



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① Числа 1

$$\text{Пусть } a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7}; b = 2^{b_2} \cdot 7^{b_7}; c = 2^{c_2} \cdot 7^{c_7}$$

Заметим, что если a, b , или c содержит ^{примитивные} множители, отличные от 2 и 7, то abc не минимально, т.к. ~~его~~ можно упростить эти множители.

Из условия следует, что:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{14 + 17 + 20}{2} = 25,5$$

$$\Leftrightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \quad (\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \\ a_7 + c_7 \geq 37 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq \frac{10 + 17 + 37}{2} = 32$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 32 \end{cases}$$

Покажем, что минимальное abc достигается при минимальном значении $a_2 + b_2 + c_2 + a_7 + b_7 + c_7$, т.к. независимо от него зависит. Минимальное значение $a_2 + b_2 + c_2 + a_7 + b_7 + c_7$, в свою очередь, достигается при $a_2 + b_2 + c_2 = 26$, $a_7 + b_7 + c_7 = 32$; пример: $a_2 = 9$, $b_2 = 6$, $c_2 = 11$, $a_7 = 10$, $b_7 = 6$, $a_7 = 2$, $c_7 = 27$. Тогда $a = 2^9 \cdot 7^{10}$, $b = 2^6 \cdot 7^6$, $c = 2^{11} \cdot 7^{27}$, легко убедиться, что условия соблюдаются.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①. Часть 2

Тогда $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ и мы доказали, что это
наименьшее из вариантов.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow a, b$ взаимно просты $\Leftrightarrow (a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ сократима на $m \Rightarrow \begin{cases} a+b \equiv 0 \pmod{m} & (1) \\ a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \pmod{m} & (2) \end{cases}$

$$(1) b \equiv -a \pmod{m}$$

Заметим, что т.к. a, b взаимно просты, то

a и m взаимно просты, ~~также $a+b \equiv 0 \pmod{m}$ и $a, b \equiv m$~~

~~аналогично~~ предположим противное, пусть $(a, m) = k$,

тогда $a+b = m \cdot \begin{matrix} \text{н.к. } a+b \equiv m, \\ :k \quad \quad :k \end{matrix} x \in \mathbb{Z}$, но тогда

$b \equiv k \Rightarrow (a, b) \neq 1$. Противоречие $\Rightarrow (a, m) = 1$,

аналогично $(a, b, m) = 1$

$$(2) a^2 + 6a^2 + a^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$8a^2 \equiv 0 \pmod{m}$, т.к. $(a, m) = 1$, m - делитель 8,

$$\Rightarrow m \leq 8$$

Пример для $m=8$: $a=3, b=5$

$$\frac{3+5}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 5+5^2} = -\frac{8}{64}, \text{ действительно уробь сократима на } 8.$$

Ответ: при $m=8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Заметим, что $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0$, т.к. дискриминант положительного квадратного трёхчлена отрицателен ($D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$) и коэффициент при x^2 положителен. $\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0$

Для дадим на t наше равенство, получим

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)t$$

$$-7x + 2 = (2 - 7x)t \Rightarrow \begin{cases} t = 1 & (1) \\ 2 - 7x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$1) t = 1: \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\text{Получим } \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \leq 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 0] \\ x \in [\frac{1}{2}; 2] \end{cases} \text{ Такая система}$$

не имеет решений \Rightarrow при $t = 1$ решений нет.

$$2) 2 - 7x = 0 \quad x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + 3} - \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{28}{49} + 1} = 0$$

$$\frac{\sqrt{85}}{7} - \frac{\sqrt{85}}{7} = 0, \text{ это действительно так.}$$

Ответ: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

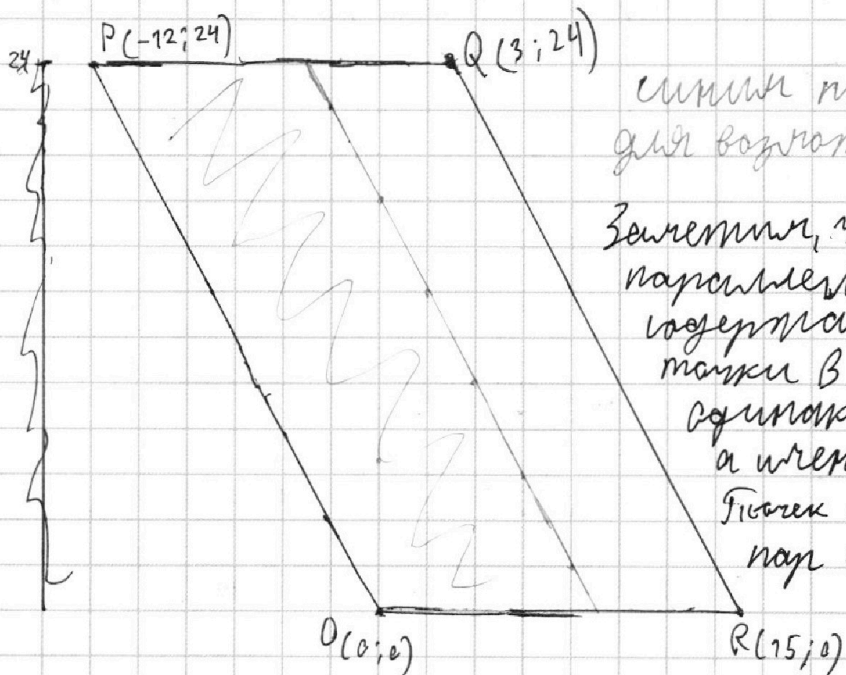
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

Будем считать, что точка A зафиксирована, тогда
 B - точки с целыми координатами в параллелограмме,
удовл. $y_2 = (-2)x_2 + (12 + 2x_1 + y_1)$. Заметим, что
 QR ~~лежит~~ ^{возможна} на прямой $30 - 2x - (2)x + 30$ и пар.
к прямой с точками B , что по условию $2x_1 + y_1 \leq 18$, иначе
к прямой с точками B ^{возможна} лежит вне параллелограмма



линии показана область
для возможных точек A

Заметим, что т.к. QR перпендикулярна
параллельна прямой,
содержащей возможные
точки B , то для \forall т. A
существует кол-во т. B ,
а именно $13 \cdot \frac{24 - 0}{2} = 156$
Поскольку $A \in 10 \cdot 13 = 130$, тогда
пар A и B $130 \cdot 13 = 1690$

Ответ: 1690.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



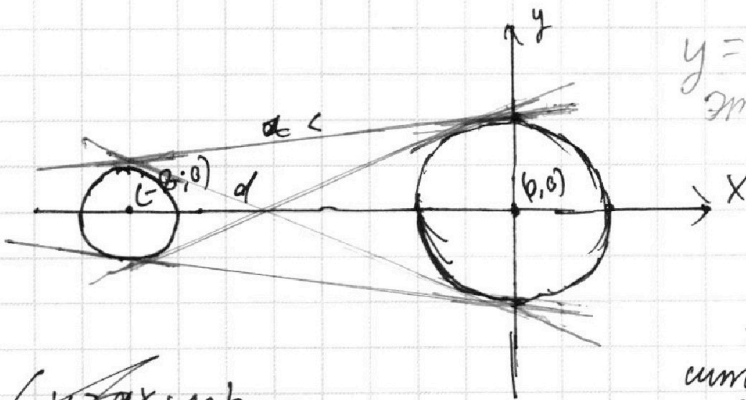
6. Часть 1

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

1) ~~реш~~ $y = ax + 10b$ - прямая

2) решения лежат на ~~внутри~~ (включая границы) окружностей, на их пересечении общие точки.

Тогда ровно 2 решения может быть только в том случае, если $y = ax + 10b$ - касательная к этим 2 окружностям



$y = ax + 10b$ - прямая из этих 4 прямых общих касательных

2 прямые симметричны относительно оси $Ox \Rightarrow$ достаточно найти только 2: ca и ca касается левой ок

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - 4 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

можно иметь ровно 1 решение

$$\begin{cases} D_1 = 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2-4) = 0 \\ D_2 = (0ab+16)^2 - 4(a^2+1)(100b^2-1) = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. Часть 2

$$\begin{cases} 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2-4) = 0 \\ 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 4(a^2+1)(100b^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$640ab + 256 = 4(a^2+1) \cdot 3$$

$$640ab + 256 = 12a^2 + 12$$

$$12a^2 - 640ab - 244 = 0$$

$$6a^2 - 320ab - 122 = 0$$

$$3a^2 - 160ab - 61 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 80^2 + 3 \cdot 61 = 1600 + 183 = 1783$$

$$a_1 = \frac{16080 + \sqrt{\frac{D}{4}}}{3} \quad a_2 = \frac{80 - \sqrt{\frac{D}{4}}}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$+ 1 - \frac{3}{2} +$$

$$\frac{1}{2} \quad 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \end{cases}$$

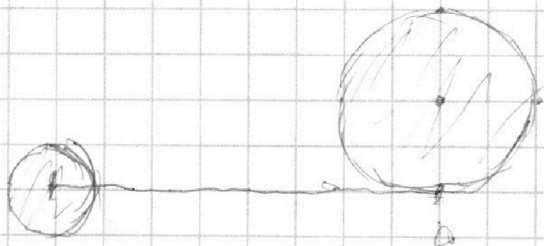
$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$y = ax + 10b$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} K$$

$$a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7}$$

$$\# a_2 + b_2 \geq 14$$

$$a_7 + b_7 \geq 10$$

$$a_2 + c_2 \geq 20$$

$$a_7 + c_7 \geq 37$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$b_7 + c_7 \geq 17$$

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \\ a_7 + c_7 \geq 37 \end{cases}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{27}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$\# a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{20 + 14 + 17}{2} = 25,5$$

$$\# c = b + 3$$

$$\# c = 11$$

$$a = 9$$

$$b = 6$$

$$5 + 8 + 18 + 1 = 32$$

$$c = 27$$

$$b = 0$$

$$a = 10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$[a, b] = 1$$

$$(a, b) = 1 \quad (a+b)^2 - 8ab$$

$$p+q \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow q \equiv -p \pmod{m}$$

$$p^2 - 6pq + q^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$p^2 + 6p^2 + p^2 \equiv 0$$

$$8p^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

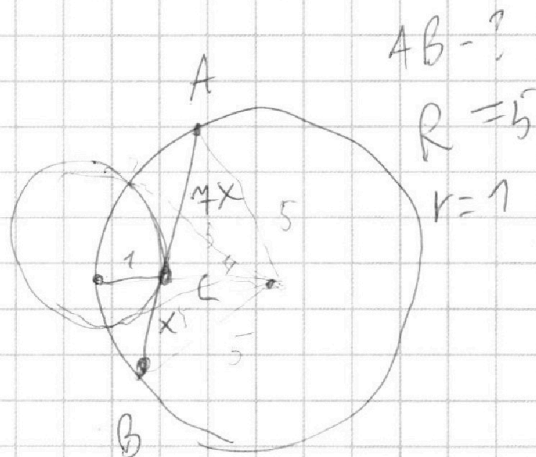
$$ax \equiv$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\frac{3+5}{}$$

$$q = 6 \cdot 15 + 25$$

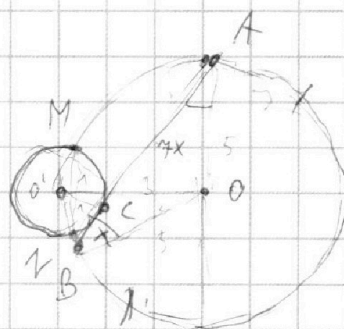
$$36 - 90 = -54$$



$$AB = ?$$

$$R = 5$$

$$r = 1$$



$$R^2 - MO^2 = r^2 - MO'^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$D = 25 - 24 = 1 \quad D \geq 0$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = 1$$

$$-7x + 2$$

$$2 - 7x = 0$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3$$

$$\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + 3 = -\frac{62}{49} + 3$$

$$14x - 62 = 85$$

$$\frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 7$$

$$36 + 49 = 85$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = \cancel{2-7x} + 1$$

$$4x^2 - 3x + 3 = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$D \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

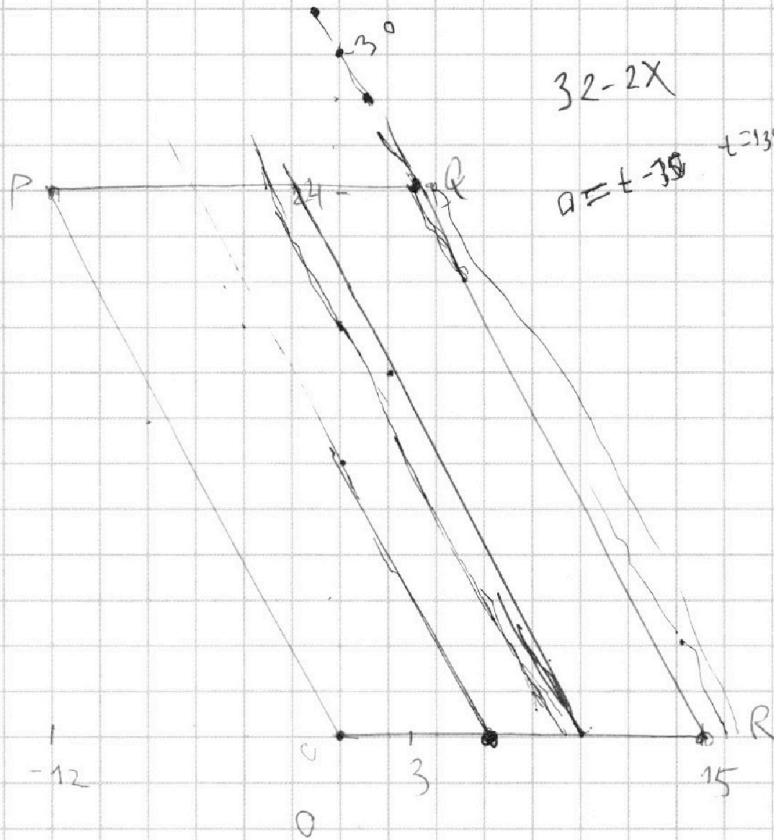
- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$



$$2x_2 + y_2 = 12$$

$$y_2 = 12 - 2x_2$$

$$y_2 = 12 - 2x_2 + 2x_1 - y_1$$

$$y_2 = (-2)x_2 + (12 + 2x_1 - y_1)$$

$$QR = kx + b$$

$$30 - 2x$$

$$2x_1 + y_1 \leq 18$$

$$y \leq 18 - 2x_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

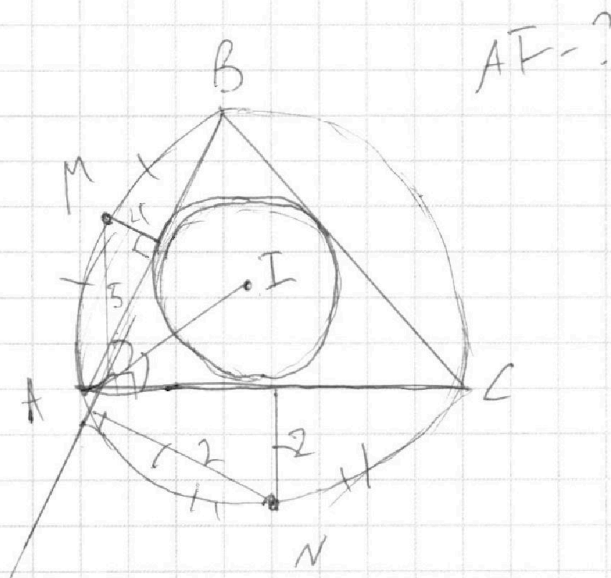
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + 16x + 64 + a^2 y^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0$$

$$D = (20ab + 16)^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 1) = 0$$



$$y = ax + 10b$$

$$x^2 + (ax + 10b)^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D = 400a^2 b^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 0$$