МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

~~1. ab делится на~~ $\cancel{2^{15}7^{11}}$ ~~=> существует такое~~

1. $a, b, c \in N \Rightarrow ab, bc, ac \in N$. ab делится на $2^{15}7^{11}$, ~~существует такое~~ ~~такое~~ ab и $2^{15}7^{11}$ – натуральные числа => существует такое натуральное p, что $ab = 2^{15}7^{11}\cdot p$; аналогично $bc = 2^{17}7^{18}\cdot q$ ($q \in N$) и $ac = 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot r$ ($r \in N$).

2. $ab\cdot bc\cdot ac = 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot p\cdot 2^{17}\cdot 7^{18}\cdot q\cdot 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot r$

$(abc)^2 = 2^{55}\cdot 7^{68}\cdot pqr$

$(abc)^2 = 2pqr\cdot 2^{54}\cdot 7^{68}$

$abc = \sqrt{2pqr\cdot 2^{54}\cdot 7^{68}} = \sqrt{2pqr}\cdot 2^{27}\cdot 7^{34}$.

3. $a, b, c \in N \Rightarrow abc \in N$; $2^{27}\cdot 7^{34} \in N$; $abc = \sqrt{2pqr}\cdot 2^{27}\cdot 7^{34}$.

$2, p, q, r \in N \Rightarrow 2pqr \in N \Rightarrow \sqrt{2pqr}$ – натуральное или иррациональное число (иначе $\sqrt{2pqr} = \frac{m}{n}$, где $m, n \in N$, $n \neq 1$, m и n взаимно просты, тогда $2pqr = \frac{m^2}{n^2}$, где $m^2 \in N$, $n^2 \in N$, $n^2 \neq 1$, m^2 и n^2 взаимно просты, из чего следует, что $2pqr \notin N$, что неверно). Если $\sqrt{2pqr}$ – иррациональное число, то $\sqrt{2pqr}\cdot 2^{27}\cdot 7^{34}$ как произведение иррационального и натурального также иррационально, то есть $abc = \sqrt{2pqr}\cdot 2^{27}\cdot 7^{34} \notin N$, что неверно => $\sqrt{2pqr}$ – натуральное число.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\sqrt{2pqr}$ – натуральное число $\Rightarrow$ $2pqr$ – полный квадрат натурального числа.

$p, q, r \in \mathbb{N} \Rightarrow p, q, r \geq 1 \Rightarrow 2pqr \geq 2$.

5. Наименьшее значение $abc = \sqrt{2pqr} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}$ достигается при наименьшем значении $\sqrt{2pqr}$, наименьшее значение $\sqrt{2pqr}$ – при наименьшем значении $2pqr$. $2pqr \geq 2$, $2pqr$ – полный квадрат. 2 и 3 не являются полными квадратами $\Rightarrow$ наименьшее значение $2pqr$ – это $4 = 2^2$, и тогда $abc =$
$= \sqrt{2pqr} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} = \sqrt{4} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} = 2^{28} \cdot 7^{34}$.

4. $abc = \cancel{a \cdot bc = a \cdot q \cdot 2^{17}}$ $b \cdot ac = b \cdot r \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc$ делится на 7^{39}. $abc = \sqrt{2pqr} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} = (b \cdot r \cdot 2^{23}) \cdot 7^{39}$

$\sqrt{2pqr} \cdot 2^4 = b \cdot r \cdot 7^5 \Rightarrow \sqrt{2pqr} \cdot 2^4$ делится на 7^5. Т.к. 2 и 7 – различные простые числа, но 2^4 не делится на 7 в какой-либо натуральной степени $\Rightarrow \sqrt{2pqr} \vdots 7^5$.

5. $\sqrt{2pqr}$ – натуральное число, $\Rightarrow 2pqr$ – полный квадрат. $\sqrt{2pqr}$ делится на $7^5 \Rightarrow$ $2pqr$ делится на $7^{10} \Rightarrow 2pqr = t \cdot 7^{10}$, где $t \in \mathbb{N}$.
Т.к. $2pqr$ – полный квадрат, то $2pqr$ делится на любое простое в чётной степени. Т.к. $2pqr = pqr \cdot 2$, то $2pqr$ кратно $2^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2pqr$ кратно 2^2. Наименьшее натуральное число, кратное 2^2 и 7^{10} – это $2^2 \cdot 7^{10} \Rightarrow$ наименьшее значение $2pqr$ – $2^2 \cdot 7^{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ наименьшее значение $abc = \sqrt{2pqr} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}$ – это
$\sqrt{2^2 \cdot 7^{10}} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2.

1. $(a+b)$ и $(a^2-7ab+b^2)$ можно сократить на $m \Rightarrow \frac{a+b}{m} \in \mathbb{N}$ (числитель и знаменатель натуральные, числитель кратен знаменателю). Пусть $\frac{a+b}{m} = x$.

~~2.~~ $\cancel{\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{a^2-7ab+b^2}{m}} = \frac{x}{\frac{a^2+2ab+b^2-9ab}{m}} = \frac{x}{\frac{a+b}{m}\cdot(a+b)-\frac{9ab}{m}} = \frac{x}{x(a+b)-\frac{9ab}{m}}}$

2. $(a^2-7ab+b^2)$ делится на $m \Rightarrow \frac{a^2-7ab+b^2}{m} \in \mathbb{N}$. Пусть $\frac{a^2-7ab+b^2}{m} = y$. Тогда $y = \frac{a^2-7ab+b^2}{m} = \frac{a^2+2ab+b^2-9ab}{m} = \frac{(a+b)^2-9ab}{m} = \frac{a+b}{m}\cdot(a+b) - \frac{9ab}{m} = x(a+b) - \frac{9ab}{m}$. $y \in \mathbb{N}$, $x(a+b) \in \mathbb{N}$, $\frac{9ab}{m} > 0$, $y = x(a+b) - \frac{9ab}{m} \Rightarrow \frac{9ab}{m} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9ab$ делится на m.

3. Докажем, что m не может быть больше 9, от противного: предположим, что $m > 9$. Тогда $\frac{9ab}{m} < ab$. Если бы a и m и b и m были взаимно простыми, то $\frac{9ab}{m}$ не могло бы быть меньше 9 $\Rightarrow$ либо у a и m, либо у b и m есть общий делитель, отличный от 1. Без ограничения общности пусть общий делитель a и m $k > 1$. Тогда $a = pk$, $m = qk$ $(p, q \in \mathbb{N})$. Известно, что

$\frac{a+b}{m} = x \ (x \in \mathbb{N})$

$a + b = xm$

$pk + b = xqk \Rightarrow b = (xq-p)k$. $x, q, p \in \mathbb{N} \Rightarrow xq - p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow b$ делится на k. Но тогда дробь $\frac{a}{b}$ сократима на k. Противоречие $\Rightarrow m \le 9$. При $m = 9$ $\frac{9ab}{m} = ab$, и дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ действительно сократима на m. Так могло оказаться при $a = 1, b = 8$:

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{1-56+64} = \frac{9}{63} = \frac{1}{7}$. **Ответ:** 9.

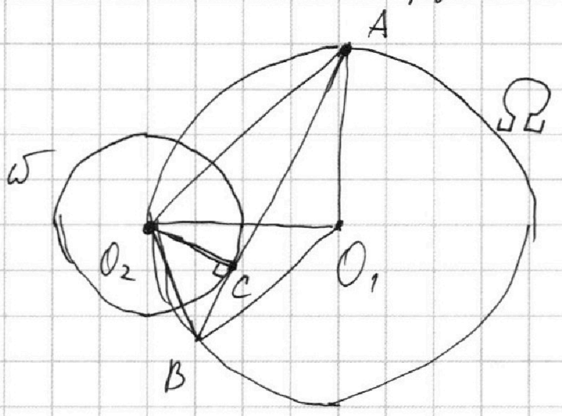
Задача 3.

1. Пусть центр окр. Ω - O_1, окр. ω - O_2.

Условные обозначения:
$\in$ - принадлежность
$\perp$ - перпендикулярность
п/у - прямоугольный (треугольник)
окр. - окружность
т.к. - так как
т. - точка

Существует 2 случая:

I. Точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от AB.



2. Пусть $AB = 24x$, $AC = y$, $CB = z$. Тогда $y : z = AC : CB = 17 : 7 \Rightarrow z = \frac{7}{17} y$;

$y + z = AC + CB = AB = \cancel{x}\,24x \Rightarrow y + \frac{7}{17} y = \cancel{x}\,24x \Rightarrow \frac{24}{17} y = \cancel{x}\,24x \Rightarrow y = 17x \Rightarrow z = 7x$.

3. AB касается окр. ω в т. $C \Rightarrow O_2C \perp AB$ по св-ву точки касания, тогда ΔO_2CB - п/у ($\angle O_2CB = 90°$), ΔO_2CA - п/у ($\angle O_2CA = 90°$) $\Rightarrow O_2B^2 = O_2C^2 + CB^2 =$

$= 7^2 + 7^2x^2$ по теореме Пифагора и $O_2A^2 = O_2C^2 + CA^2 = 7^2 + 17^2x^2$ по теореме Пифагора ($O_2C = 7$, т.к. $C \in \omega$, а радиус ω - 7).

3. Пусть $\angle O_2O_1A = \alpha$, $\angle O_2O_1B = \beta$. В ΔO_2O_1A по теореме косинусов

$O_2A^2 = O_1A^2 + O_1O_2^2 - 2\, O_1A \cdot O_1O_2 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{O_1A^2 + O_1O_2^2 - O_2A^2}{2 O_1A \cdot O_1O_2} = \frac{13^2 + 13^2 - 7^2 - 17^2x^2}{2 \cdot 13 \cdot 13} = \frac{2 \cdot 13^2 - (7^2 + 17^2x^2)}{2 \cdot 13^2} =$

$= 1 - \frac{7^2 + 17^2x^2}{2 \cdot 13^2}$. В ΔO_2O_1B по теореме косинусов $O_2B^2 = O_1O_2^2 + O_1B^2 - 2 O_1O_2 \cdot O_1B \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{O_1O_2^2 + O_1B^2 - O_2B^2}{2 O_1O_2 \cdot O_1B} = \frac{13^2 + 13^2 - 7^2 - 7^2x^2}{2 \cdot 13^2} =$

$= 1 - \frac{7^2 + 7^2x^2}{2 \cdot 13^2}$ ($O_1O_2 = O_1A = O_1B = 13$, т.к. $O_2, A, B \in \Omega$, радиус Ω - 13).

Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1^2 - \left(1 - \frac{7^2 + 17^2x^2}{2 \cdot 13^2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - 1 + \frac{7^2 + 17^2x^2}{2 \cdot 13^2}\right)\left(1 + 1 - \frac{7^2 + 17^2x^2}{2 \cdot 13^2}\right)} =$

$= \sqrt{\frac{O_2A^2}{2 \cdot 13^2} \cdot \left(2 - \frac{O_2A^2}{2 \cdot 13^2}\right)}$; $\sin\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1^2 - \left(1 - \frac{7^2 + 7^2x^2}{2 \cdot 13^2}\right)^2} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3 (продолжение).

3 (продолжение). $\ldots = \sqrt{\left(1-1+\frac{7^2+7^2x^2}{2\cdot 13^2}\right)\left(1+1-\frac{7^2+7^2x^2}{2\cdot 13^2}\right)} =$

$= \sqrt{\frac{O_2B^2}{2\cdot 13^2}\left(2-\frac{O_2B^2}{2\cdot 13^2}\right)}$.

4. В $\triangle AO_1B$ по теореме косинусов

$AB^2 = AO_1^2+O_1B^2-2AO_1\cdot O_1B\cdot\cos\angle AO_1B \Rightarrow \cos\angle AO_1B = \frac{AO_1^2+O_1B^2-AB^2}{2AO_1\cdot O_1B} =$

$= \frac{13^2+13^2-24^2x^2}{2\cdot 13^2} = 1-\frac{24^2x^2}{2\cdot 13^2}$

$\cos\angle AO_1B = 1-\frac{24^2x^2}{2\cdot 13^2}$

$\cos(\angle AO_1O_2+\angle O_2O_1B) = 1-\frac{24^2x^2}{2\cdot 13^2}$

$\cos(\alpha+\beta) = 1-\frac{24^2x^2}{2\cdot 13^2}$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = 1-\frac{24^2x^2}{2\cdot 13^2}$

$\left(1-\frac{O_2A^2}{2\cdot 13^2}\right)\left(1-\frac{O_2B^2}{2\cdot 13^2}\right)-\sqrt{\frac{O_2A^2}{2\cdot 13^2}\cdot\left(2-\frac{O_2A^2}{2\cdot 13^2}\right)\cdot\frac{O_2B^2}{2\cdot 13^2}\left(2-\frac{O_2B^2}{2\cdot 13^2}\right)} =$

$= 1-\frac{24^2x^2}{2\cdot 13^2}$ $\quad |\cdot(2\cdot 13^2)^2 \neq 0$

$(2\cdot 13^2)^2\left(1-\frac{O_2A^2}{2\cdot 13^2}\right)\left(1-\frac{O_2B^2}{2\cdot 13^2}\right)-\sqrt{(2\cdot 13^2)^4\cdot\frac{O_2A^2}{2\cdot 13^2}\cdot\left(2-\frac{O_2A^2}{2\cdot 13^2}\right)\cdot\frac{O_2B^2}{2\cdot 13^2}\cdot\left(2-\frac{O_2B^2}{2\cdot 13^2}\right)} =$

$= (2\cdot 13^2)^2 - 24^2x^2\cdot 2\cdot 13^2$

$(2\cdot 13^2-O_2A^2)(2\cdot 13^2-O_2B^2)-\sqrt{O_2A^2(2\cdot 2\cdot 13^2-O_2A^2)O_2B^2(2\cdot 2\cdot 13^2-O_2B^2)} =$

$= (2\cdot 13^2)^2 - 24^2x^2\cdot 2\cdot 13^2$

Пусть $2\cdot 13^2 = k$:

$(k-O_2A^2)(k-O_2B^2)-\sqrt{O_2A^2(2k-O_2A^2)O_2B^2(2k-O_2B^2)} = k^2-24^2x^2\cdot k$

$k^2-k(O_2A^2+O_2B^2)+(O_2A\cdot O_2B)^2-O_2A\cdot O_2B\sqrt{(2k-O_2A)^2(2k-O_2B)^2} = k^2-24^2x^2\cdot k$

$k(24^2x^2-O_2A^2-O_2B^2)+(O_2A\cdot O_2B)^2 = O_2A\cdot O_2B\sqrt{(2k-O_2A^2)(2k-O_2B^2)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3 (продолжение).
4 (продолжение).
Возведём обе части уравнения в квадрат.

$$k^2(24^2x^2-O_2A^2-O_2B^2)+(O_2A\cdot O_2B)^4+2\cdot k(24^2x^2-O_2A^2-O_2B^2)(O_2A\cdot O_2B)^2=$$

$$=(O_2A\cdot O_2B)^2(2k-O_2A^2)(2k-O_2B^2).$$

5. $24^2x^2-O_2A^2-O_2B^2=576x^2-49-49x^2-49-289x^2=238x^2-98.$

6. $k^2(238x^2-98)+2k(238x^2-98)(O_2A\cdot O_2B)^2=(O_2A\cdot O_2B)^2\cdot$

$\cdot\left((2k-O_2A^2)(2k-O_2B^2)-(O_2A\cdot O_2B)^2\right)$

$$k^2(238x^2-98)+2k(238x^2-98)(O_2A\cdot O_2B)^2=(O_2A\cdot O_2B)^2(4k^2-2k(O_2A^2+O_2B^2)+$$

$$+(O_2A\cdot O_2B)^2-(O_2A\cdot O_2B)^2)$$

$$k\cdot k(238x^2-98)+k\cdot2(238x^2-98)(O_2A\cdot O_2B)^2=(O_2A\cdot O_2B)^2\cdot2k(2k-O_2A^2-O_2B^2)$$

$$k(238x^2-98)+\cancel{k}\cdot2(238x^2-98)(O_2A\cdot O_2B)^2=(O_2A\cdot O_2B)^2\cdot2\cdot(2k-O_2A^2-O_2B^2)$$

$$k(238x^2-98)=(O_2A\cdot O_2B)^2(4k-2(O_2A^2+O_2B^2)-2(238x^2-98))$$

$$k(238x^2-98)=(O_2A\cdot O_2B)^2(4k-2(O_2A+O_2B)^2-2(24^2x^2-O_2A^2-O_2B^2))$$

$$k(238x^2-98)=(O_2A\cdot O_2B)^2(4k-2O_2A^2-2O_2B^2-2\cdot24\cdot x^2+2O_2A^2+2O_2B^2)$$

$$k(238x^2-98)=(O_2A\cdot O_2B)^2(4k-2\cdot24\cdot x^2)$$

$$238\cdot k\cdot x^2-98k=(49+49x^2)(49+289x^2)(4k-2\cdot576x^2)$$

$$7\cdot34k\cdot x^2-7\cdot14\cdot k=7^2(1+x^2)(7^2+17^2x^2)(4k-2\cdot24^2x^2)$$

$$7\cdot34\cdot kx^2-7\cdot14\cdot k=7^2(7^2+7^2x^2+17^2x^2+17^2x^4)(4k-2\cdot24^2x^2)$$

$$7\cdot34\cdot kx^2-7\cdot14\cdot k=7^2(7^2+338x^2+17^2x^4)(4k-2\cdot24^2\cdot x^2)$$

$$2\cdot17kx^2-2\cdot7k=7(7^2+338x^2+17^2x^4)2(2k-24^2x^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3 (продолжение).

б) (продолжение).

$$17k\cdot x^2-7k=7\left(7^2\cdot 2k-7^2\cdot 24^2x^2+2\cdot 13^2x^2\cdot 2k-2\cdot 13^2\cdot 24^2x^4+\right.$$

$$\left.+17^2x^4\cdot 2k-17^2\cdot 24^2\cdot x^6\right)$$

$$17kx^2-7k=7^3\cdot 2k-7^3\cdot 24^2x^2+14k^2\cdot x^2-7\cdot 24^2kx^4+$$

$$+7\cdot 17^2\cdot 2kx^4-7\cdot 17^2\cdot 24^2x^6$$

$$7\cdot 17^2\cdot 24^2x^6+7k(17^2\cdot 2-24^2)x^4+14k^2x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

1. $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$\sqrt{3x^2-6x+2}=1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+2\ge 0 \\ 1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1}\ge 0 \\ 3x^2-6x+2=\left(1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2. \end{cases}$

2. $3x^2-6x+2=\left(1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2$

$3x^2-6x+2=1+81x^2+3x^2+3x+1-18x-18x\sqrt{3x^2+3x+1}+2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$81x^2+3x^2+3x+2-18x-3x^2+6x-2-(18x-2)\sqrt{3x^2+3x+1}=0$

$81x^2-9x=(18x-2)\sqrt{3x^2+3x+1}$

$9x(9x-1)=(9x-1)\left(2\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$

$(9x-1)\left(9x-2\sqrt{3x^2+3x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x-1=0 \\ 9x-2\sqrt{3x^2+3x+1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ 9x=2\sqrt{3x^2+3x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \begin{cases} 9x\ge 0 \\ 3x^2+3x+1\ge 0 \\ 81x^2=4(3x^2+3x+1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots$

~~3. $(9x-1)^2=3x^2+3x+1$ ... $81x^2-18x+1$ ... 3. 81~~

3. $81x^2=12x^2+12x+4$

$69x^2-12x-4=0$

$D=(-12)^2-4\cdot 69(-4)=144+16\cdot 69=16\cdot 9+16\cdot 69=16\cdot 78>0\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{D}}{2\cdot 69}=\frac{12\pm 4\sqrt{78}}{2\cdot 69}=\frac{6\pm 2\sqrt{78}}{69}.$

4. Продолжение пункта 2:

$\ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \begin{cases} 9x\ge 0 \\ 3x^2+3x+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \\ x=\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \begin{cases} x\ge 0 \\ 3x^2+3x+0{,}75+0{,}25\ge 0 \Leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \\ x=\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

верно всегда

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \begin{cases} x\ge 0 \\ \frac{3}{4}(2x+1)^2+0{,}25\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \\ x=\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \\ x=\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение).

4 (продолжение).

$1)\ 78 > 64 \Rightarrow \sqrt{78} > 8 \Rightarrow 2\sqrt{78} > 16 \Rightarrow 6-2\sqrt{78} < -10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6-2\sqrt{78}}{69} < -10 < 0 \Rightarrow x = \frac{6-2\sqrt{78}}{69}$ не подходит.

$2)\ 78 > 64 \Rightarrow \sqrt{78} > 8 \Rightarrow 2\sqrt{78} > 16 \Rightarrow 6+2\sqrt{78} > 22 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} > \frac{22}{69} > \frac{10}{69} = \frac{1}{6{,}9} > 0 \Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$ подходит.

5. Продолжение пункта 1:

$$\ldots \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ x=\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+3-1 \geq 0 \\ 1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ x=\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1)^2 \geq 1 \\ \sqrt{3x^2+3x+1} \geq 9x-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ x=\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right. \end{cases}$$

При $x=\frac{1}{9}$:

$1)\ 3\left(\frac{1}{9}-1\right)^2 = 3\cdot\frac{8^2}{9^2} = 3\cdot\frac{64}{81} = \frac{64}{27} > \frac{27}{27} = 1;\ \sqrt{3\left(\frac{1}{9}\right)^2+3\left(\frac{1}{9}\right)+1} > 0 =$

$= 9\cdot\frac{1}{9}-1 \Rightarrow \frac{1}{9}$ подходит.

$2)\ \cancel{3(x-1)^2 = 3\left(\frac{6+2\sqrt{78}}{69}-1\right)^2 = 3\left(\frac{2\sqrt{78}-63}{69}\right)^2}$ При $x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$:

$64 < 78 < 81 \Rightarrow 8 < \sqrt{78} < 9 \Rightarrow 16 < 2\sqrt{78} < 18 \Rightarrow 22 < 2\sqrt{78}+6 < 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{22}{69} < \frac{2\sqrt{78}+6}{69} < \frac{36}{69} \Rightarrow \frac{22}{69} < \frac{2\sqrt{78}+6}{69} < \frac{12}{23} < \frac{1}{2};\ 9x-1 >$

$> 9\cdot\frac{22}{69}-1 = \frac{198}{69}-1 = \frac{66}{23}-1 = 2\frac{20}{23}-1 = 1\frac{20}{23};$

$3x^2+3x+1 < 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}+1 = \frac{3}{4}+\frac{3}{2}+1 = \frac{3}{4}+\frac{6}{4}+\frac{4}{4} = \frac{13}{4} = 2\frac{3}{4};$

$(9x-1)^2 > \left(1\frac{20}{23}\right)^2 = 1+2\cdot\frac{20}{23}\cdot 1+\frac{400}{529} = 1+\frac{40}{23}+\frac{400}{529} = \ldots$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4 (продолжение).

5 (продолжение).

$$= 1 + 1\frac{17}{23} + \frac{400}{529} = 2 + \frac{17\cdot 23}{529} + \frac{400}{529} \geqslant 2 + \frac{10\cdot 23}{529} + \frac{400}{529} =$$

$$= 2 + \frac{530}{529} = 2 + 1\frac{1}{529} > 3 > 2\frac{3}{4} > 3x^2 + 3x + 1.$$

$$9x - 1 > 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow \sqrt{3x^2+3x+1} < 9x - 1 \to \frac{6+2\sqrt{38}}{69}$$ не подходит.

6. Таким образом, верен только один ответ: $x = \frac{1}{9}$.

Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

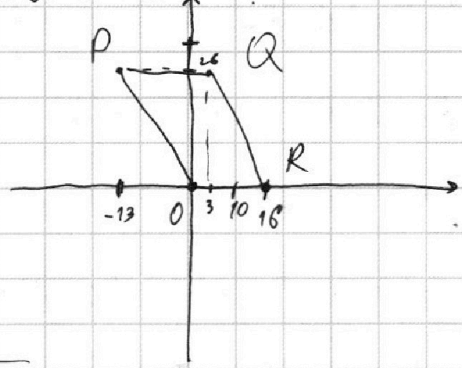
1. Прямые, содержащие стороны параллелограмма, задаются следующими уравнениями:

$OR: y=0$

$PQ: y=26$

$PO: y=-2x$

$QR: y=-2x+32$.



Поэтому точки $T(x;y)$, содержащиеся внутри или на его стороне, удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} y\geq 0 \\ y\leq 26 \\ y\geq -2x \\ y\leq -2x+32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ y\leq 26 \\ y+2x\geq 0 \\ y+2x\leq 32 \end{cases}$$

2. $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$(2x_2+y_2)-(2x_1+y_1)=14$.

Пусть $2x_2+y_2=m$. Т.к. x_2 и y_2 целые, то и m – целое.

Тогда $2x_1+y_1=m-14$. $2x_2+y_2\leq 32$ (п.1) $\Rightarrow m\leq 32$.

$2x_1+y_1\geq 0 \Rightarrow m\geq 14$. Таким образом, множество точек A – это точки с целыми координатами, лежащие на отрезках прямых $y=2x+m$ (где $14\leq m\leq 32$), содержащиеся в параллелограмме $OPQR$, и для каждой точки A (на прямой $y=2x+m$) множество точек B – это точки с целыми координатами, лежащие на отрезках прямых $y=2x+m-14$, содержащиеся в параллелограмме $OPQR$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 5 (продолжение) ($p \vdots q$ означает, что p кратно q).

3. Рассмотрим случаи, когда $m \vdots 2$. Пусть $m=2n$.
В параллелограмме OPQR содержится отрезок прямой $y=2x+m$ от точки с $y=0$ до точки с $y=16$.

1) $0=2x+m \Rightarrow x=-\frac{m}{2}=-n$.

2) $16=2x+m \Rightarrow x=\frac{16-m}{2}=8-n$.

Таким образом, подходящих точек A на прямой $y=2x+m$, ~~если~~ $m \vdots 2$, $8-n-(-n)+1=9$.
Т.к. $(m-14) \vdots 2$ то, что к каждой из них в качестве пары подходят 9 точек B. Прямых с $m \vdots 2$ всего 10: n от 7 до 16, т.к. m от 14 до 32, итого $10 \cdot 9 \cdot 9 = 810$ пар точек.

4. Рассмотрим случай, когда $m \not\vdots 2$. Пусть $m=2n+1$.
В параллелограмме OPQR содержится отрезок прямой $y=2x+m$ от точки с $y=0$ до точки с $y=16$.

1) $0=2x+m \Rightarrow x=-n-\frac{1}{2}$.

2) $16=2x+m \Rightarrow x=8-n-\frac{1}{2}$. Подходят в качестве координат A целые x от $8-n$ до $-n$, т.к. иначе они не целые $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ всего $8-n-(-n)+1=8$. Т.к. $(m-14) \not\vdots 2$ то, что к каждой A подходят 8 точек B. Прямых с $m \not\vdots 2$ 9: n от 7 до 15, итого $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ пар точек.

Итого подходят $810+576=1386$ пар точек A и B в параллелограмме

Ответ: 1386.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

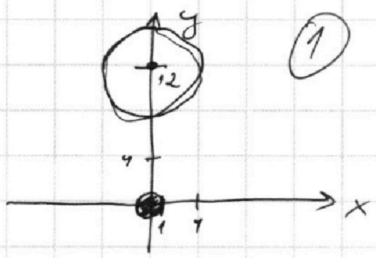
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

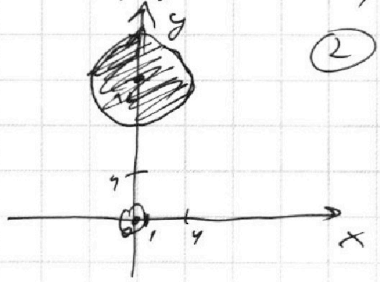
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

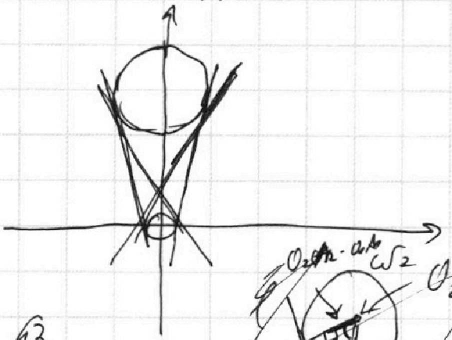
1. $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+y^2-1\le 0\\ x^2+(y-12)^2-16\ge 0\end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+y^2\le 1^2\\ x^2+(y-12)^2\ge 4^2\end{cases} (1)\\ \begin{cases} x^2+y^2\ge 1^2 \\ x^2+(y-12)^2\le 4^2\end{cases} (2)\end{array}\right.$ Первой системе удовлетворяют точки в круге с центром $(0;0)$ и радиусом 1 и вне круга либо на границе с центром $(0;12)$ и радиусом 4, второй — наоборот.





2. $ax+y-8b=0 \Leftrightarrow y=-ax+8b$. У ~~данного уравнения~~ системы из данного уравнения и неравенства в пункте 1 может быть 2 решения, если уравнение $-ax+8b$ задаёт общую касательную данных окружностей. Их всего 4.



У общих внутренних касательных равны b и равные, но противоположные по знаку a, у общих внешних — тоже.

3. 

Рассмотрим внешнюю общую касательную. Пусть центры окружностей — O_1 и O_2. Тогда $O_1(0;0)$, $O_2(0;12)$. Пусть O_1 — центр окружности ω_1, O_2 — ω_2. Пусть касательная прямая l, и $l\cap\omega_1=A_1$, $l\cap\omega_2=A_2$. Тогда $\sin\angle A_2OA_1 = \frac{O_2A_2-O_1A_1}{O_1O_2}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

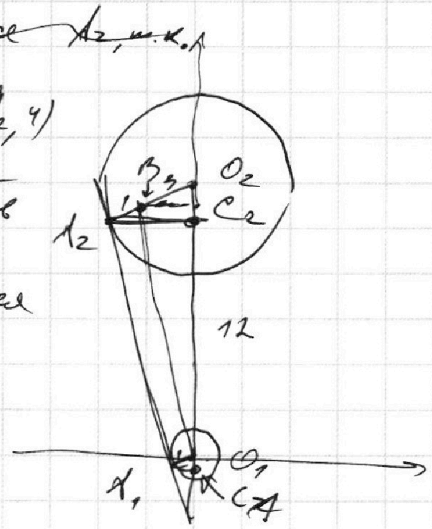
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение)

~~Расстояние от A_2 до O_1O_2 равно абсциссе A_2, т.к.~~



3. Пусть ~~ω~~ данные окружности — $\omega_2(O_2, 4)$ и $\omega_1(O,1)$. Тогда $O_1(0,0)$, $O_2(0,12)$. Пусть A_2A_1 — общая внешняя касательная ($A_2A_1 \cap \omega_1 = A_1$, $A_2A_1 \cap \omega_2 = A_2$).

~~Пусть~~ Тогда $O_2A_2 = 4$, $O_1A_1 = 1$.

~~4. Пусть $B \in O_2A_2$, $O_1B \parallel A_2A_1$. Тогда $BA_2 = O_1A_1 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow BO_2 = O_2A_2 - BA_2 = 3$. ($A_2A_1 \perp A_2O_2$ по св-ву касательной и $A_2A_1 \perp A_1O_1$).~~ $BO_1 \parallel A_2A_1$, A_2A_1

4. Пусть $B \in O_2A_2$, $O_1B \parallel A_2A_1$. $A_2A_1 \perp O_2A_2, O_1A_1$ по св-ву касательной $\Rightarrow O_1B \perp A_2O_2$ ($O_1B \perp A_1O_1$) $\Rightarrow BO_1A_1A_2$ — прямоугольник $\Rightarrow BA_2 = O_1A_1 = 1$, $BO_2 = O_2A_2 - BA_2 = 3 \Rightarrow \cos\angle A_2O_2A_1 =$

$= \frac{BO_2}{O_1O_2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

6. $\exists\, C_2 \in O_2O_1$, $A_2C_2 \perp O_2O_1$. Тогда $A_2C_2 = O_2A_2 \cdot \sin\angle A_2O_2O_1 =$

$= 4 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}$, $A_2C_2 = O_2A_2 \cdot \cos\angle A_2O_2O_1 =$

$= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow A_2(-\sqrt{15}, 12-1=11)$.

~~7. Т.к. $O_2A_2 \parallel O_1A_1$, т.к. обе перпендикулярны A_1A_2, то~~

7. Пусть $C_1 \in (O_1O_2)$, $A_1C_1 \perp O_1O_2$. Тогда $\angle A_1O_1C_1 = \angle A_2O_2C_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1C_1 = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $O_1C_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow A_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow a = \frac{\sqrt{15} - \frac{\sqrt{15}}{4}}{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{15}$.

Ответ: $\pm\sqrt{15}$.

$ax+y-8b=0$

$y=8b-ax$

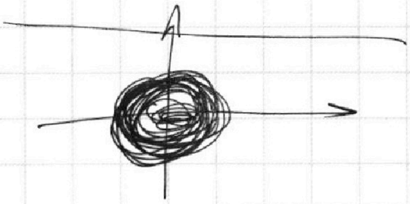
$x^2+a^2x^2-16abx+64b^2-1\geq 0$

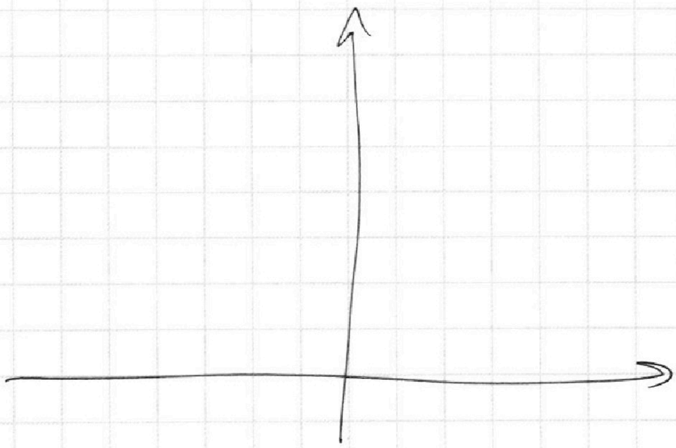
$x^2+y^2-1\leq 0$

$x^2+y^2-24y+144-16\geq 0$

$24y-129\leq 0$

$y\leq \frac{129}{24}=\frac{43}{8}=5\frac{3}{8}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(x^2+a^2x^2+64b^2-16ab\cdot x-1)$

$\frac{a+b}{m}=k$

$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab}=\frac{k}{k(a+b)-\frac{9ab}{m}}$

$x^2+y^2-1\geq 0$

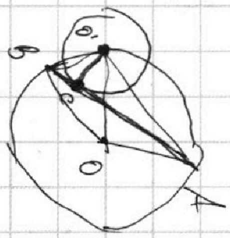
$x^2+(y-12)^2-16\leq 0$

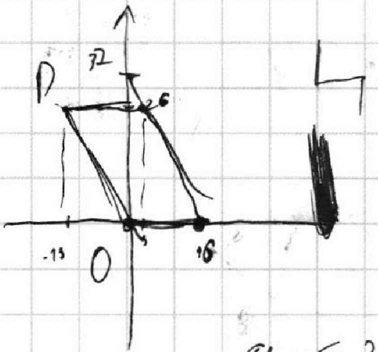
$-x^2-y^2+24y-144+16\geq 0$

$24y-129\geq 0$

$y\geq\frac{43}{8}$

$x^2\geq 1-y^2$





$576x^2-98=(289+49)x^2=(576-338)x^2-98=$

$2x_2+y_2-(2x_1+y_1)=14$

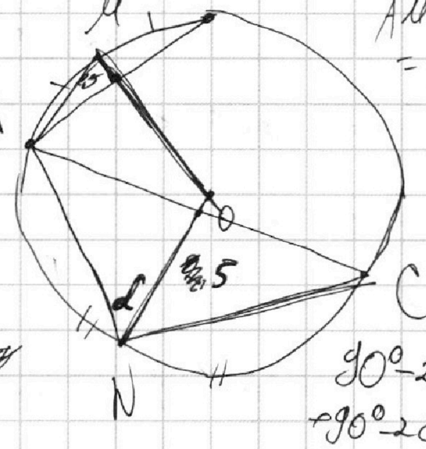
$$\begin{cases} y_1\leq 26 \\ y_1\geq 0 \\ y_1\geq -2x_1 \\ y_1\leq -2x_1+32 \end{cases}\qquad \begin{cases} y_1\leq 26 \\ y_1\geq 0 \\ y_1+2x_1\geq 0 \\ y_1+2x_1\leq 32 \end{cases}$$

$\frac{y}{z}=\sqrt{2}$ $\alpha=$

$x=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

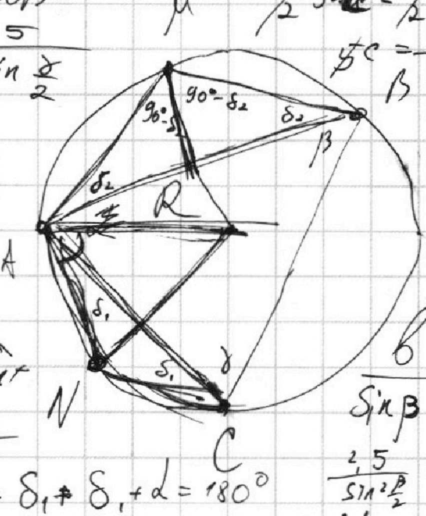
$y=\frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$

$z=\frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}$



$AM=MB=\frac{5}{\sin\frac{\gamma}{2}}$

$90^\circ-2\delta_1+90^\circ-2\delta_2$



$\frac{1}{2}5\cdot c=\frac{1}{2}AM\cdot MB\cdot\sin\gamma$

$c=\frac{25}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}\sin\gamma$

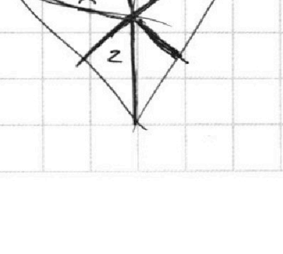
$c=\frac{5}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}\sin\gamma$

$b=\frac{2{,}5}{\sin^2\frac{\beta}{2}}\sin\beta$

$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{2{,}5}{\sin^2\frac{\beta}{2}}=\frac{5}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}$

$\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2=2$



$\gamma+\delta_1+\delta_1+\alpha=180^\circ$

$180^\circ-\beta+2\delta_1=180^\circ$

$\beta=2\delta_1$

$\gamma=2\delta_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = p\cdot 2^{15}\cdot 7^{11}$

$bc = q\cdot 2^{17}\cdot 7^{18}$

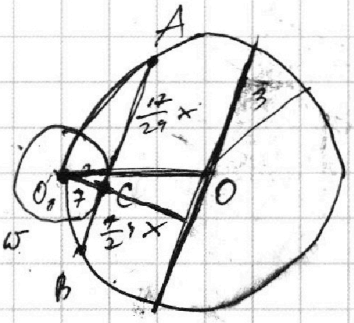
$ac = 2^{23}\cdot 7^{39}$

$a^2b^2c^2 = pqr\cdot 2^{15+17+23}\cdot 7^{11+18+39}$

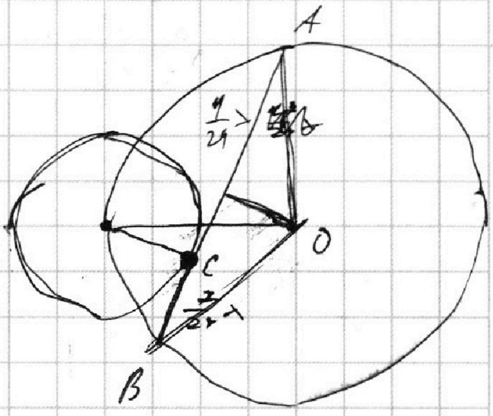
$(abc)^2 = pqr\cdot 2\cdot 2^{54}\cdot 7^{68}$

$abc = \sqrt{2pqr}\cdot 2^{27}\cdot 7^{34} \Rightarrow abc \geq 2^{28}\cdot 7^{34}$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$



$3AB = x$



$75 - 203$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1 - 2\sqrt{\dots}\sqrt{\dots} = 81x^2-18x+1$

$15x - 75x^2 + 2 = 2\sqrt{\dots}\sqrt{\dots}$

$(15x-75x^2+2)^2 = 4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)$

$(75x^2-15x-2)^2 = 4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)$

$75^2x^4+225x^2+4+60x-300x^2-75\cdot 30x^3 = 4(9x^4-18x^2+6$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} + 1-9x$

$\cancel{3x^2}-\cancel{6x}+\cancel{2} = 81x^2+1+\cancel{3x^2}+\cancel{3x}+\cancel{1}+2\sqrt{\dots}-18x\sqrt{\dots}-\cancel{18x}$

$81x^2-21x = (18x-2)\sqrt{\dots}$

$3^8x^4-2\cdot 3^5\cdot 7x^3+441x^2 = (324x^2-72x+4)\sqrt{\dots}$

$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1+81x^2-18x-18x\sqrt{\dots}+2\sqrt{\dots}$

$81x^2-9x = 2(9x-1)\sqrt{\dots}$

$9x = 2\sqrt{\dots}$

$81x^2 = 12x^2+12x+4$

$69x^2-12x-4=0$

$t^2-9t=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{3x^2}-6x+2 = \cancel{3x^2}+3x+1+1+81x^2-18x-(18x+2)\sqrt{\ldots}$

$9x+81x^2 = (18x+2)\sqrt{\ldots}$

$9x\cancel{(9x+1)} = 2\cancel{(9x+1)}\sqrt{\ldots}$

$81x^2 = 2(3x^2+3x+1)$

$81x^2-9x = 2\sqrt{\ldots}\cdot(9x+1)$

$9x(9x+1) = \sqrt{\ldots}(9x+1)$

$81x(81x^2+18x+1) = (3x^2+3x+1)(81x^2+18x+1)$

$x^3y^4-2x^2y^3+xy^2 = (3x^2+3x+1)(x^2y^2+2xy+1)$

$x^3y^4-2x^2y^3+xy^2 = 3x^4y^2+6x^3y+3x^2+3x^3y^2+6x^2y+3x+x+x^2y^2+2xy+1$

$x^3(y^4-6y-3y^2)-x^2(2y^3-3-6y-y^2)+x(y^2-3-2y)-3x^4y^2-1=0$

$x^3(3^8-\ldots)-x^2(2\cdot3^6-3-2\cdot3^3-3^4)+x(3^4-3^2\ldots)-3^5\cdot x^4-1=0$

$3^5\cdot x^4+x^3\cdot3^4(3^4-1)-x^2\cdot3(2\cdot3^5-3^3-2\cdot3^2-1)+x\cdot3^2(3^2-1)-1=0$

$3^5\cdot x^4+x^3\cdot3^4\cdot80-x^2\cdot3\cdot440+x\cdot3^2\cdot8-1=0$

$3x^2+3x+1 = 3x^2-6x+2+$

$+81x^2+1-18x+(18x-2)\sqrt{\ldots}$

$x=\frac{1}{9}$

$-81x^2+9x=$

$289+49=$
$=338$

$9x=y$

$\cancel{3x^2}-6x+\cancel{2} = \cancel{3x^2+3x+1} = 3x^2-6x+2+81x^2+1$

$\cancel{3x^2}-6x+\cancel{2} = 81x^2+1+3x^2+3x+1-18x-$
$-(18x-2)\sqrt{\ldots}$

$81x^2-9x = 2(9x-1)\sqrt{\ldots}$

$9x(9x-1) = 2$

$9x = 2\sqrt{\ldots}$

$81x^2 = 6x^2-12x+4$

$75x^2+12x-4=0$

$D = 144+4\cdot4\cdot75 = 144+1200 = 1344$

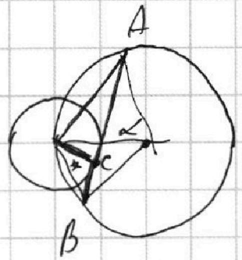
$486-27-18-1=$
$=486-46=440$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$AO = \sqrt{7^2 + \left(\frac{24}{24}\right)^2 x^2}$

$OB = \sqrt{7^2 + \left(\frac{7}{24}\right)^2 x^2}$

$AO^2 = 13^2 + 13^2 - 2\cdot 13^2 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{2\cdot 13^2 - AO^2}{2\cdot 13^2} = 1 - \frac{AO^2}{2\cdot 13^2} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{OA^2}{2\cdot 13^2}\cdot\left(2 - \frac{OA^2}{2\cdot 13^2}\right)}$

$OB^2 = 2\cdot 13^2 - 2\cdot 13^2 \cdot \cos\beta$

$\cos\beta = 1 - \frac{OB^2}{2\cdot 13^2} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{\frac{OB^2}{2\cdot 13^2}\cdot\left(2 - \frac{OB^2}{2\cdot 13^2}\right)}$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{x}{2\cdot 13}$

$AB^2 = 2\cdot 13^2 - 2\cdot 13^2 \cdot \cos\gamma$

$\cos\gamma = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 13^2} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cancel{1} - \frac{x^2}{2\cdot 13^2} = \cancel{1} - \frac{AO^2}{2\cdot 13^2} - \frac{OB^2}{2\cdot 13^2} + \frac{OA^2\cdot OB^2}{2\cdot 13^2\cdot 2\cdot 13^2} -$

$x^2\cdot 2\cdot 13^2$

$2\cdot 13^2(x^2 - AO^2 - OB^2) +$

$+ AO^2\cdot OB^2 - 13^2\cdot AO\cdot OB = 0$

$2\cdot 13^2\left(x^2 - 98 - \frac{289+49}{576}x^2\right) +$

$+49$

$\cos\alpha = 1 - \frac{AO^2}{2\cdot 13^2}$

$\sin\alpha = \frac{AO}{2\cdot 13}$

$\cos\beta = 1 - \frac{OB^2}{2\cdot 13^2}$

$\sin\beta = \frac{OB}{2\cdot 13}$

$\sin\gamma = \frac{x}{2\cdot 13}$

$\frac{x}{2\cdot 13} = \frac{OB}{2\cdot 13} - \frac{AO^2\cdot OB}{4\cdot 13^3} + \frac{AO}{2\cdot 13} - \frac{OB^2\cdot AO}{4\cdot 13^3}$

$x\cdot 2\cdot 13^2 = OB\cdot 2\cdot 13^2 - AO^2 OB + AO\cdot 2\cdot 13^2 - OB^2\cdot OA$

$\cos\gamma = \cancel{1} - \frac{x^2}{2\cdot 13^2} = \cancel{1} - \frac{AO^2}{2\cdot 13^2} - \frac{OB^2}{2\cdot 13^2} + \frac{AO^2\cdot OB^2}{4\cdot 13^4} - \frac{AO\cdot OB}{4\cdot 13^2}$

$\cancel{4\cdot 13^2} - 2x^2 = \cancel{4\cdot 13^2} - 2AO^2 - 2OB^2 + AO^2\cdot OB^2 - 13^2$

$x\cdot 2\cdot 13^2 = (OB+OA)\cdot 2\cdot 13^2 - AO\cdot OB(OB+OA)$

$x\cdot 2\cdot 13^2 = (OB+OA)(2\cdot 13^2 - AO\cdot OB)$