



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ac : 7^{39}; \Rightarrow abc : 7^{39} \quad \underline{N1}$$

Пусть степени двойки в разложении на простые множители числа a равна x , числа b - y , числа c - z . Тогда, по $ab : 2^{15}; \Rightarrow$

$$x+y \geq 15; \text{ по } bc : 2^{17}; \Rightarrow y+z \geq 17; \text{ по } ac : 2^{23}; \Rightarrow x+z \geq 23;$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) = (x+y) + (y+z) + (x+z) \geq 15 + 17 + 23 = 55; \Rightarrow x+y+z \geq 27,5.$$

a, b, c - натуральные; x, y, z - степени двойки в их разложении на простые множители; $\Rightarrow x, y, z \in \mathbb{N}; \Rightarrow x+y+z \geq 28; \Rightarrow abc : 2^{28}$.

$$abc : 2^{28}, abc : 7^{39}, \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

Это была оценка. Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^{11}; b = 2^5; c = 2^{12} \cdot 7^{28}$;

$$\text{тогда } ab = 2^{16} \cdot 7^{11} : (2^{15} \cdot 7^{11}); bc = 2^{17} \cdot 7^{28} : (2^{17} \cdot 7^{18});$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : (2^{23} \cdot 7^{39}); \text{ при этом } abc = 2^{28} \cdot 7^{39} - \text{минимально.}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Рассмотрим это максимальное m . Пусть $a+b = k_1 \cdot m$. Тогда
 $a^2 - 7ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 9ab = (a+b)^2 - 9ab = k_1^2 \cdot m^2 - 9ab \stackrel{!}{=} m$; \Rightarrow
 $\Rightarrow 9ab \stackrel{!}{=} m$. Пусть $9ab = k_2 \cdot m$. Тогда ~~$9ab - 9ab = 9ab - 9ab = 0$~~
 ~~$= (k_2 - k_1^2) m \stackrel{!}{=} m$. Без потери общности можно считать выражение~~
~~симметричным относительно a и b , но $a > b$. Тогда $a+b \leq 2a$, \Rightarrow~~
 $(a, m) = 1$ (иначе бы b тоже делилось на их НОД, но $(a, b) = 1$).
 $(b, m) = 1$ по той же причине.

Но $9ab \stackrel{!}{=} m$; $\Rightarrow m \leq 9$. $9 \stackrel{!}{=} m$; $\Rightarrow m \leq 9$ Т.к. $b = a - k_1 m \stackrel{!}{=} \text{НОД}(a, m)$

Пример: $a=8; b=1$; $\Rightarrow \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{8+1}{64-56+1} = \frac{9}{9}$.

Здесь можно в дроби $\frac{9}{9}$ можно сократить и числитель, и
знаменатель на 9, и получить $\frac{1}{1}$; $\Rightarrow m=9$. Мы получили
оценку, что $m \leq 9$; ~~и ответ: $m=9$~~

\Rightarrow Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

Обозначим O центр ω . $OC \perp AB$; $OC = 7$ (т.к. $C \in \omega$).

Пусть $AC = 17x$, тогда $BC = 7x$. Теорема синусов для $\triangle ABD$, окружность ω :

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2 \cdot 13; \triangle OCA \text{ и } \triangle OCB \text{ — прямоугольные; } \Rightarrow OC = \sin \angle BAD \cdot AD;$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{17^2 x^2 + 7^2}; \quad BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{7^2 x^2 + 7^2} = 7\sqrt{x^2 + 1};$$

$$\sin \angle BAD = \frac{OC}{AD} = \frac{7}{\sqrt{17^2 x^2 + 7^2}}; \text{ еще раз т. синусов:}$$

$$\frac{7\sqrt{x^2 + 1}}{7\sqrt{17^2 x^2 + 7^2}} = 26 \Rightarrow \sqrt{(x^2 + 1)(17^2 x^2 + 7^2)} = 26; \text{ в квадрат:}$$

$$289x^4 + (289 + 49)x^2 + 49 = 676;$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0 \text{ — биквадратное уравнение.}$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627 = (169 \cdot 2)^2 + 4 \cdot 17^2 \cdot 3 \cdot 209 = 4(169^2 + 289 \cdot 3 \cdot 209) =$$

$$= 4 \cdot 209764; \quad x^2 = \frac{-338 \pm 2\sqrt{209764}}{2 \cdot 289}$$

$$x^2 > 0; \Rightarrow x^2 = \frac{-338 + 2\sqrt{209764}}{2 \cdot 289}$$

$$x = \frac{-169 + \sqrt{209764}}{289}$$

$$x = \frac{-169 + \sqrt{209764}}{17}$$

Заметим, что

$$\sqrt{209764} = 458$$

$$x = \frac{-169 + 458}{17} = \frac{289}{17} = 1.$$

Итак, $x = 1$. $AB = AC + CB = 17x + 7x = 24x = 24$.

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad \text{N4}$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$D = 9 - 12 < 0$
 коэф. при x больше 0
 \Rightarrow всегда положительно

ОДЗ: $x \notin (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$ вне зависимости от x .

Допнохим на эту сумму.

$$(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$-9x + 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

1 случай - $1 - 9x = 0; \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

2 случай - $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$ / в квадрат

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2} = 0$$

$D = 9 - 48 < 0$
 $\Rightarrow 0$ (т.к. это корень)

коэф. при x^2 больше 0
 \Rightarrow оно всегда > 0

$(6x^2 - 3x + 2) + 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2} > 0; \Rightarrow$ этот случай не даёт новых корней.

Проверка по ОДЗ: $\frac{1}{9} = 1 - \frac{8}{9} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ (т.к. $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{8}{9}$), т.к. $\frac{3}{9} < \frac{1}{2} < \frac{64}{81}$

$\Rightarrow \frac{1}{9} \notin (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}); \Rightarrow$ этот корень подходит.

Других корней, как мы выяснили, нет. **Ответ: $x = \frac{1}{9}$**

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$y_2 + 2x_2 = y_1 + 2x_1 + 14$$

Заметим, что $y + 2x = \text{const}$ на прямой $y = -2x + \text{const}$

Заметим, что ~~горизонтальные~~ ^{две} ~~вертикальные~~ ^{стороны} параллелограмма лежат на
прямых типа $y = -2x + \text{const}$, а другие две - на прямых типа
 $y = \text{const}$.

Нам нужны пары прямых вида $y_1 = -2x + C$ и $y_2 = -2x + C + 14$,
где C - какая-то константа. Такие прямые, проходящие по четным
точкам, идут, очевидно, с шагом 1 по оси y , и, следовательно, с
шагом 0,5 по оси x . На прямой, ~~где при $y=0$~~ где при $y=0$ x - целый,
есть 14 целых точек: $y=0; y=2; y=4; \dots; y=24; y=26$. На прямой, где
при $y=0$ x - нецелый, есть 13 целых точек: $y=1; y=3; \dots; y=25$.

Если две ~~прямые~~ ~~прямые~~ (имеется ввиду как-во целых точек
внутри параллелограмма, оно посчитано именно так, потому что
множество прямых $y = -2x + C$ параллельно сторонам параллело-
грамма, и поэтому у двух прямых, у которых $C_2 - C_1$ - чётное, кол-во
целых точек не будет отличаться, ведь это такая же прямая,
просто сдвинутая на $\frac{C_2 - C_1}{2}$ клеток вправо). Заметим также, что
14 чётно, поэтому у ~~двух~~ пары подходящих прямых кол-во подо-
ходящих точек одинаково, и, при ~~уравнении~~ $y_1 = y_2 = 0; x_2 - x_1 = 7$.

Итак, пары подходящих нам прямых: $y_1 = -2x + C; y_2 = -2x + C + 14$.
При $y_1 = y_2 = 0$, ~~их значения~~ $(x_1, x_2) = \{(0, 7); (\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}); (1, 8); \dots; (8\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2}); (9, 16)\}$.
(это - все пары, т.к. "нижняя" сторона параллельна оси x , и на ней
 $x=0; 0 \leq y \leq 16$). Есть 10 пар с ~~целыми~~ целыми x и 9 - с нецелыми.
На двух "целых" прямых можно взять за A любую из 14 целых точек, за B -
тоже любую из 14 ~~не~~ целых точек второй прямой, \rightarrow каждая пара "целых" прямых
даёт $14^2 = 196$ пар $(A; B)$, и, аналогично, каждая пара "нецелых" прямых
даёт $13^2 = 169$ пар $(A; B)$. Значит, всего пар ~~прямых~~ $(A; B) = 196 \cdot 10 + 169 \cdot 9 =$
 $= 10 \cdot (196 + 169) - 169 = 3650 - 169 = 3481$.

Ответ: 3481

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



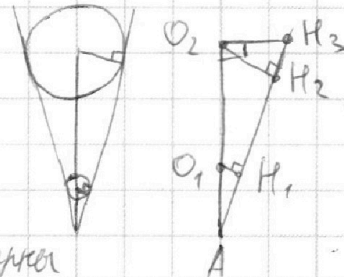
№6

$x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ — уравнение круга
 $x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ — уравнение круга с центром в $(0; 0)$ и радиусом 1
 $x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 12)^2 \leq 16$ — уравнение круга с центром в $(0; 12)$ и радиусом $\sqrt{16}$, то есть с радиусом 4. Круги находятся друг над другом, сумма радиусов равна 5, а расстояние между центрами — 12, \Rightarrow круги не пересекаются. $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$; \Rightarrow корни — точки, лежащие в одном из кругов.

$ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 8b$ — прямая. У системы ровно 2 решения, \Rightarrow эта прямая — общая касательная к 2 кругам (т.к. если прямая зайдёт в один из кругов, корней будет бесконечное количество — все точки хорды (окружности, ограничивающей круг), по которой прямая пересечёт круг, а если прямая не касается одного из кругов, корней будет не более 1, т.к. одна прямая не может касаться одного круга дважды).

Случай — внешняя касательная. Их 2, и, поскольку центры кругов находятся друг над другом ($x_1 = x_2 = 0$), эти касательные симметричны относительно оси Y .

$O_1(0; 0)$; $O_2(0; 12)$ — центры окружностей; O_1K_1 и O_2K_2 — радиусы, проведённые к точке касания, они перпендикулярны касательной. $O_1K_1 = 1$; $O_2K_2 = 4$; $O_1O_2 = 12$.



$\angle O_1AK_1$ — общий острый угол в прямоугольных треугольниках AO_1K_1 и AO_2K_2 ; $\Rightarrow \triangle AO_1K_1 \sim \triangle AO_2K_2$; $\Rightarrow \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1K_1}{O_2K_2} \Rightarrow \frac{AO_1}{AO_1 + 12} = \frac{1}{4}$; $\Rightarrow \frac{AO_1}{AO_1 + 12} = \frac{1}{4}$; $\Rightarrow AO_1 = 4$; $\Rightarrow A(0; -4)$

Пусть K_3 — пересечение касательной с перпендикуляром к оси Y через O_2 . Тогда координаты $K_3(x(K_3); y(K_3)) = y(O_2) = 12$; $x(K_3) = x(O_2) + O_2K_3 = O_2K_3 = \frac{O_2K_2}{\cos \angle K_3O_2K_2} = \frac{4}{\cos(90^\circ - \angle AO_2K_2)} = \frac{4}{\sin \angle AO_2K_2} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$; $\Rightarrow K_3(16; 12)$. Касательная проходит через точки $A(0; -4)$; $K_3(16; 12)$; прямая: $y = -ax + 8b$.

знаем: $\begin{cases} -4 = 0 + 8b \\ 12 = -16a + 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ 16 = -16a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ — выбрано в середине набора 2 случая

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



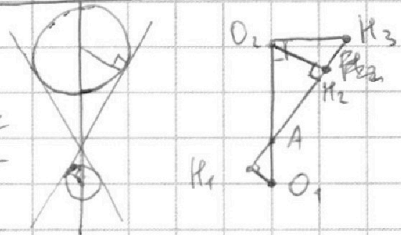
№6 (продолжение)

~~Вторая внешняя касательная симметрична первой относительно оси Y , \Rightarrow она проходит через точки $A(0, -4)$ и $K_2'(-16, 12)$ (K_2' — отражённая относительно оси Y точка K_2).~~

$$\begin{cases} -4 = 0 + 8b \\ 12 = 16a + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ 16a = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2 случай — внутренняя касательная. Аналогично:

O_1, O_2 — центры окружностей; O_1K_1 и O_2K_2 — радиусы к точке касания, A — точка пересечения касательных с осью Y , K_3 — точка пересечения касательной с перпендикуляром к оси Y через точку O_2 . $O_1(0; 0)$; $O_2(0; 12)$;



$O_1K_1 = 1$; $O_2K_2 = 4$; $O_1O_2 = 12$. Касательные опять симметричны относительно оси Y , потому что центры окружностей всё ещё лежат над дугой, а касательные симметричны относительно прямой через центры окружностей.

$\angle K_1AO_1 = \angle K_2AO_2$ (вертикальные), $\angle K_2O_2A = \angle K_1O_1A = 90^\circ$; $\Rightarrow \triangle K_1AO_1 \sim \triangle K_2AO_2$ (по трём углам); $\Rightarrow \frac{K_1O_1}{K_2O_2} = \frac{O_1A}{AO_2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{O_1A}{12 - O_1A}$

$12 - O_1A = 4O_1A$; $O_1A = \frac{12}{5}$; A лежит на оси Y между O_1 и O_2 ; \Rightarrow её координаты $A(0; \frac{12}{5})$. Координаты точки K_3 : $x(K_3) = x(O_2) + O_2K_3 = \frac{O_2K_2}{\sin \angle K_2}$

1 случай. Координаты K_3 : $y(K_3) = y(O_2) = 12$; $x(K_3) = x(O_2) + O_2K_3 = \frac{O_2K_2}{\cos \angle K_3O_2K_2} = \frac{O_2K_2}{\cos(90^\circ - \angle AO_2K_2)} = \frac{O_2K_2}{\sin \angle AO_2K_2} = \frac{O_2K_2}{\frac{AK_2}{AO_2}}$; по т. Пифагора: $AK_2 = \sqrt{AO_2^2 - O_2K_2^2} = \sqrt{16^2 - 4^2} = 4\sqrt{15}$; $\Rightarrow x(K_3) = \frac{4}{4\sqrt{15}} = \frac{16}{\sqrt{15}}$; $\Rightarrow K_3(\frac{16}{\sqrt{15}}; 12)$

Внешние касательные симметричны относительно прямой между центрами окружностей (т.е. оси Y); \Rightarrow касательные — это прямые AK_3 и AK_3' , где $K_3'(\frac{-16}{\sqrt{15}}; 12) = K_3$, отражённая относительно оси Y . Касательные: $y = -ax + 8b$.

первая касательная: $\begin{cases} -4 = 0 + 8b \\ \frac{16}{\sqrt{15}} \cdot 12 = -a \cdot \frac{16}{\sqrt{15}} + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ 16 = \frac{-16a}{\sqrt{15}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{15} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

вторая касательная: $\begin{cases} -4 = 0 + 8b \\ 12 = -a \cdot \frac{-16}{\sqrt{15}} + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ 16 = \frac{16a}{\sqrt{15}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{15} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

2 случай. Координаты K_3 : $y(K_3) = y(O_2) = 12$; $x(K_3) = x(O_2) + O_2K_3 = \frac{O_2K_2}{\cos \angle K_2O_2K_3} = \frac{4}{\cos(90^\circ - \angle AO_2K_2)} = \frac{4}{\sin \angle AO_2K_2} = \frac{AK_2}{AO_2}$; по т. Пифагора: $AK_2 = \sqrt{AO_2^2 - O_2K_2^2} =$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение - 2)

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(12 - \frac{12}{5}\right)^2 - 4^2} = \sqrt{12^2 \cdot \frac{4^2}{5^2} - 4^2} = 4\sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 1} = \frac{4\sqrt{119}}{5} \Rightarrow x(H_3) = \frac{4}{5 \cdot A O_2} \\ &= \frac{5 \cdot \left(12 - \frac{12}{5}\right)}{\sqrt{119}} = \frac{12 \cdot 4}{\sqrt{119}} = \frac{48}{\sqrt{119}} \Rightarrow \Pi_3 \left(\frac{48}{\sqrt{119}}; 12 \right). \end{aligned}$$

Аналогично: касательные симметричны - прямые AK_3 и AK'_3 , где $K'_3 \left(\frac{-48}{\sqrt{119}}; 12 \right)$.

Касательные: $y = -ax + 8b$.

Первая касательная: ~~12~~

$$\begin{cases} \frac{12}{5} = 0 + 8b \\ 12 = \frac{-48a}{\sqrt{119}} + 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{10} \\ \frac{-48a}{\sqrt{119}} = 12 - \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{119} \cdot 12 \cdot 4}{5 \cdot (-48)} \\ b = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Вторая касательная, аналогично:

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{119}}{5} \\ b = \frac{3}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{-\sqrt{119}}{5} \\ b = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Итак, нам подходят только такие a и b , чтобы найденная прямая была касательной к двум кругам. Касательных всего 4 штуки, и мы рассмотрели все случаи.

Ответ: ~~12~~ $a = \pm \sqrt{15}; \frac{\pm \sqrt{119}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}; bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}; abc: 2^{55} \cdot 7^{68}$

~~$a = 2^{11} \cdot 7^{11}; b = 2^5 \cdot 7^{28}; c = 2^{12} \cdot 7^{28}$~~

$$\begin{array}{r} 1960 \\ + 1521 \\ \hline 3481 \end{array}$$

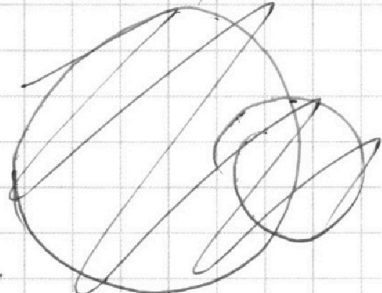
$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases} \Leftrightarrow 2(x+y+z) \geq 55 \Rightarrow x+y+z \geq 28$

аналогично: $k+l+m \geq \frac{11+18+39}{2} = 34$ (39)

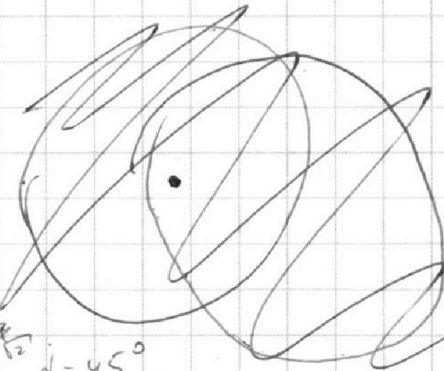
Пример $\begin{cases} k+l=15 \\ l+m=17 \\ k+m=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l=15 \\ k-l=6 \\ k+m=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l=4,5 \\ k=10,5 \\ m=12,5 \end{cases}$

$a = 2^{11} \cdot 7^{11}; b = 2^5 \cdot 7^{28}; c = 2^{12} \cdot 7^{28}$

$$\begin{array}{r} 454 \\ \times 454 \\ \hline + 1816 \\ + 2270 \\ \hline 205116 \end{array}$$

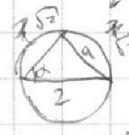
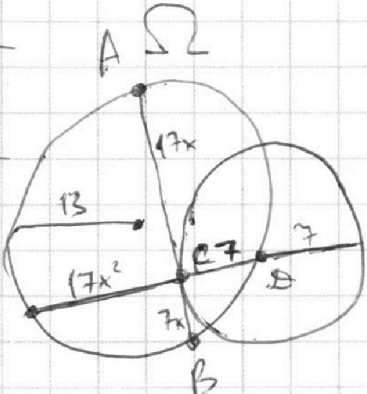


$$\begin{array}{r} 450 \\ \times 450 \\ \hline + 225 \\ + 180 \\ \hline 202500 \end{array}$$



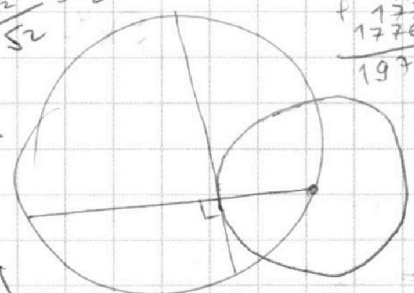
$$\begin{array}{r} 460 \\ \times 460 \\ \hline + 276 \\ + 184 \\ \hline 211600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 456 \\ \hline + 2280 \\ + 1824 \\ \hline 207936 \end{array}$$



$d = 45^\circ$
 $\sin d = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{array}{r} 444 \\ \times 444 \\ \hline + 1776 \\ + 1776 \\ \hline 197136 \end{array}$$



$\times 458$

$$\begin{array}{r} 458 \\ \times 458 \\ \hline + 3664 \\ + 2290 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$289x^2 - (\sqrt{289x^2 + 49} - 7)(\sqrt{289x^2 + 49} + 7)$

~~$289x^2 - 289x^2$~~

$\Delta ABD = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49} \cdot 24x} = 26$

b квадрат: $\Delta = 26^2 \cdot 24^2 (289x^2 + 49x^2) - 49$
 $D = 26^4 \cdot 24^4 \cdot 49^2 - 4 \cdot 49 \cdot 26^2 \cdot 24^2 \cdot 17^2 = 26^2 \cdot 24^2 \cdot 49 \cdot (26^2 \cdot 24^2 \cdot 49 - 4 \cdot 17^2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

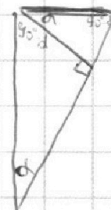
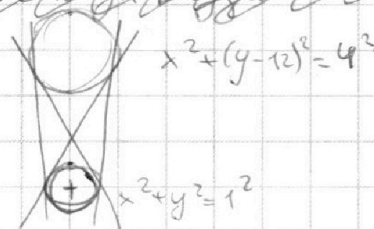
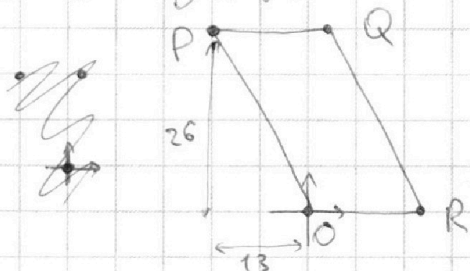
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

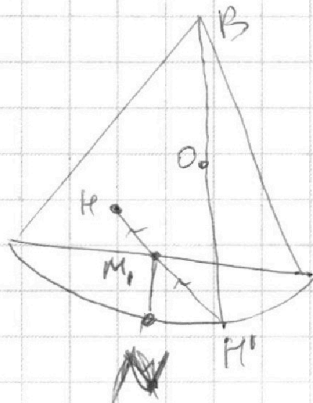
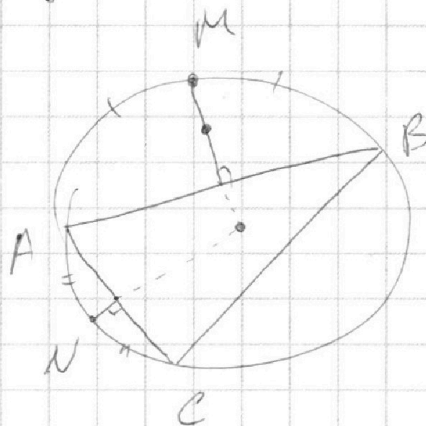
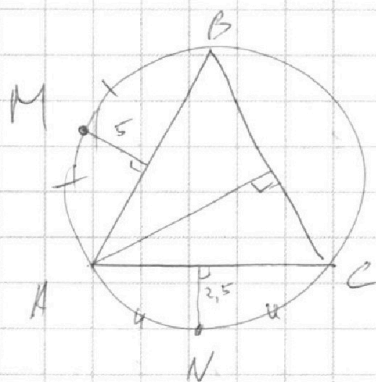
$$y_2 - y_1 = 14 + 2(x_1 - x_2) = \cancel{28(x_1 - x_2)} = \cancel{28(x_2 - x_1)}$$

$$= -2(x_2 - x_1) + 14$$

*Всегда будем считать, что $x_1 > x_2$ (тогда y_1 будет меньше
всегда правую y_2 будет больше).*



$$y = -ax + 8b$$



$$a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$$

$$ka + kb = 9ab \Rightarrow k : 9a ; k : 9b ; \text{ тогда } k \geq 9ab$$

$$9ab(a+b) \leq 9ab^2 ; a+b \leq 9$$