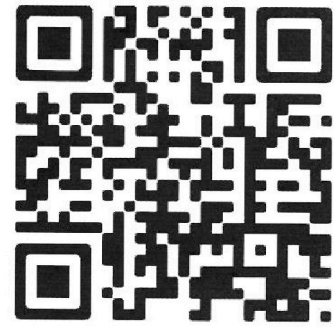


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



\sqrt{abc}

$$ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{20}, \quad bc = k \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot r$$

$$ab^2c = mk \cdot 2^{31} \cdot 7^{27} \Rightarrow b^2 = \frac{mk}{r} \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad \frac{mk}{r} \min = 2^A \cdot 7^{10}$$

$$abc^2 = kr \cdot 2^{37} \cdot 7^{54} \Rightarrow c^2 = \frac{kr}{m} \cdot 2^{23} \cdot 7^{44}, \quad \frac{kr}{m} \min = 2^C$$

$$a^2bc = mr \cdot 2^{34} \cdot 7^{44} \Rightarrow a^2 = \frac{mr}{k} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30}, \quad \frac{mr}{k} \min = 2^B$$

$$a^2b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mrk, \quad mrk \min = 2^A \cdot 7^{10} \cdot 2^B \cdot 2^C = 7^{10} \cdot 2$$

$$\Rightarrow abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64} \cdot 7^{10} \cdot 2} = 7^{37} \cdot 2^{26}$$

$$\text{Ответ: } abc \min = 7^{37} \cdot 2^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}, b = a+r : \frac{2a+r}{a^2 + 4a^2 + 2ar + r^2 - 6a(a+r)} =$$

$$= \frac{2a+r}{2a^2 + r^2 + 2ar - 6a^2 - 6ar} = \frac{2a+r}{r^2 - 4a^2 - 4ar - r^2 + r^2} =$$

$$= \frac{2a+r}{-(2a+r)^2 + 2r^2}, 2a+r = mk, -(2a+r)^2 + 2r^2 = m \ell$$

$$- m^2 k^2 + 2r^2 = m \ell, m \frac{k^2}{\ell} = -\frac{1}{(2a+r) + \frac{2r^2}{2ar}}$$

$$\frac{m^2 k^2}{m \ell} = m \frac{k^2}{\ell} : \frac{\ell}{mk^2} = \frac{2r^2}{(2a+r)p}$$

Ответ: $m=4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$

Дано:

$$AC:CB = 7:1, R=5, r=1$$

R - радиус окр. Ω

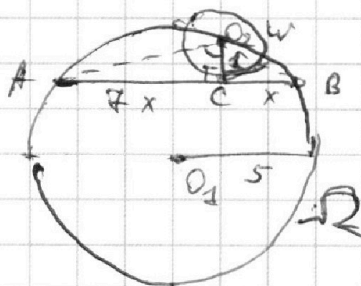
r - радиус окр. ω

Найти: AB

Решение:

1. Для $\triangle AO_2B$:

$$\frac{8x}{\sin \angle AO_2B} = 2R = 10.$$



$$\sin \angle AO_2B = \sin(\angle AO_2C + \angle CO_2B) = \sin \angle AO_2C \cos \angle CO_2B + \cos \angle AO_2C \sin \angle CO_2B$$

$$\sin \angle AO_2C = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}, \cos \angle AO_2C = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}, \sin \angle CO_2B = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\cos \angle CO_2B = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \Rightarrow \sin \angle AO_2B = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} +$$

$$+ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} = \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{49x^2+1}}$$

$$\Rightarrow 8x \cdot \frac{1}{\sin \angle AO_2B} = 8x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{49x^2+1}}{8x} = 10,$$

$$(x^2+1)(49x^2+1) = 100, 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0, 49t^2 + 50t - 99 = 0,$$

$$t = \frac{-50 + \sqrt{4(5^2 + 7^2 \cdot 99)}}{2 \cdot 49} = \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49} = x^2, x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7}$$

$$AB = 8x = \frac{8}{7} \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

$$\text{Ответ: } \frac{8}{7} \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



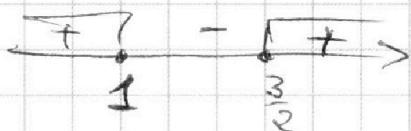
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \stackrel{a}{=} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \stackrel{b}{=} 2 - 7x$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 - 7x & (a-b)(a+b) = a-b \\ a-b = 2-7x \end{cases}$$

$$a=b: \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}, \Rightarrow 2 - 7x = 0,$$

$$\boxed{x = \frac{2}{7}}$$

$$\text{OZ: } 2x^2 - 5x + 3 \geq 0, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3}{2}; 1.$$



$$2x^2 + 2x + 1, \quad D = 4 - 8 < 0, \\ x \in \text{модель}$$

$$a \neq b: \quad a+b=1, \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1},$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1, \quad 7x - 1 \geq 0, \quad x > \frac{1}{7}:$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1, \quad 41x^2 - 22x - 3 = 0,$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 492}}{41 \cdot 2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}, \quad \boxed{x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}; \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

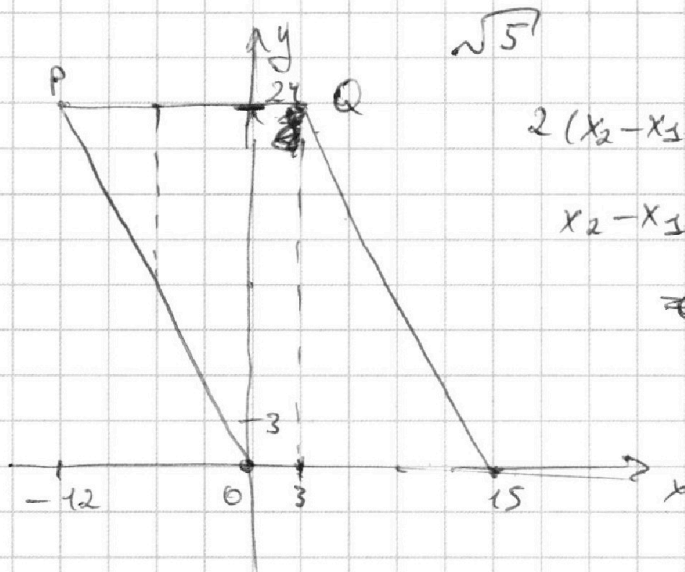
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12.$$

$$x_2 - x_1 = 0 : (\cancel{15} + \cancel{13}) = 2 \cdot 12 =$$

$$= 2 \cdot (1 + \dots + 13) \cdot 2 =$$

$$= 7 \cdot 13 \cdot 2$$

$$x_2 - x_1 = 1 : 15 \cdot 3 \cdot 2 +$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

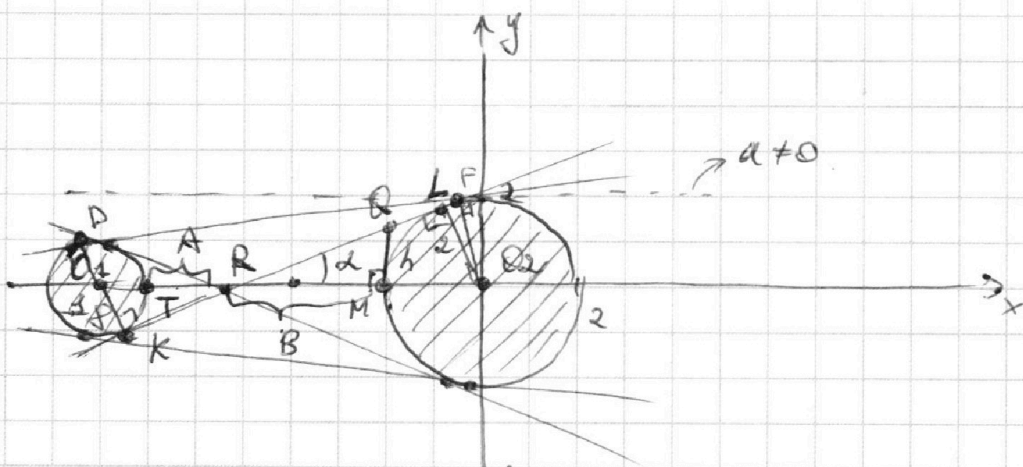
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{6}$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$



$\Delta O_1KR \sim \Delta RLO_2, k = \frac{1}{2}$. Пусть $TR = A, RM = B, \alpha = \angle O_2RL$

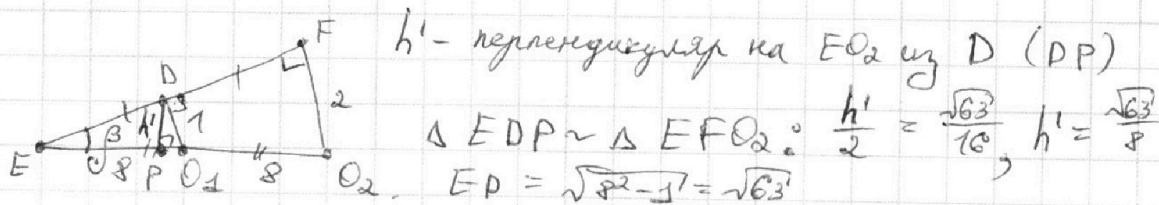
Тогда проведём из M перпендикуляр h . (MQ).

$$\Delta MQR \sim \Delta RLO_2: \frac{B}{RL} = \frac{h}{2}$$

$$\Delta O_1KR \sim \Delta RLO_2: (A+1) \cdot 2 = B+2, A+B=5, A = \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{10}{3}, RL = \sqrt{(B+2)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 55}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{55}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2B}{RL} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{55}} = \frac{10}{\sqrt{55}}, \Rightarrow \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{B} = \frac{10}{\sqrt{55}} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{\sqrt{55}}, \alpha_2 = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$



h' - перпендикуляр на EO_2 из D (DP)

$$\Delta EDP \sim \Delta EFO_2: \frac{h'}{2} = \frac{\sqrt{63}}{10}, h' = \frac{\sqrt{63}}{5}$$

$$EP = \sqrt{8^2 - 1} = \sqrt{63}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{6}$ (предположение)

$$\text{Тогда } a_3 = \operatorname{tg} \beta = \frac{h_1}{EP}, \quad EP = \cancel{EP} = \rho - \sqrt{1 - (h_1)^2} =$$
$$= \rho - \sqrt{1 - \frac{63}{64}} = \frac{63}{\rho}, \quad \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{63}}{\rho} = \frac{\rho}{63} = \frac{1}{\sqrt{63}} = a_3,$$
$$a_4 = -\frac{\sqrt{63}}{63}$$

$$\text{Ответ: } a = \cancel{\frac{3\sqrt{55}}{55}} \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}; \pm \frac{\sqrt{63}}{63}$$



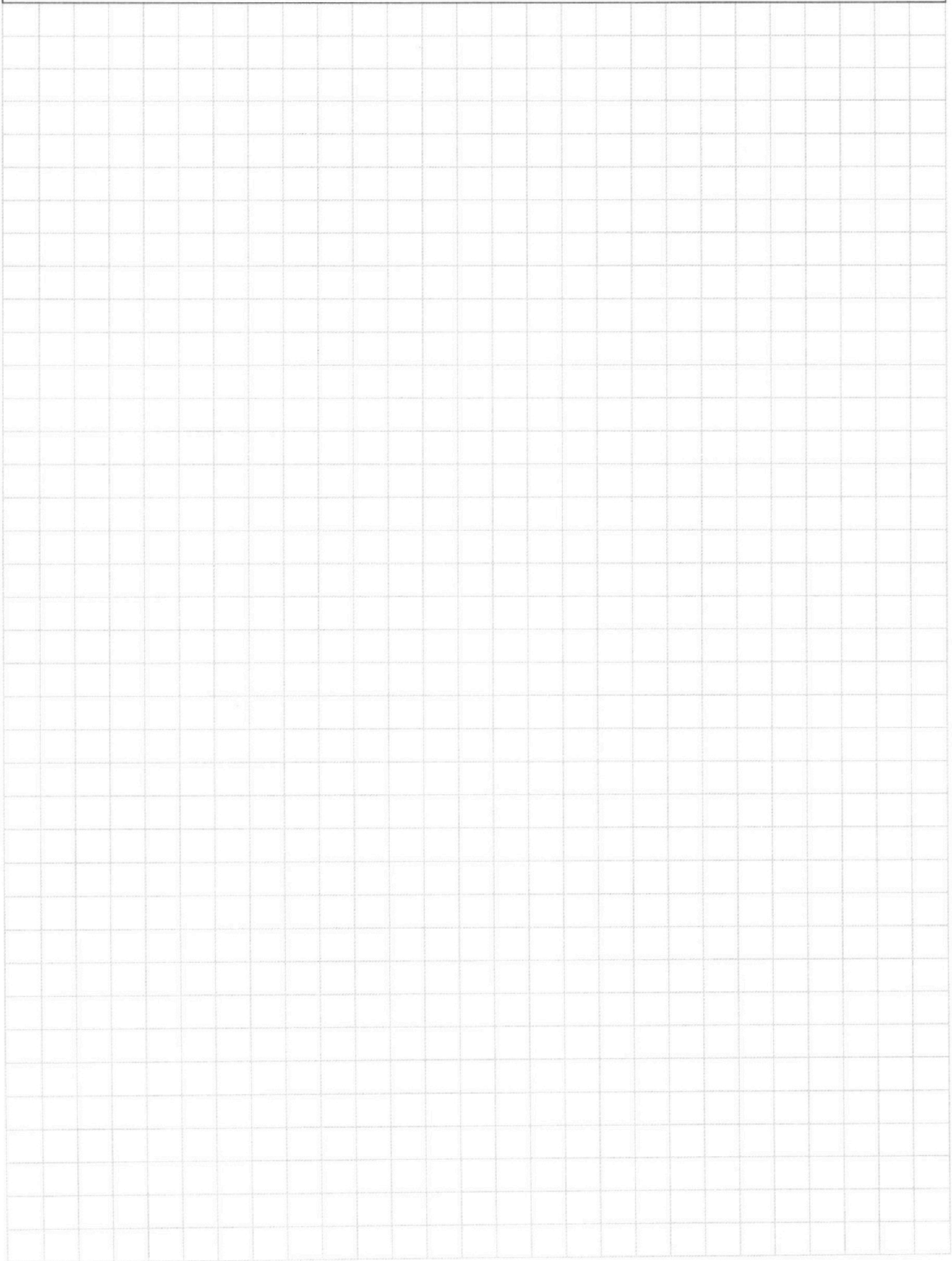
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



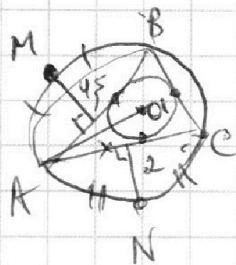
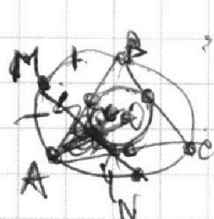
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$mk = 2^a \cdot 7^{10} \cdot 2^{b+c} \quad | \text{or}$$

$$mkr = 2^a \cdot 7^{10} \cdot \dots$$

$$2^b \cdot 2^c = 7^{10} \cdot 2^{a+d+c} = 7^{10} \cdot 2^1$$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{)16} \\ -128 \\ \hline 89 \\ -85 \\ \hline 4 \\ -4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{2r} = p(2a+n)$$

$$p^2 = 2 \cdot 16$$

$$p = 4$$

$$2r = 16$$

$$r = 8$$

$$a+b+c = 1$$

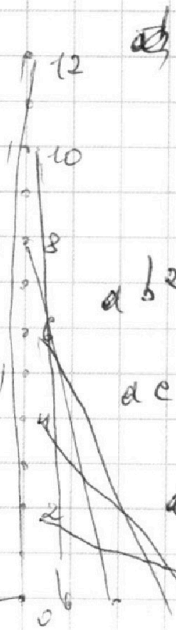
$$7^{10} \cdot 2^1$$

$$m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k \cdot 2^{14} \cdot 7^{17} \cdot r \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$18 \quad 15. \quad 1369 \overline{)16} \quad \frac{1}{54}$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} = 2^{25} \cdot 7^{32} = 2^2 \cdot 7^0 \cdot \sqrt{mkr}$$



$$a^2 b^2 c^2 = 2^{37} \cdot 7^{47}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$a^2 = 2^{17} \cdot 7^{30} \cdot \left(\frac{mk}{k}\right) = 2^{17} \cdot 7^{30}$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{15}$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} = 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$a^2 b^2 c^2 = mk \cdot 2^{31} \cdot 7^{27}$$

$$ac = r \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$b^2 = \left(\frac{mk}{r}\right) = 2^{11} \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^5$$

$$\frac{kr}{m} = 2$$

$$\sqrt{2^{54} \cdot 7^{74}} = \sqrt{2^{27} \cdot 7^{37}} = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$abc^2 = kr \cdot 2^{37} \cdot 7^{54}$$

$$ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$c^2 = \left(\frac{kr}{m}\right) = 2^{23} \cdot 7^{44}$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{22}$$

$$\frac{mk}{r} = 2^a \cdot 7^{10} \quad \frac{kr}{m} = 2^b$$

$$\frac{mr}{k} = 2^b \quad \frac{mkr}{k^2} = 2^b$$

$$r = 2 \quad \frac{k^2}{2} = 2 \cdot 7^{10} \quad \frac{m}{k} = 1$$

$$\frac{mr}{k} \cdot \frac{kr}{m} = 4 = 2^2 \cdot 2^0 = r^2$$

$$r^2 = 4 \quad r = 2$$

$$\boxed{r^2 = 2 \frac{b+c}{2}}$$

$$k^2 = 4 \cdot 7^{10} \quad k = 2 \cdot 7^5$$

$$\boxed{r = 2}$$

$$\boxed{k = 2 \cdot 7^5 = m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 = t \quad 49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$\frac{a}{b} - \text{кросскр.} \quad a+b = mA \quad a^2 - 6ab + b^2 = mB$$

$$t = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot (-99)}}{2 \cdot 49}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = m^2 A^2 \quad 49x^2 + 2 + 49x^4 + x^2 =$$

$$a^2 + b^2 - 6ab = mB \quad = 100 =$$

$$= 49x^4 + 50x^2 + x^2 = 99$$

$$6 = mA^2 - B \quad 2 \cdot 3 = 6$$

$$8ab = m^2 A^2 - mB = m(mA^2 - B)$$

$$ab : m \quad ab : mA^2 - B$$

$$\frac{a+b}{B} \quad \frac{a(a-cb) + b^2}{B}$$

$$b = a + r$$

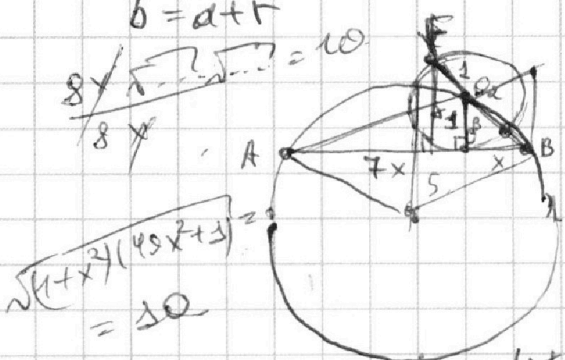
$$\frac{8x}{8x} \cdot A \quad \sin \alpha = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

$$b^2 = (a-cb) \cdot k$$

$$b^2 = (a-cb) / k$$

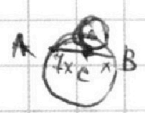
$$(a+k)(a-cb) \quad k \neq b$$

$$a+b$$



$$50^2 + 49 \cdot 99 \cdot 4$$

$$x^2 = \sqrt{7+x^2} \cdot (\sqrt{1+x^2} - 1)$$



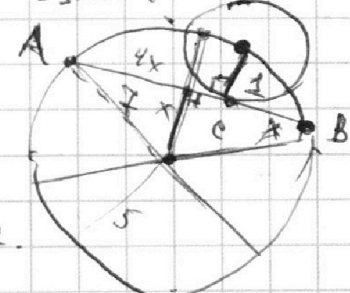
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$O_2 B = \sqrt{1+x^2}$$

$$x^2 = 1+x^2 - \sqrt{1+x^2}$$

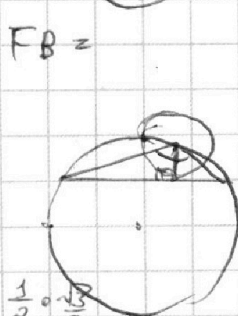
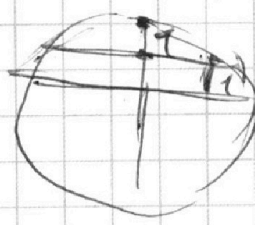
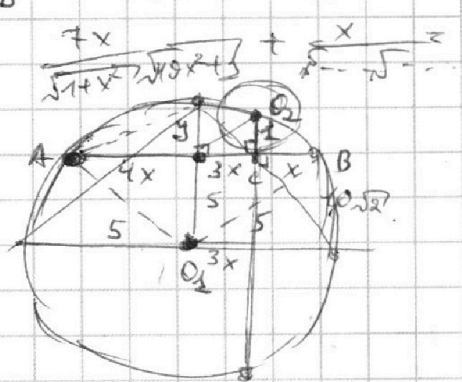
$$AB = 8x$$

$$\frac{8x}{\sin \alpha} = 10 = 2 \cdot R$$



$$\sqrt{1+x^2} = 1$$

$$\frac{8x}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{49x^2+1}} = \sin \alpha$$



$$\sin(\alpha) = \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$30 + 30$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \sin \beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$4(2x^2 + 2x + 1) = (7x - 1)^2$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1$$

$$43x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 492}}{4 \cdot 43}$$

Q3: $2x^2 - 5x + 3 \neq 2x^2 + 2x + 1$
 $2x^2 - 5x + 3 \neq 2x^2 + 2x + 1$
 $2 - 5x \neq 2 + 2x$
 $2 - 4x \neq 0$
 $2 \neq 4x$
 $x \neq \frac{1}{2}$

$$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = r \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc^2 = km \cdot 2^{31} \cdot 7^{54}$$

$$abc = kr \cdot 2^{34} \cdot 7^{47}$$

$$ac = r \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

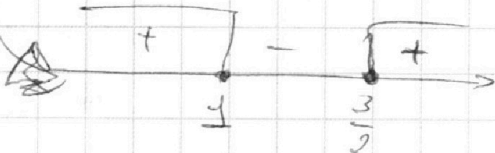
$$a^2 = \frac{kr}{m} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30}$$

$$a = 2^{\frac{17}{2}} \cdot 7^{15}$$

$\sqrt{a^2} = a$
 $a = b$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \frac{3}{2}; 1$$



$$2x^2 = 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x$$

$$\frac{22 \pm 4\sqrt{1}}{4 \cdot 43} = \frac{11 \pm 2\sqrt{1}}{43}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$a^2 - b^2 = 2 - 7x$$

$$a - b = 2 - 7x$$

$$a^2 - b^2 = a - b$$

$$(a - b)(a + b) = a - b$$

I: $a - b \neq 0$

$$a + b = 1$$

II: $a - b = 0$: $a = b$

$$x = \frac{2}{7}$$

$4 \cdot 244 = 4 \cdot 4 \cdot 61$
 $= 16 \cdot 61$
 $\frac{244}{4} = 61$
 $\frac{16}{4} = 4$
 $\frac{61}{1} = 61$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0. \end{cases}$$

$$y = ax + 10b.$$

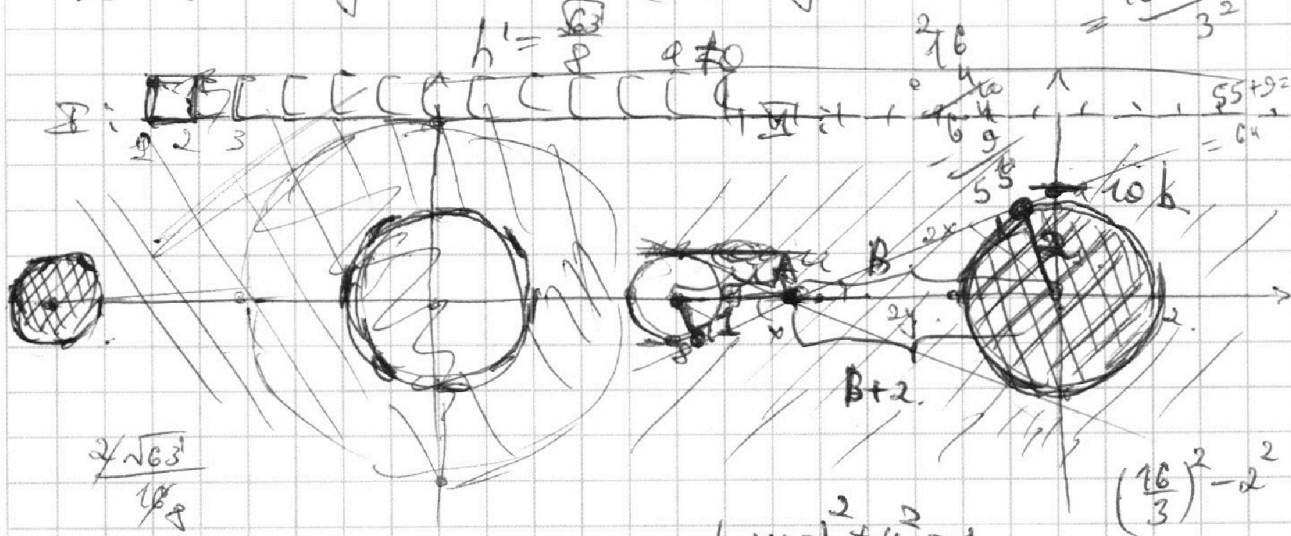
$$4 \cdot 55$$

$$\frac{16 \cdot 404 - 4 \cdot 3^2}{9} = \frac{4(16 \cdot 4 - 9)}{9}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{ГМТ}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

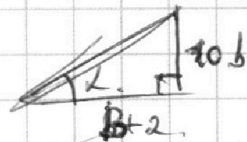
$$\frac{16^2 - 4 \cdot 3^2}{3^2} = \frac{16^2 - 4 \cdot 3^2}{3^2}$$



$a=0: y=10b \Rightarrow a \neq 0$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

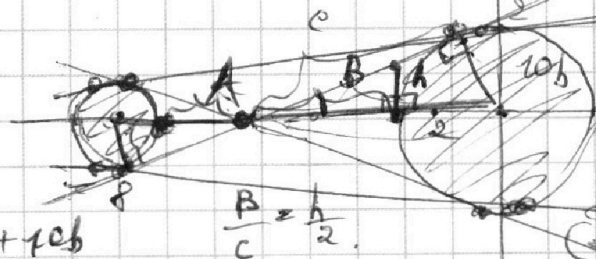
$$c = \sqrt{(B+2)^2 - 2^2}$$



$$y^2 = 1 - (x+8)^2$$

$$y = \sqrt{1 - (x+8)^2}$$

$$-\sqrt{1 - (x+8)^2} = ax + 10b$$



$$a = \frac{10b \cdot 3}{16}$$

$$1 - (x+8)^2 = a^2 x^2 + 20axb + 100b^2$$

$$A+B=5$$

$$\frac{10}{3} + \frac{6}{3} = \frac{16}{3}$$

$$3A=5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$$

$$(A+1) \cdot 2 = B+2$$

$$2A+2 = B+2$$

$$2A=B$$

$$B = \frac{10}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t = \frac{-50 + \sqrt{50^2 + 49 \cdot 99 \cdot 4}}{49 \cdot 2} = 5^4 \cdot 4 + 7^2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 4 = (a+b)^2 - 8ab$$

$$= 4(5^4 + 7^2 \cdot 99) = 4 \cdot 5476 = 4 \cdot 401369$$

$$(5^2 \cdot 2)^2 = 5^4 \cdot 2^2$$

$$5 \cdot 25 = 625$$

$$\frac{-50 + \sqrt{1369}}{49 \cdot 2} = \frac{1}{m} = -1$$

$$2at + r = mk$$

$$- (2a+t)^2 + 2t^2 = -mk$$

$$m^2 k^2 + 2r^2 = m$$

$$\frac{1}{m} = -1$$

$$x^2 = \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49}$$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7}$$

$$b = a + r$$

$$\frac{a}{b} = \text{косоукр.}$$

$$a + b = 2r$$

$$a^2 = 6ab + b^2$$

$$a^2 - 6a(a+r) + a^2 + 2ar + r^2$$

$$2a + r$$

$$4a^2 + 4ar + r^2 = 2a^2 + 2ar + r^2 - 6a^2 - 6ar$$

$$r^2 - 4a^2 - 4ar = r^2 - 4a^2 - 4ar$$

$$a = 1 \quad r = 4$$

$$a^2 - 6a(a+r) + a^2 + 2ar + r^2 = 2a^2 + 2ar + r^2 - 6a^2 - 6ar$$

$$r^2 - 4a^2 - 4ar = r^2 - 4a^2 - 4ar$$

$$a = 1 \quad r = 4$$

$$4a^2 + 4ar + r^2 = 2a^2 + 2ar + r^2 - 6a^2 - 6ar$$

$$r^2 - 4a^2 - 4ar = r^2 - 4a^2 - 4ar$$

$$a = 1 \quad r = 4$$

$$r^2 - 4a^2 - 4ar = r^2 - 4a^2 - 4ar$$

$$a = 1 \quad r = 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including geometric diagrams and algebraic derivations.

Diagrams:

- A circle with center O and points A, B, C, M, N on its circumference. A vertical line AN passes through the center. A horizontal line AC is drawn. A point X is marked on the circle. A smaller circle is inscribed within the larger one.
- A coordinate system with x and y axes. A point P is marked. A vertical line PD is drawn. A horizontal line AD is drawn. A point Q is marked on the y -axis.
- A circle with center O and points A, B, C, D on its circumference. A vertical line AD passes through the center. A horizontal line BC is drawn. A point X is marked on the circle.

Equations and Formulas:

- $a + b = mk$
- $a^2 - cab + b^2 = m^2$
- $a^2 + 2ab + b^2 = \frac{m^2 k^2}{m^2}$
- $8ab = m(mk^2 - 1)$
- $\frac{a}{b} = p = a + b - \frac{8ab}{a + b}$
- $\frac{(a + b)^2 - 8ab}{a + b} =$
- $2(x^2 - 2x + 4) + (4 - x^2) = 4$
- $2x^2 - 2x + 4 - 4 + x^2 = 4$
- $3x^2 - 2x = 4$
- $3x^2 - 2x - 4 = 0$
- $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6}$
- $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$
- $1 + 2 + 3 = 6 = 2 \cdot 3$
- $1 + 3 = 4 = 2^2$
- $2 + 3 = 5$
- $1 + 5 = 6 = 2 \cdot 3$
- $2 + 5 = 7$
- $1 + 7 = 8 = 2^3$
- $3 + 7 = 10$
- $1 + 10 = 11$
- $2 + 10 = 12 = 3 \cdot 4$
- $3 + 10 = 13$
- $1 + 13 = 14 = 2 \cdot 7$
- $2 + 13 = 15$
- $3 + 13 = 16 = 2^4$
- $1 + 16 = 17$
- $2 + 16 = 18 = 2 \cdot 3^2$
- $3 + 16 = 19$
- $1 + 19 = 20 = 2^2 \cdot 5$
- $2 + 19 = 21 = 3 \cdot 7$
- $3 + 19 = 22$
- $1 + 22 = 23$
- $2 + 22 = 24 = 2^3 \cdot 3$
- $3 + 22 = 25 = 5^2$
- $1 + 25 = 26 = 2 \cdot 13$
- $2 + 25 = 27 = 3^3$
- $3 + 25 = 28 = 2^2 \cdot 7$
- $1 + 28 = 29$
- $2 + 28 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- $3 + 28 = 31$
- $1 + 31 = 32 = 2^5$
- $2 + 31 = 33 = 3 \cdot 11$
- $3 + 31 = 34 = 2 \cdot 17$
- $1 + 34 = 35 = 5 \cdot 7$
- $2 + 34 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$
- $3 + 34 = 37$
- $1 + 37 = 38 = 2 \cdot 19$
- $2 + 37 = 39 = 3 \cdot 13$
- $3 + 37 = 40 = 2^3 \cdot 5$
- $1 + 40 = 41$
- $2 + 40 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
- $3 + 40 = 43$
- $1 + 43 = 44 = 2^2 \cdot 11$
- $2 + 43 = 45 = 3^2 \cdot 5$
- $3 + 43 = 46 = 2 \cdot 23$
- $1 + 46 = 47$
- $2 + 46 = 48 = 2^4 \cdot 3$
- $3 + 46 = 49 = 7^2$
- $1 + 49 = 50 = 2 \cdot 5^2$
- $2 + 49 = 51 = 3 \cdot 17$
- $3 + 49 = 52 = 2^2 \cdot 13$
- $1 + 52 = 53$
- $2 + 52 = 54 = 2 \cdot 3^3$
- $3 + 52 = 55 = 5 \cdot 11$
- $1 + 55 = 56 = 2^3 \cdot 7$
- $2 + 55 = 57 = 3 \cdot 19$
- $3 + 55 = 58 = 2 \cdot 29$
- $1 + 58 = 59$
- $2 + 58 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- $3 + 58 = 61$
- $1 + 61 = 62 = 2 \cdot 31$
- $2 + 61 = 63 = 3^2 \cdot 7$
- $3 + 61 = 64 = 2^6$
- $1 + 64 = 65 = 5 \cdot 13$
- $2 + 64 = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$
- $3 + 64 = 67$
- $1 + 67 = 68 = 2^2 \cdot 17$
- $2 + 67 = 69 = 3 \cdot 23$
- $3 + 67 = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
- $1 + 70 = 71$
- $2 + 70 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$
- $3 + 70 = 73$
- $1 + 73 = 74 = 2 \cdot 37$
- $2 + 73 = 75 = 3 \cdot 5^2$
- $3 + 73 = 76 = 2^2 \cdot 19$
- $1 + 76 = 77 = 7 \cdot 11$
- $2 + 76 = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$
- $3 + 76 = 79$
- $1 + 79 = 80 = 2^4 \cdot 5$
- $2 + 79 = 81 = 3^4$
- $3 + 79 = 82 = 2 \cdot 41$
- $1 + 82 = 83$
- $2 + 82 = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
- $3 + 82 = 85 = 5 \cdot 17$
- $1 + 85 = 86 = 2 \cdot 43$
- $2 + 85 = 87 = 3 \cdot 29$
- $3 + 85 = 88 = 2^3 \cdot 11$
- $1 + 88 = 89$
- $2 + 88 = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- $3 + 88 = 91 = 7 \cdot 13$
- $1 + 91 = 92 = 2^2 \cdot 23$
- $2 + 91 = 93 = 3 \cdot 31$
- $3 + 91 = 94 = 2 \cdot 47$
- $1 + 94 = 95 = 5 \cdot 19$
- $2 + 94 = 96 = 2^5 \cdot 3$
- $3 + 94 = 97$
- $1 + 97 = 98 = 2 \cdot 7^2$
- $2 + 97 = 99 = 3^2 \cdot 11$
- $3 + 97 = 100 = 2^2 \cdot 5^2$