$$= 19 \cdot 33.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

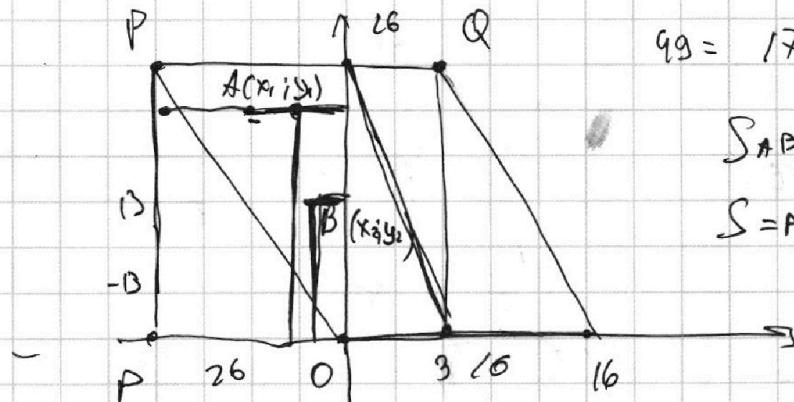
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$7 = \sqrt{17}$$



$$g_3 = 17x.$$

$$S_{ABC} = \frac{25}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \sin(2(\alpha + \beta))$$

$$S = P \cdot g_4 = \frac{25}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \sin(2(\alpha + \beta))$$

$$\varepsilon = \frac{25}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot P}$$

$$AH = P - BC.$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14.$$

$$\begin{aligned} q &= \left(2^{\frac{11}{14}}\right) \cdot 7^{20} \\ c &= \left(2^{\frac{13}{12}}\right) \cdot 7^{20} \\ b &= \left(2^{\frac{5}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$q = 2^{\frac{11}{14}}$$

$$c = 2^{\frac{13}{12}}$$

$$\alpha + \beta$$

$$\frac{25 \sin(2(\alpha + \beta))}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta (P - BC)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$$

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{18} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

$$\min abc$$

$$abc \geq 2^{55} \cdot 7^{68} = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$\begin{aligned} q &= 2^{\frac{11}{14}}, \quad abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34} \\ c &= 2^{\frac{13}{12}} \\ b &= 2^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

$$AI = ?$$

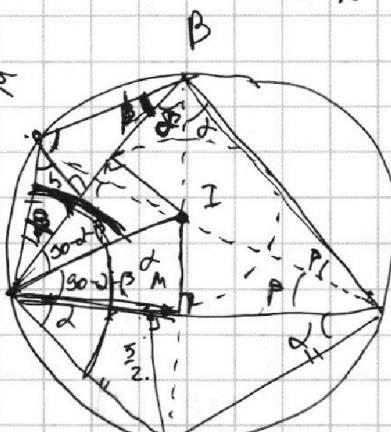
$$\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} = 2$$

$$AC = 2 \frac{5}{2 \operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$AB = \frac{10}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$BC = \frac{5}{2x} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \frac{25}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \\ 3x^2 - 6x + 2 \\ 6x^2 - 3x + 2 \end{cases} = 1.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1.$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ab > 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc > 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac > 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{38 \cdot 2}$$

$$abc \geq 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{39} = 2^{27.5} \cdot 2 \cdot 7^{39} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\sqrt[2]{2^{59}} \cdot 2 = 2^{27} \sqrt{2}$$

$$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{39}$$

$$\alpha = 2^\circ$$

$$\beta = 2^\circ$$

$$\gamma =$$

$$\delta + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

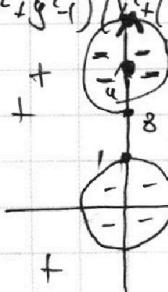
$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha x + \gamma - \beta \gamma = 0. \quad 2\beta = 29$$

$$(x^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 1) \beta \gamma = 12$$



$$\alpha = 2^\circ$$

$$\beta = 2^\circ$$

$$\gamma =$$

$$\delta + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$\$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

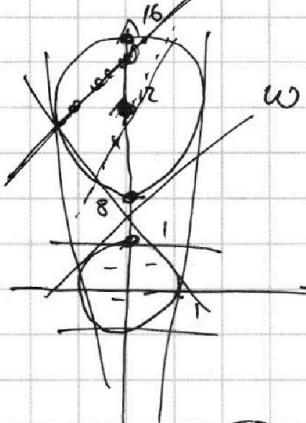
- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

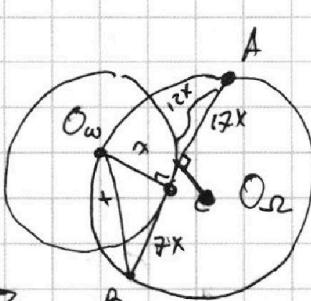


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x^2 - 2x + 1) = 1$$



$$3(x-1)^2 =$$



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

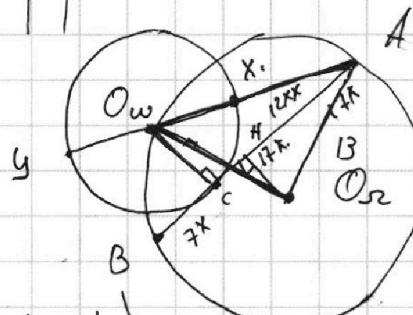
$$AB = ?$$

$$w = 7$$

$$\sqrt{R} = 13.$$

$$AC = 17x$$

$$BC = 7x.$$



$$3\left(x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$O_R H = \sqrt{13^2 - 14px^2}$$

$$AO_w = \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$AX = \sqrt{49 + 289x^2} - 7$$

$$AY = \sqrt{49 + 289x^2} + 7.$$

$$289x^2 = 49 + 289x^2$$

$$3\left(x^2 + x + \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \\ &x = -\frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \\ &= \end{aligned}$$

$$3\left(x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 8x.$$

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$a > 0$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 2 &= a \\ 3x^2 + 3x + 1 &= b. \end{aligned}$$

$$a - b = 1 - 8x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b.$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a} - a &= \sqrt{b} - b \\ a - \sqrt{a} &= b\sqrt{b}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ a-b=1 \end{array}}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (a - b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$(a - b) = (a - b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = a^{1/2} - b^{1/2}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} \cdot a = b \cdot b$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = 1$$