



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.
Треугольник ^{натуральный} \sqrt{abc} минимален, когда числа a, b, c не содержат другие простые делители, кроме 2 и 7. Тогда их можно представить в виде:

$$a = 2^k \cdot 7^x$$

$$b = 2^m \cdot 7^y, \text{ где } k, m, n, x, y, z \in \mathbb{N}_0$$

$$c = 2^n \cdot 7^z$$

$$ab = 2^{k+m} \cdot 7^{x+y} : 2^{17} \cdot 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} k+m \geq 17 \\ x+y \geq 10 \end{cases}$$

$$bc = 2^{m+n} \cdot 7^{y+z} : 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow \begin{cases} m+n \geq 17 \\ y+z \geq 17 \end{cases}$$

$$ac = 2^{k+n} \cdot 7^{x+z} : 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow \begin{cases} k+n \geq 20 \\ x+z \geq 37 \end{cases}$$

$$2(k+m+n) \geq 54 \quad k+m+n \geq 27, 5 \geq 26.$$

$$2(x+y+z) \geq 64 \quad x+y+z \geq 32, x+z \geq 37 \Rightarrow x+y+z \geq 37$$

$$abc = 2^{k+m+n} \cdot 7^{x+y+z} \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$x=18$$

$$k=9$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{18}$$

$$y=0$$

$$m=6$$

$$b = 2^6 \cdot 7^0 = 2^6$$

$$z=19$$

$$n=11$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{19}$$

$$ab = 2^{17} \cdot 7^{18} : 2^{17} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{19} : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \text{ сократима на } m \Rightarrow \frac{a+b:m}{a^2-6ab+b^2:m}$$

$$a^2-6ab+b^2 = \frac{(a+b)^2}{m} - 8ab : m \quad (a+b):m \Rightarrow -8ab:m$$

$$\begin{cases} a+b:m \\ 8ab:m \end{cases}$$

Пусть $a:m \Rightarrow b:m$, но a и b взаимнопросты $\Rightarrow a/m$ и $b/m \Rightarrow 8:m \Rightarrow m \leq 8$

$$\begin{matrix} a=3 \\ b=5 \end{matrix} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{8}{5} - \text{несократимое.}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 5+5^2} = \frac{8}{9-90+25} = \frac{8}{-56} = \frac{8 \cdot 1}{-7 \cdot 8} - \text{сократима на } 8 \Rightarrow m_{\max} = 8.$$

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\text{D03: } \begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &\geq 0 & (x-1)(2x-3) &\geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 &\geq 0 & D = 4 - 4 \cdot 2 < 0 &\Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \quad b = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$a^2 = 2x^2 - 5x + 3 \quad b^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$b^2 - a^2 = 2x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 5x - 3 = -3x - 2$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a+b) = (a-b)$$

$$a - b = 0$$

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-5x + 3 = 2x + 1$$

$$-7x = -2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \uparrow^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1 \quad \uparrow^2 \quad 7x - 1 \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{7}$$

$$4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 11^2 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{244}}{41} < 0$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{244}}{41}$$

$$\frac{1}{7} < \frac{26}{41} = \frac{11 + 15}{41} < \frac{11 + \sqrt{244}}{41} < \frac{11 + 16}{41} = \frac{27}{41} < 1$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

$$x = \frac{11 + \sqrt{244}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

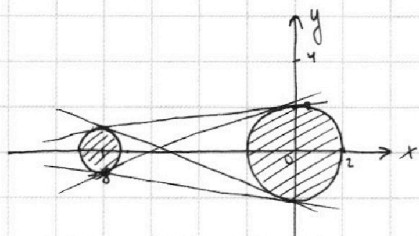


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



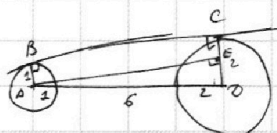
№6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$



Заштрихованные области - решение неравенства.

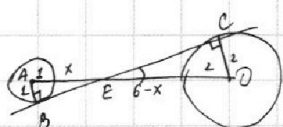
Для того, чтобы прямая $y = ax + 10b$ имела с неравенством ровно 2 общие точки, $y = ax + 10b$ должна быть касательной к этим двум окружностям.



$AE \perp CD$ и $AE \perp BC$ по 1. теореме. $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{10^2 - 1^2} = 4\sqrt{10}$
 $(\text{ВСЕ } \perp \text{ на } AE \text{ и } CD \Rightarrow AE \perp BC)$ $AE = \sqrt{9^2 - 1^2} = \sqrt{80}$

$BC \perp DC$
 $AE \perp CD \Rightarrow ACCE$ - прямоугольник. $CE = AB = 1$. $ED = 1$. $\tan \angle EAD = \frac{ED}{AE} = \frac{1}{4\sqrt{10}}$
 $AB \perp BC$

$a_1 = \frac{1}{4\sqrt{10}}$ $a_2 = -\frac{1}{4\sqrt{10}}$



$\triangle BEA \sim \triangle CED$ (по 2-м углам) $\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{CD}$ $\frac{x+1}{8-x} = \frac{1}{2}$ $2x+2=8-x$ $3x=6$ $x=2$

$\tan \angle CED = \frac{CD}{ED} = \frac{2}{8-x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $a_3 = \frac{1}{3}$ $a_4 = -\frac{1}{3}$

Ответ: $a = \frac{1}{4\sqrt{10}}$; $a = -\frac{1}{4\sqrt{10}}$; $a = \frac{1}{3}$; $a = -\frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12.$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

~~Корень квадратный~~
~~выражения~~

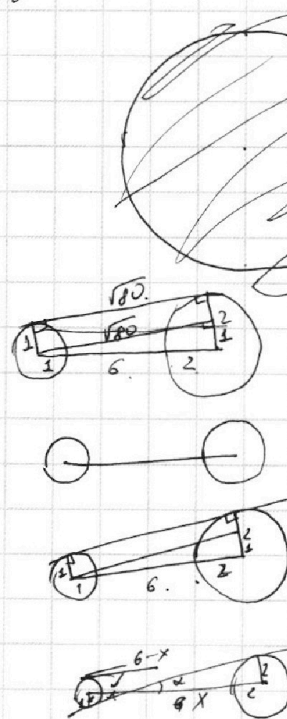
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 & (1) \\ 2 - 7x \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 0 \\ 2 - 7x \leq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$(1): \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \geq 2x^2 + 2x + 1$$

$$(2): 2 - 7x \leq 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{x^2 + 1} \\ \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \frac{32x^2}{25}}{1 + \frac{32x^2}{25}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{32x^2}{25} \cdot \frac{50 - 32x^2}{25}} = \frac{1}{25} \sqrt{32x^2(50 - 32x^2)} \\ &= \frac{1}{25} \sqrt{64x^2(25 - 16x^2)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2 + x &= 12 - 2x \\ 3x &= 10 \\ x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= y \\ 625 &= (49t^2 + 50t + 1)(25 - 16t) \\ &= (49t^2 - 25 - 49 \cdot 16t^2 + 50 \cdot 2t - 50 \cdot 16t + 16t^2) \\ &= (49t^2 - 25 - 784t^2 + 100t - 800t + 16t^2) \\ &= (-745t^2 - 700t - 25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax_1 &= y_1 = ax_1 + 10b \\ (x_1, y_1) &= (a, 10b) \\ (x_2, y_2) &= (-8, 0) \\ (x_3, y_3) &= (0, 0) \\ (x_4, y_4) &= (10, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos \alpha &= \frac{64x^2}{50} \\ \cos \alpha &= \frac{50 - 64x^2}{50} = \frac{25 - 32x^2}{25} \\ \sin \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{25 - 32x^2}{25} \right)^2} \end{aligned}$$



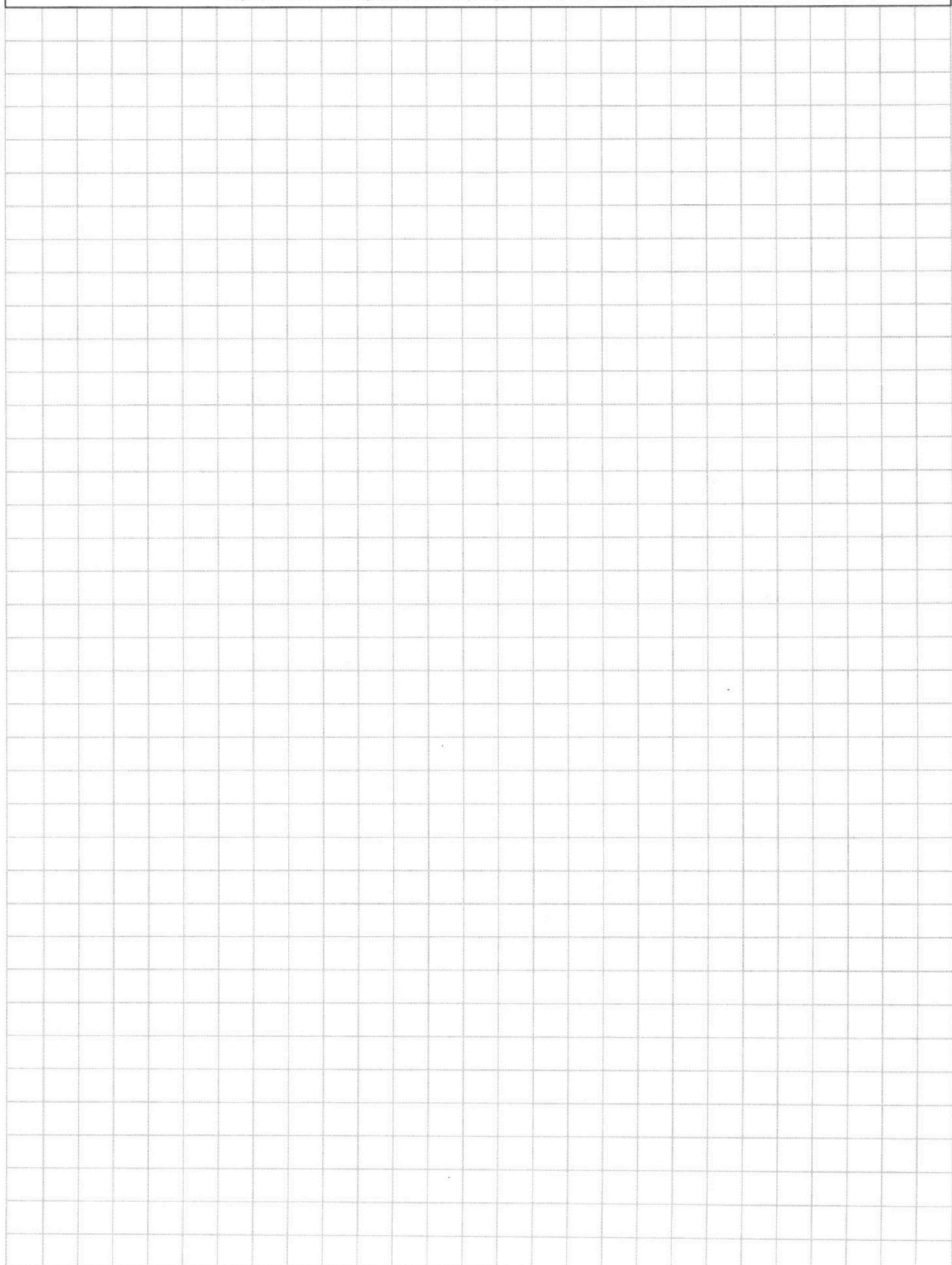
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

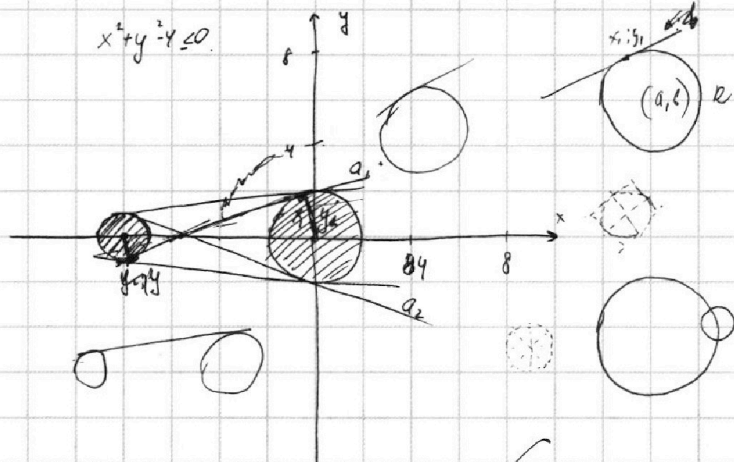
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) $(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$ $(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

$y = ax + b$



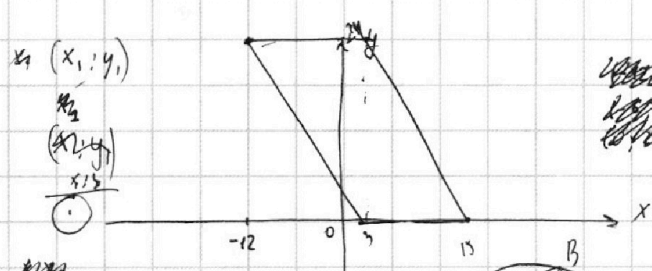
~~кратко~~ $ky = ax + b$
 $y = kx + c$
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
 $(x_1, -a)^2 + (y_1, b)^2 = R^2$
 $(kx+c-a)^2 + (x+b-b)^2 = R^2$
 $x^2 - 2ax + a^2 + k^2x^2 + 2kx(c-b) + (c-b)^2 = R^2$

$\begin{cases} x^2 + (ax+10b)^2 = 4 \\ (x+8)^2 + (ax+10b)^2 = 1 \end{cases}$

$x^2 - (x+8)^2 = 3$
 $(x-x-8)(x+x+8) = 3$
 $-8(2x+8) = 3$

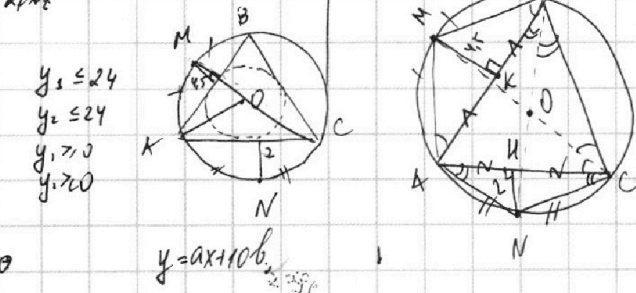
$2x+8 = -\frac{3}{8}$
 $2x = -\frac{3}{8} - 8 = -\frac{67}{8}$
 $x = -\frac{67}{16}$

$2 \cdot \frac{4}{49} + 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 = \frac{8}{49} + \frac{10}{7} + 3 = \frac{8}{49} + \frac{70}{49} + \frac{147}{49} = \frac{225}{49} = \frac{15}{7}$

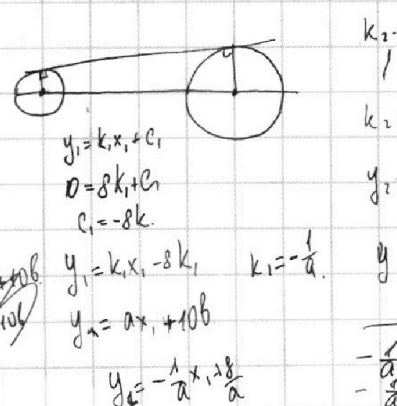


$2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 = \frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1 = \frac{8-28+49}{49} = \frac{29}{49}$
 $2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{49} + \frac{4}{7} = \frac{8+56}{49} = \frac{64}{49}$

$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$
 $x = \frac{5 \pm 1}{4}$ $x = 1$ $x = \frac{3}{2}$
 $(x-1)(2x-3)$ $y = \frac{1}{2}(2x-3)$



$y_1 = kx + c_1$
 $y_2 = kx + c_2$
 $c_1 = -8k$
 $y_1 = kx_1 - 8k_1$ $k_1 = -\frac{1}{a}$
 $y_1 = ax_1 + 10b$
 $y_2 = -\frac{1}{a}x_1 + \frac{8}{a}$



$D = 1 -$
 (x_1, y_1) $ax + by + c = 0$
 $y = ax + 10b$
 $kx + my + n = 0$
 $n = 0$
 $kx + my = 0$
 $kx + my + n = 0$
 $ax + by + c = 0$

$y = ax + 10b$
 $y = kx + n$ $k \neq a$
 $y_1 = -\frac{1}{a}x$
 $y_2 = -\frac{1}{a}x_2 + \frac{8}{a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = 2^{12} \cdot 7^{12}$
 $ac = 2^{10} \cdot 7^{12}$

$a = 2^k \cdot 7^x$ ①
 $b = 2^m \cdot 7^y$
 $c = 2^n \cdot 7^z$

$x = 18$
 $z = 19$
 $y = 0$

$k = 9$
 $m = 6$
 $n = 11$
 $25 \cdot \frac{4}{5} = 20$

$25x^2 = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49x^2 + 1}$
 $\sqrt{x^2 + 15 - 16x^2}$
 $x^2 \leq \frac{25}{16}$
 $x \leq \frac{5}{4}$

$k+m \geq 14$
 $x+y \geq 10$
 $k \geq 14$

$m+n \geq 17$
 $y+z \geq 17$

$k+n \geq 20$
 $x+z \geq 37$

$2(k+m+n) \geq 51$
 $2(x+y+z) \geq 64$

$k+m+n \geq 25, 35, 72, 6$

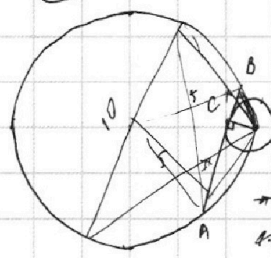
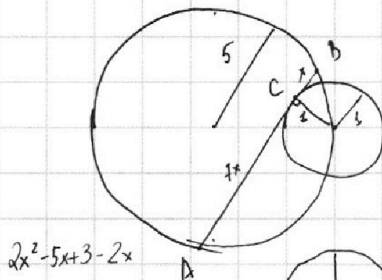
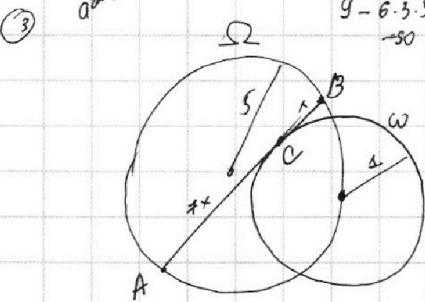
$k+x+y+z \geq 32$

$abc \geq 2^{k+m+n} \cdot 7^{x+y+z} = 2^{56} \cdot 7^{37}$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$
 $\frac{8}{9-6 \cdot 3 \cdot 5 + 25} = \frac{8}{-56}$

② $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-3b)^2-8b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$
 $\frac{8}{9-6 \cdot 3 \cdot 5 + 25} = \frac{8}{-56}$

$\frac{a^2-6ab+b^2}{a+b} = a+b - \frac{6ab}{a+b}$
 $= a+b - \frac{8ab+8a^2-8a^2}{a+b} = a+b - \frac{8a^2}{a+b}$
 $m=8$
 $\frac{a+b}{a+b} = 1$
 $\frac{a+b}{a+b} = 1$



④ $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$a = \sqrt{2x^2-5x+3}$
 $\beta = \sqrt{2x^2+2x+1}$
 $a^2 = 2x^2-5x+3$
 $\beta^2 = 2x^2+2x+1$

$2x^2-5x+3 \geq 0$

$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x$

$4x = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} \sqrt{2x^2+1}$
 $8x = \sqrt{2x^2+3} \sqrt{2x^2+1}$

$a-b = a^2-\beta^2$
 $\sqrt{244} = \dots$
 $(a-b)(a+b) - (a-b) = 0$
 $(a-b)(a+b-1) = 0$
 $a=b$

$40x = \sqrt{x^2+1} \sqrt{49x^2+1} \sqrt{32x^2(50-32x^2)}$
 $20 = \sqrt{\frac{x^2+1}{32x^2}} \sqrt{49x^2+1} \sqrt{50-32x^2}$

$\sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{32x^2}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{32x^2}{25} \left(2 - \frac{32x^2}{25}\right)}$

$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$
 $\sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x - \sqrt{2x^2-5x+3}$

$\sqrt{32x^2(50-32x^2)} = \frac{1}{5} \sqrt{32x^2(50-32x^2)}$

$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1$
 $4(2x^2+2x+1) = 49x^2-14x+1$
 $8x^2+8x+4 = 49x^2-14x+1$
 $41x^2-22x-3=0$

$40 = \sqrt{2x^2+1} \sqrt{49x^2+1} \sqrt{32x^2(50-32x^2)}$
 $40 = \sqrt{2x^2+1} \sqrt{49x^2+1} \sqrt{32x^2(50-32x^2)}$

$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1 \geq 0$
 $-7x+2 \geq 0$
 $2-7x \leq 0$
 $2x^2-5x+3-2x^2-2x-1$

$41x^2-22x-3=0$
 $\frac{22}{41} = 11^2+3 \cdot 41 = 121+123 = 244$
 $\frac{244}{82} = \frac{122}{41}$

$25x^2 = \sqrt{x^2+1} \sqrt{49x^2+1} \sqrt{32x^2(50-32x^2)}$
 $25x^2 = \sqrt{x^2+1} \sqrt{49x^2+1} \sqrt{32x^2(50-32x^2)}$



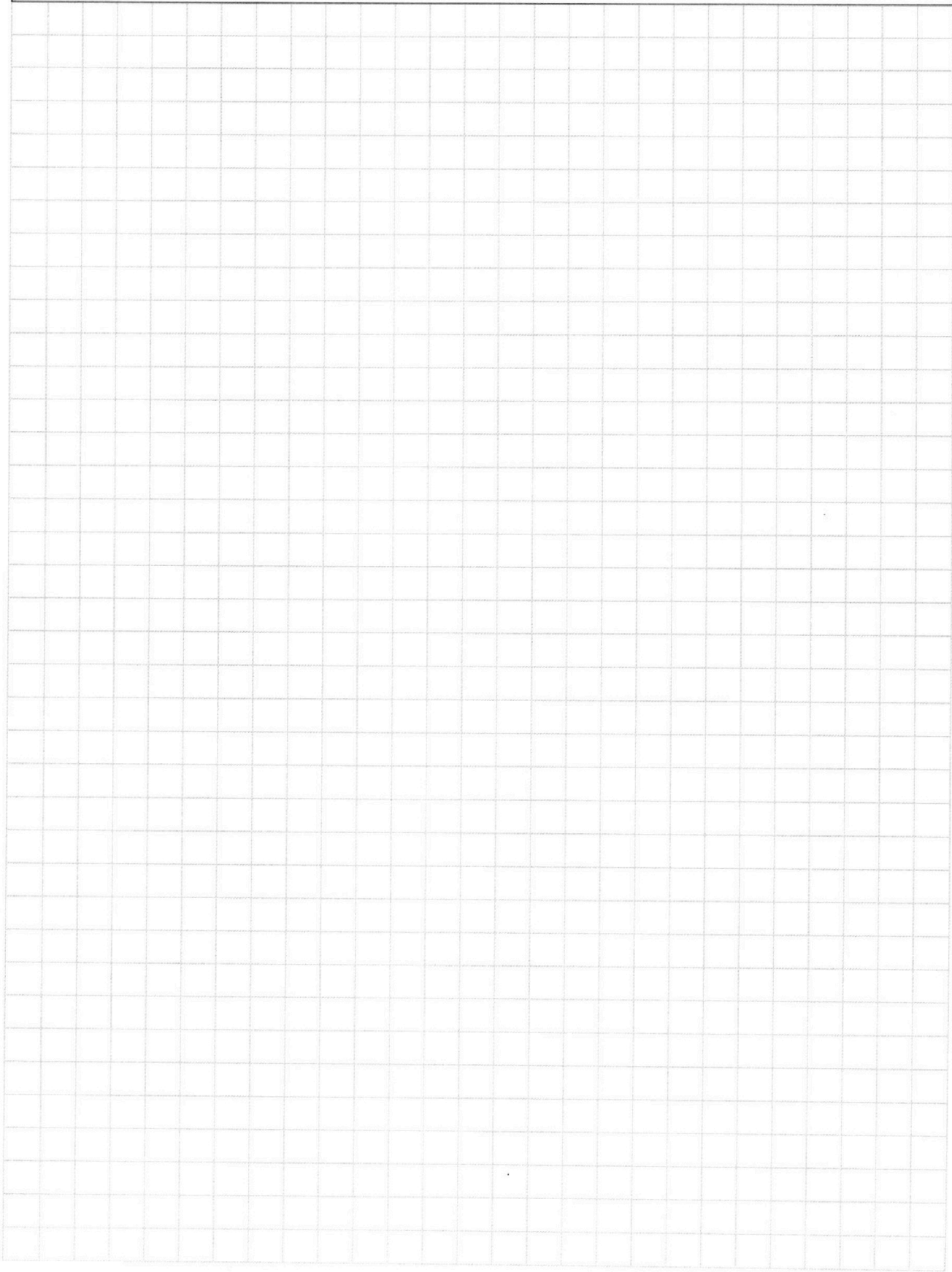
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

