МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$\begin{matrix} ab \,\vdots\, 2^{14}\cdot 7^{10} \\ bc \,\vdots\, 2^{17}7^{17} \\ ac \,\vdots\, 2^{20}7^{37} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ab \geq 2^{14}\cdot 7^{10} \\ bc \geq 2^{17}\cdot 7^{17} \\ ac \geq 2^{20}\cdot 7^{37} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cancel{abc \geq 2^{14}\cdot 7^{10}} \\ \cancel{abc \geq 2^{17}\cdot 7^{17}} \\ abc \geq \end{matrix}$$

$\Downarrow$ $abc \,\vdots\, 2^{14}\cdot 7^{10}$, $abc \,\vdots\, 2^{17}\cdot 7^{17}$, $abc \,\vdots\, 2^{20}\cdot 7^{37}$

Наименьшее возможное значение abc можно представить в виде: $abc = 2^x\cdot 7^y \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 14 \\ x \geq 17 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \\ y \geq 17 \\ y \geq 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 37 \end{cases} \Rightarrow \cancel{abc \geq 2^{20}\cdot 2^{37}}$$

~~Если $abc = 2^{20}\cdot 2^{37}$, то подойдут значения a, b, c:~~

$$\cancel{a = \frac{2^{20}\cdot 7^{37}}{2^{17}\cdot 7^{17}} = 2^3\cdot 7^{20}} \qquad \cancel{ab = 2^3\cdot 7^{20}}$$

$$\cancel{b = \frac{2^{20}\cdot 7^{37}}{2^{20}\cdot 7^{37}} = 1}$$

$$\cancel{c = \frac{2^{20}\cdot 7^{37}}{2^{14}\cdot 7^{10}} = 2^6\cdot 7^{17}}$$

x, y — натур.
т.к. a, b, c — натур

При этом:

$$a^2b^2c^2 \geq 2^{14+17+20}\cdot 7^{10+17+37}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x \geq \frac{14+17+20}{2} \\ y \geq \frac{10+17+37}{2} \\ x \geq 20 \\ y \geq 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 25{,}5 \\ y \geq 32 \\ x \geq 20 \\ y \geq 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 26 \\ y \geq 37 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{26}\cdot 7^{37}$$

Пусть $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$, тогда подходят значения a, b, c:

$$a = \frac{2^{26}\cdot 7^{37}}{2^{17}\cdot 7^{17}} = 2^9\cdot 7^{20} = a$$

$$b = \frac{2^{26}\cdot 7^{37}}{2^{20}\cdot 7^{37}} = 2^6 = b$$

$$c = \frac{2^{26}\cdot 7^{37}}{2^{14}\cdot 7^{10}} = 2^{11}\cdot 7^{27} = c$$

$\Downarrow$

Минимальное значение abc — это $2^{26}\cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$

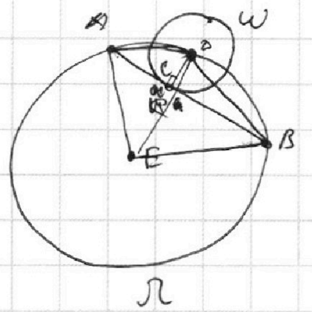
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

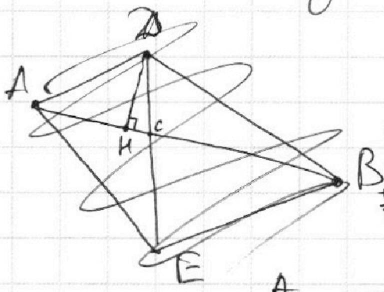
№3.

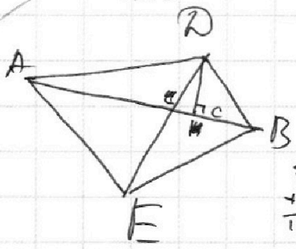


D, E – центры ω и Ω, соответственно

Проведём AD, DB, EA, EB, ED:

Рассмотрим 4-угольник ADBE отдельно:





$DC \perp AB$ по св. касательной AB

$\Rightarrow DC$ – высота на AB

По условию: $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

$DC = 1$.

Пусть $BC = x$. Тогда $AC = 7x$

$\Rightarrow$ Ω – описанная окружность для $\triangle ADB$

$\Rightarrow$ Площадь $\triangle ADB$: $S = \frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4R}$, где

$R = AE = ED = EB = 5$. Также: $S = \frac{DC \cdot AB}{2}$

$AD = \sqrt{1+(7x)^2}$, $DB = \sqrt{1+x^2}$, $AB = 8x$

$$\frac{AD \cdot DB \cdot \cancel{AB}}{4R} = \frac{DC \cdot \cancel{AB}}{2}$$

$AD \cdot DB = 2DCR = 2 \cdot 1 = 2R$

$AD \cdot DB = \sqrt{1+(7x)^2} \cdot \sqrt{1+x^2} = 2 \cdot 5$

$(1+49x^2)(1+x^2) = 100$

~~$49x^4+50x^2-3=0$~~

$49x^4+50x^2-99=0$

Замена: $t = x^2 \geq 0$

$49t^2+50t-99=0$

Замена: $t = x^2 \geq 0$

~~$49t^2+50t-3=0$~~

~~$D = 2500+4\cdot 3\cdot 49 = 3088 = 16\cdot 193$~~

$D = 2500+4\cdot 49\cdot 99 = 21904 =$
$= 16 \cdot 1369 = 16 \cdot 37^2 = (4\cdot 37)^2 = 148^2$

$\times\frac{99}{49}$ 891 396 4851

$\times\frac{4851}{4}$ 19404 +2500 21904

$\times\frac{49}{12}$ 98 49 588

3088 | 8 — 386

386 | 2 — 193

$37 \times 4 = 148$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$49t^2+50t-99=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{-50+148}{2\cdot49}=\frac{98}{2\cdot49}=1 \\ t=\frac{-50-148}{2\cdot49}<0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

$AB=7x+x=8x=8$

Ответ: $AB=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

Замена переменных: $a=2x^2-5x+3$

$b=2x^2+2x+1.$

$2-7x=2x^2-5x+3-(2x^2+2x+1)=a-b$ =>

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b \iff \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \end{cases} \iff \begin{cases} a\geq 0 & ① \\ b\geq 0 & ② \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{a}=\sqrt{b} & ③ \\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=1. & ④ \end{array}\right. \end{cases}$

Рассмотрим отдельно:

① $a\geq 0$

$2x^2-5x+3\geq 0$

$D=25-4\cdot 2\cdot 3=1$

$2\left(x-\frac{5-1}{4}\right)\left(x-\frac{5+1}{4}\right)\geq 0$

$\cancel{2}(x-1)(x-1{,}5)\geq 0$

$x\in(-\infty;-1]\cup[1{,}5;+\infty)$

$+$ $-$ $+$; 1, $1{,}5$

② $b\geq 0$

$2x^2+2x+1\geq 0$

$D=4-4\cdot 2=-4<0$

т.к. $2>0$, то

$b>0$ всегда => $x\in(-\infty;+\infty)$

③ $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ т.к. $\sqrt{a}\geq 0$, $\sqrt{b}\geq 0$

$a=b$

⇓

$\cancel{2x^2}-5x+3=\cancel{2x^2}+2x+1.$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7}$

④ $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1.$

$\sqrt{b}=1-\sqrt{a}$ т.к. $\sqrt{b}\geq 0$

⇓

$b=a-2\sqrt{a}+1$

$\cancel{2x^2}+2x+\cancel{1}=\cancel{2x^2}-5x+3-2\sqrt{2x^2-5x+3}+\cancel{1}$

$2\sqrt{2x^2-5x+3}=3-7x$

⇕

$\begin{cases} 3-7x\geq 0 \\ 4(2x^2-5x+3)=9+49x^2-42x \end{cases} \iff$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) продолжение

$$\begin{cases} 7x \leq 3 \\ 8x^2 - 20x + 12 = 9 + 49x^2 - 42x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{7} \\ 41x^2 - 62x - 3 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно:

$$41x^2 - 62x - 3 = 0$$

$$D = 62^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

Итоговая система:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{2}{7} < 1 < 1,5 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{22+4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{22-4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right.$$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right.$$

Проверка того, что корни входят в промежуток →

$$\frac{22+4\sqrt{61}}{82} = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee 1,5$$

$$11 + 2\sqrt{61} \vee 61,5$$

$$2\sqrt{61} \vee 50,5$$

$$\sqrt{61} \vee 25,25 = \frac{101}{4}$$

$$61 \vee \frac{101^2}{16}$$

$$976 < 10201$$

$\Downarrow$

$$\frac{4+2\sqrt{61}}{41} < 1,5.$$

$$\frac{22+4\sqrt{61}}{82} \vee 0$$

$$\cancel{\frac{22-4\sqrt{61}}{82}}$$

$$\cancel{22 \vee 4\sqrt{61}}$$

$$\cancel{5,5 \vee \sqrt{61}}$$

$$\cancel{5,5 < 6 < \sqrt{61}}$$

$$\cancel{36 < 61}$$

$$22 \vee 4\sqrt{61}$$

$$5,5 < 6 < \sqrt{61}$$

$$36 < 61$$

$\Downarrow$

$$\frac{22-4\sqrt{61}}{82} < 0.$$

$$\frac{22-4\sqrt{61}}{82} \vee -1.$$

$$22 - 4\sqrt{61} \vee -82$$

$$-4\sqrt{61} \vee -104$$

$$104 \vee 4\sqrt{61}$$

$$26 \vee \sqrt{61}$$

$26 > 20 > \sqrt{61}$ т.к. $400 > 61$

$\Downarrow$

$$\frac{22-4\sqrt{61}}{82} > -1.$$

$62 \times 62 = 3844$; $22 \times 22 = 484$; $41 \times 12 = 492$; $3844 + 492 = 4336$; $492 + 484 = 976$; $101 \times 101 = 10201$; $61 \times 16 = 976$; $976 : 4 = 244 = 4 \cdot 61$; $41 \times 1,5 = 61,5$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right.$$

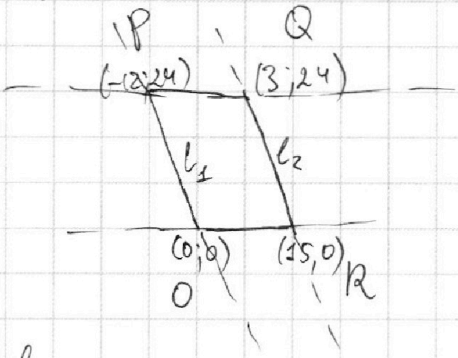
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5



Если точка $M(x;y)$ принадлежит парал-му PQRO, то:

1) $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 24 \\ y \leq -2x+30 \\ y \geq -2x \end{cases}$ 2) $x \in [-12;15]$

$\Downarrow$

Для точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$:

$$\begin{cases} y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0 \\ y_1 \leq 24,\ y_2 \leq 24 \\ y_1 \leq -2x_1+30 \\ y_2 \leq -2x_2+30 \\ y_1 \geq -2x_1 \\ y_2 \geq -2x_2 \\ 2x_2-2x_1+y_2-y_1=12 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ -2x_1 \leq y_1 \leq 30-2x_1 \\ -2x_2 \leq y_2 \leq 30-2x_2 \\ 2x_2+y_2=12+2x_1+y_1 \end{cases}$$

l_1 - прямая через PO.

ур-е прямой l из графика:

$l_1 = -2x$

Аналогично для l_2: т.к. $l_2 \parallel l_1$, то у l_2 вид: $-2x+b=0$

$-2 \cdot 15 + b = 0$

$b = 30$

$\Downarrow$

$l_2 = -2x+30$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 0 \leq y_1+2x_1 \leq 30 \\ 0 \leq y_2+2x_2 \leq 30 \\ 2x_2+y_2=12+2x_1+y_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Downarrow$ $y_1+2x_1 \in [0;30]$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24;\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2+y_2 \leq 42 \\ 2x_2+y_2=12+2x_1+y_1 \\ 0 \leq y_2+2x_2 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24;\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2+y_2 \leq 30 \\ 2x_2+y_2=12+2x_1+y_1 \\ y_1+2x_1 \in [0;30] \end{cases} \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 0 \le y_1 \le 24 \\ 0 \le y_2 \le 24 \\ \cancel{12 \le 2x_2 + y_2 \le 30} \\ \cancel{2x_2 + y_2 = 2x_1} + y_1 + 12 \\ \cancel{0} \le 2x_1 + y_1 \le 30 \end{cases}$$

~~x_1 - целое и $x_1 \in [-12; 15]$~~

Далее переберём значения $A(x_1; y_1)$ и посчитаем кол-во подходящих $B(x_2; y_2)$

x_1: -12, -11, -10, -9

~~$x_1 = -12$: $y_1 \in [24;$~~

$$\begin{cases} 0 \le y_1 \le 24 \\ 0 \le y_2 \le 24 \\ 12 - 2x_2 \le y_2 \le 30 - 2x_2 \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \end{cases}$$

$$2x_2 + y_2 = 2(x_1 + 4) + y_1 + 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6. т. – точка

Рассмотрим отдельно первое ур-е:

$ax - y + 10b = 0$

(1) $ax + 10b = y$ – ур-е прямой.

Рассмотрим отдельно второе ур-е:

$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leq 0$ (2)

⇕

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+8)^2+y^2-1\leq 0\\(x^2+y^2-4)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+8)^2+y^2-1\geq 0\\x^2+y^2-4\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+8)^2+y^2\leq 1\\x^2+y^2\geq 4=2^2\end{cases}\\ \begin{cases}(x+8)^2+y^2\geq 1\\x^2+y^2\leq 4=2^2\end{cases}\end{array}\right. \quad (2)$$

$(x+8)^2+y^2\leq 1$ – верно для точек, ~~лежащих внутри~~ принадлежащих окр-ти ω_1 радиуса 1 с центром в т. $(-8;0)$; $(x+8)^2+y^2\geq 1$ – для точек вне этой окр-ти и на ее границе.

$x^2+y^2\leq 4$ – верно для точек, принадлежащих окр-ти ω_2 радиуса 2 с центром в $(0;0)$; $x^2+y^2\geq 4$ – для точек вне этой окр-ти и на её границе.

⇓

~~Решение системы (2) – это точки~~

$(x_0;y_0)$ – решение системы (2), если:

т. $(x_0;y_0)$ ~~лежит~~ принадлежит ω_1 и не лежит внутри ω_2

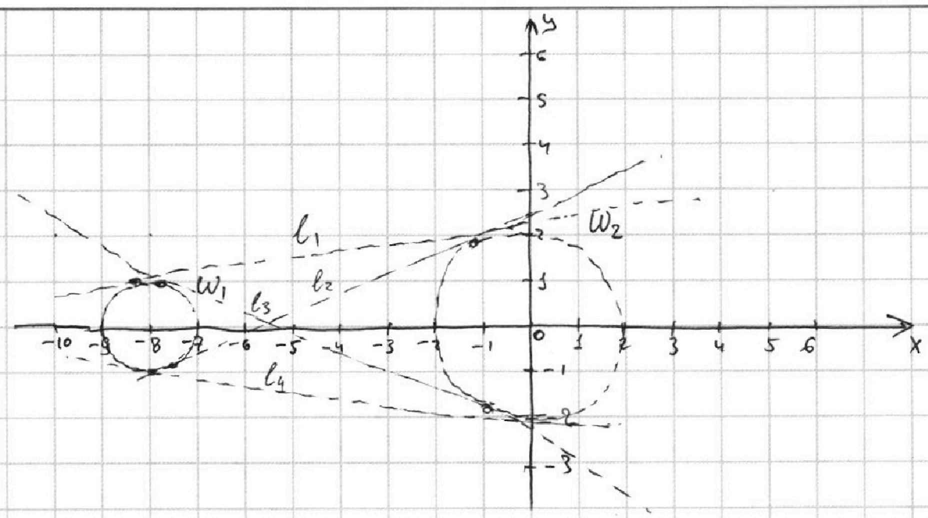
или принадлежит ω_2 и не лежит внутри ω_1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Исходная система:

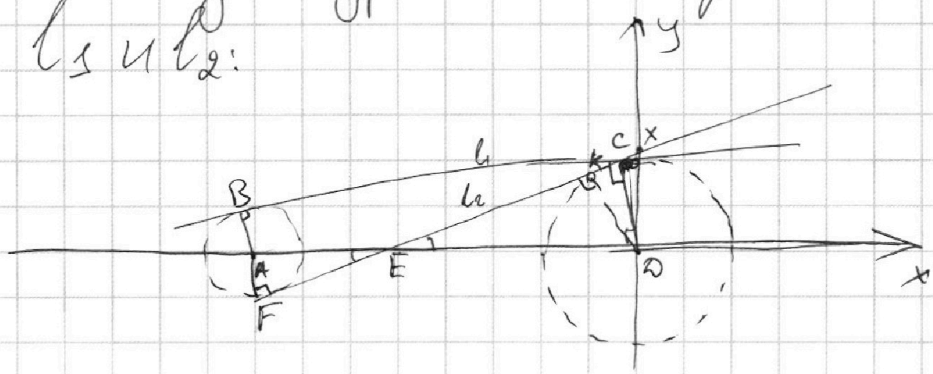
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) имеет ~~решение~~ ровно 2 решения только если прямая $y = ax + 10b$ касается ~~одной~~ обеих окружностей (точки касания − решения системы)

Общих касательных к 2 окр-тям можно провести 4 (см. рис: l_1, l_2, l_3, l_4). ~~Сдвинем все прямые параллельно и через~~

Найдём уравнения прямых l_1, l_2, l_3, l_4:

l_1 и l_2:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AE+ED=8$

$AF=1$

$\cancel{ED}$ $Ck=5$

$\angle CED=\angle AEF$ как вертикальные углы

$\angle AFE=\angle DCE=90^\circ$ по св. касательной

$\Rightarrow$

$\triangle CED \sim \triangle FEA$

$\Downarrow$

$\frac{ED}{AE}=\frac{CK}{AF}=\frac{5}{1} \Rightarrow$ $ED=5AE$

$AE+5AE=8$

$AE=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \Rightarrow$

$ED=$ ~~8-AE~~ $5\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$

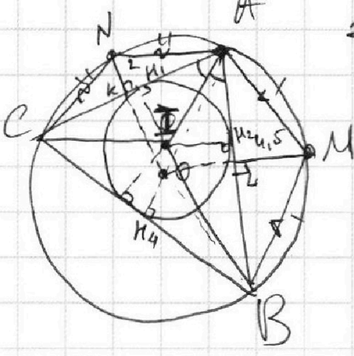
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

р/б – равнобедренный



1. т. O – центр описанной окр-ти для $\triangle ABC$, R – её радиус
2. т. I – центр вписанной окр-ти для $\triangle ABC$, r – её радиус.
3. Т.к. $\cup CN = \cup AN$, то $AN = CN$

$\cup AM = \cup BM$, то $AM = BM$

4. Пусть NK и ML – высоты из т. N и т. M на AC и AB, соответственно. Тогда по усл. $NK = 2$, $ML = 4,5$.
5. Из 3) $\triangle CNA$ и $\triangle AMB$ – р/б. $\Rightarrow$ NK и ML – серединные перпендикуляры к AC и AB соответственно $\Rightarrow$ Прямые NK и ~~AB~~ ML пересекаются в т. O по св. описанной окр-ти.
6. $OM = ON = R = NK + OK = ML + OL$
7. Опустим из т. I высоты IH_1 и IH_2 на AC и AB соответственно. $IH_1 = IH_2 = r$

~~8. $AO = OM = OB \Rightarrow \triangle AMB = \triangle AOB \Rightarrow ML = OL \Rightarrow OM = 2ML = 9$~~
~~Аналогично, $ON = 4$~~

~~8. $IH_2 = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R = IH_1 = r$~~

8. $AI = 2OH_{3,4}$ по теореме (см. рис.) $\Rightarrow OH_4 = \frac{1}{2}AI$
9. $OH_4 + OK + OL = 3r \Rightarrow 2R + OH_4 = 3r + 6,5.$

$2R + \frac{1}{2}AI = 3r + 6,5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2R+\frac{1}{2}AI=6{,}5+3r$

$2R+0{,}5r=6{,}5+3r$

$2{,}5r=2R-6{,}5$

~~Найти~~ Найти:
$AI=r-?$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) $ab \vdots 2^{14}7^{10} \Rightarrow \min ab = 2^{14}7^{10}$

$bc \vdots 2^{17}7^{17} \Rightarrow \min bc = 2^{17}7^{17}$

$ac \vdots 2^{20}7^{37} \Rightarrow \min ac = 2^{20}7^{37}$

$a^2b^2c^2_{\min} = 2^{31}\cdot 7^{27}\cdot 2^{20}\cdot 7^{37}$

$2^{51}\cdot 7^{64}$

$a = 2^8\cdot 7^{15}$

$b = 2^6\cdot 7^5$

$c = 2^{12}\cdot 7^{22}$

$2x^2+2x+1$

$D = 4-4$

$2x^2-5x+3$

$D = 25-4\cdot 6 = 1$

$2(x-\frac{5-1}{4})(x-\frac{5+1}{4})$

$2(x-1)(x-1{,}5)$

$bc_{\min} = 2\cdot 2^{17}\cdot 7^{17} = 2^{18}\cdot 7^{17}$

$a^2b^2c^2 = 2^{14+18+20}\cdot 7^{17+37+10}$

$a^2b^2c^2 = 2^{52}\cdot 7^{64}$

$abc = 2^{26}\cdot 7^{32}$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$$\begin{array}{r|l} a^2-6ab+b^2 & a+b \\ \underline{a^2+ab} & \overline{a-7b} \\ -7ab+b^2 & \\ \underline{-7ab-7b^2} & \\ 8b^2 & \end{array}$$

$a^2-6ab+b^2$

$\cancel{D = 36-4 = 32}$

$\cancel{(a-\frac{6-\sqrt{32}}{2})}($

$D = 36b^2-4b^2 = 32b^2$

$(a-\frac{6-4\sqrt{2}b}{2})(a-\frac{6+4\sqrt{2}b}{2})$

$(a-3+2\sqrt{2}b)(a-3-2\sqrt{2}b)$

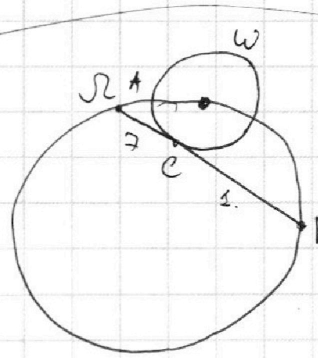
$\frac{a+b}{(a-7b)(a+b)+8b^2}$

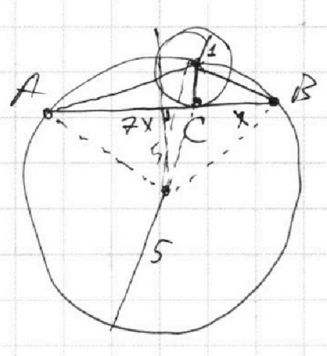
$8b^2 \vdots a+b$?

$8b^2 = (a+b)k$

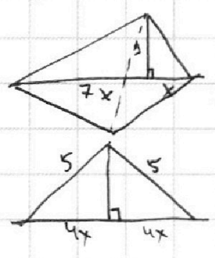
$a+b=8$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} = a-b.$





AB-?



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

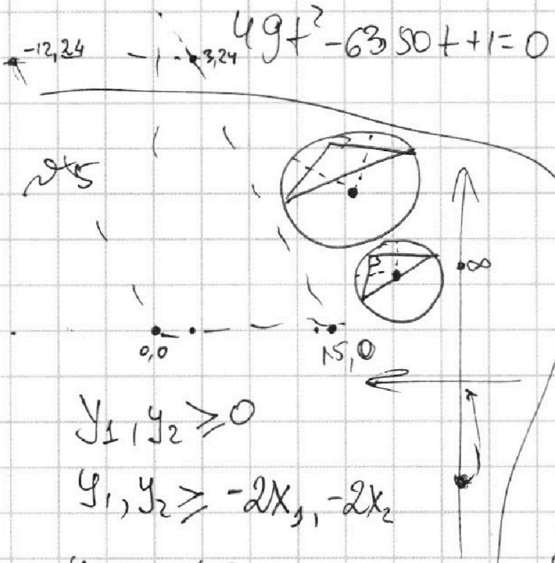
МФТИ

$4x = \frac{\sqrt{49x^4+50x^2+1}}{20}$

$6400x^2 = 49x^4 + 50x^2 + 1$

$49t^2 - 6350t + 1 = 0$

$D = 6350^2 - 4\cdot 49 = 60229$



$y_1, y_2 \geq 0$

$y_1, y_2 \geq -2x_1, -2x_2$

$y_1, y_2 \leq 24$

$y_1, y_2 \leq -2x_1+30, -2x_2+30$

$3k+b=24$

$15k+b=0$

$12k=24$

$k=2$

$b=30$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$37 \times 37 = 1369$

$203 \times 203 = 41209$

$13 \times 13 = 169$

$17 \times 17 = 289$

$237 \times 237 = 56169$

$217 \times 217 = 47089$

$283 \times 283 = 69169$

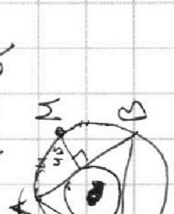
$243 \times 243 = 59049$

$287 \times 287 = 82369$

$253 \times 253 = 64009$

$247 \times 247 = 61009$

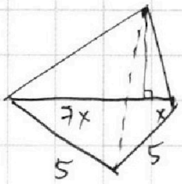
$243 \times 243 = 59049$

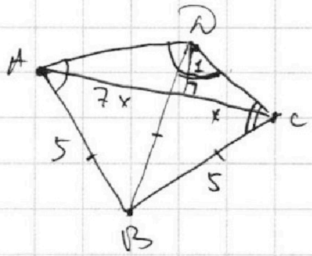


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



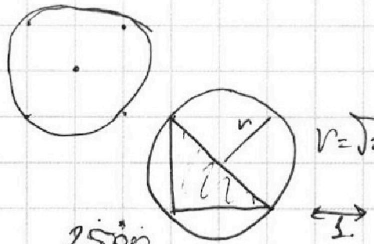


$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle BC$

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S_{ABC}$

$S_{ADC} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 8x = 4x$

$S_{ADC} = \frac{abc}{4R}$?



$r=\sqrt{2}$

$S=2$

$\frac{abc}{R} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}}{4\cdot\sqrt{2}} = 2$

$\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+49x^2}}{4\cdot 5}$

$\frac{\sqrt{49x^4+50x^2+1}}{20}$

$49 \times 4 = 196$

$2500 - 196 = 2304$

$D = 50^2 - 4\cdot 49 = 2500 - 196 = 2304 = 48^2$

$48 \times 48 = 2304$

$x^2 = \frac{-50+48}{2\cdot 49} = -\frac{1}{49}$

$x^2 = \frac{-50-48}{2\cdot 49} =$

$4x = \frac{\sqrt{49x^4+50x^2+1}}{20}$

$80x^2 = \sqrt{49x^4+50x^2+1}$

$6400x^2 = 49x^4+50x^2+1$

$49x^4 - 6350x^2 + 1 = 0$

$49t^2 - 6350t + 1 = 0$

$D = 6350^2 - 4\cdot 49$

6350×6350: 3175, 1905, 3810, 60325

$60325 : 25 = 2415$

$2415 : 3 = 805$; $805 : 5$

$60229 : 19 = 316$; 57, 32, 19, 132, 114, 189

$635 \times 635 = 3175 + 1905 + 3810 = 60325$

$60325 - 196 = 60229$

$60229 : 17 = 313$; 58, 22, 17, 52, 51

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$a,b,c \in N$

Минимальные значения:

$ab \vdots 2^{14}7^{10}$ $\quad ab \geq 2^{14}7^{10}$

$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17} \Rightarrow$ $\quad bc \geq 2^{17}\cdot 7^{17}$ $\Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{14+17+20}\cdot 7^{10+17+37}$

$ac \vdots 2^{20}7^{37}$ $\quad ac \geq 2^{20}\cdot 7^{37}$ $\quad (abc)^2 \geq 2^{51}\cdot 7^{64}$

$a,b,c \in N \Rightarrow abc \in N$ $\quad abc \geq 2^{25}\cdot 7^{32}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$

Т.к. abc - натуральное, то $abc \geq 2^{26}\cdot 7^{32}$

Если $abc = 2^{26}\cdot 7^{32}$, то: подходят значения:

$a = \frac{2^{26}\cdot 7^{32}}{2^{18}\cdot 7^{17}}$

для ab, bc, ac

$ab = 2^{14}\cdot 7^{10}$
$bc = 2^{18}\cdot 7^{17}$ $\Rightarrow$
$ac = 2^{20}\cdot 7^{37}$

$a = \frac{abc}{bc} = \frac{2^{26}\cdot 7^{32}}{2^{18}\cdot 7^{17}} = 2^{8}\cdot 7^{15}$

$b = \frac{abc}{ac} = \frac{2^{26}\cdot 7^{32}}{2^{20}\cdot 7^{3}}$

$c = \frac{abc}{ab} =$

№1.

$ab \vdots 2^{14}7^{10}$ $\quad abc \vdots 2^{14}7^{10}$

$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17} \Rightarrow abc \vdots 2^{17}7^{17} \Rightarrow abc \geq НОК(2^{14}\cdot 7^{10}, 2^{17}\cdot 7^{17}, 2^{20}\cdot 7^{37})$

$ac \vdots 2^{20}7^{37}$ $\quad abc \vdots 2^{20}7^{37}$

$НОК(2^{14}\cdot 7^{10}, 2^{17}\cdot 7^{17}, 2^{20}\cdot 7^{37}) = 2^{20}\cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{20}\cdot 7^{37}$

При $abc = 2^{20}\cdot 7^{37}$: возможны следующие значения a, b, c:

$a = \frac{abc}{bc} = \frac{2^{20}\cdot 7^{37}}{2^{17}\cdot 7^{17}} = 2^{3}\cdot 7^{20}$

$b = \frac{abc}{ac} = \frac{2^{20}\cdot 7^{37}}{2^{20}\cdot 7^{37}} = 1.$

$c = \frac{abc}{ab} = \frac{2^{20}\cdot 7^{37}}{2^{14}\cdot 7^{10}} = 2^{6}\cdot 7^{17}$