МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1

Замечу, что для того, чтобы abc было минимальным, abc ~~до~~ не должно делиться ни на какие простые числа, отличные от 2 и 7, иначе, т.к в условие дано только условие на ~~кратность~~ делимость на число вида $2^k \cdot 7^l$, то ~~раздели~~ разделив abc на данное простое, изначальное условие ни как не нарушится, т.е, если, без ограничения общности, $a \vdots p$, где p - простое, $p \neq 2$, $p \neq 7$, то если $ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{11}$, то $\frac{a}{p} \cdot b \vdots 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow$ следует искать ~~от~~ минимальное abc вида $2^n \cdot 7^m$. Т.Е каждое из a, b, c имеет вид $2^i \cdot 7^j$

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$; $b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$; $c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$, тогда,

$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$.

Замечу, чтобы $ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{11}$, нужно, чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$ и $\beta_1 + \beta_2 \geq 11$

Аналогично расписываю для остальных двух условий

$bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$ и $\beta_2 + \beta_3 \geq 18$

$ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 39$

$\rightarrow$ Получаю две системы нер-в:

$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases}$ и $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$

Складывая нер-ва в 1ой системе, получаю, что $2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 55 \Rightarrow$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27{,}5$. но, т.к $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - нат. числа (степени входу простого числа), то
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

Продолжение на след листе.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение Задачи №1.

Аналогично делаю со второй системой нер-в и после сложение получаю, что $2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\geq 68 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3\geq 34$.

Т.к. ищется мин abc, где $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$, то

нужно найти мин $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ и $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \Rightarrow$ т.к.

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\geq 28$ и $\beta_1+\beta_2+\beta_3\geq 34$, то ~~для мин abc~~, то

~~$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=28$ $\beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$ мин $abc=2^{28}\cdot 7^{34}$~~

~~Ответ. $2^{28}\cdot 7^{34}$~~

~~Но пусть $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=28 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=15$, $\alpha_1+\alpha_3=23$, $\alpha_2+\alpha_3=17$, если α_1 четно $\Rightarrow \alpha_2$ нечет, α_3 - ч, но $\alpha_2+\alpha_3$ нечет, хотя $2+2=2$, если α_1 - нечет, α_2 - чет, ситуац симметр~~

~~$\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\geq 29$~~

~~$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=28$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$ мин $abc=2^{28}\cdot 7^{34}$~~

~~Пример $a=2^{11}$~~ Пусть $\beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$

если β_1, $\beta_1+\beta_2=11$, $\beta_2+\beta_3=12$, $\beta_1+\beta_3=34 \Rightarrow \underbrace{\beta_1+\beta_3}_{34}+2\beta_2=23$

$\Rightarrow \beta_2<0$ Ш $\Rightarrow$ нужно прибавить мин $12 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3\geq 34+12\geq 46 \Rightarrow$ β для мин $\beta_1+\beta_2+\beta_3=46 \Rightarrow$

$abc=2^{28}\cdot 7^{46}$

Пример $a=2^{4}\cdot 7^{16}$; $b=2^{5}\cdot 7^{7}$
$c=2^{12}\cdot 7^{23}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{46}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$.

Я ищу такое m, что числитель и знам были кратны m $\Rightarrow$

$a+b \vdots m$ и $(a+b)^2-9ab \vdots m$. рассмотрю $(a+b)^2-9ab \vdots m$.

Из условия, что $a+b \vdots m \Rightarrow (a+b)^2 \vdots m$ $\Rightarrow$ чтоб разность была кратна m

$9ab \vdots m$. Пусть $m \vdots p$, p-простое, $p \neq 3$, тогда $9 \not\vdots p \Rightarrow$ либо a, либо $b \vdots p$. Без огр общности, пусть $a \vdots p \Rightarrow b \not\vdots p$, т.к иначе, если

$a \vdots p$ и $b \vdots p$, то $\frac{a}{b}$ не будет не сокр (можно будете сократить на p). Но, тогда $a+b$ будет $\not\vdots p$, т.к $a \vdots p$ и $b \not\vdots p$, но $a+b \vdots m$, где $m \vdots p \Rightarrow$

$a+b \vdots p$ → Противоречие, т.к число не может одновременно делиться и не делиться на $p \Rightarrow \nexists p$, что $p \neq 3$ и $m \vdots p \Rightarrow$ Единственное

простое на которое может делиться m - это 3. Также, замечу, что

если степень вхождения 3 в m хотя бы 3, т.е $m \geq 27$, то приходим к аналогичному противоречию, т.к степень вхождение 3 в 9 равна 2 $\Rightarrow ab \vdots 3 \Rightarrow$ либо $a \vdots 3$, либо $b \vdots 3 \Rightarrow$ Если $a \vdots 3$, то $b \not\vdots 3$, иначе

$\frac{a}{b}$ - сократимая дробь (можно сократить на 3), но тогда $a+b \not\vdots 3$, т.к $a \vdots 3$ и $b \not\vdots 3$, но $a+b \vdots m$, где $m \vdots 3 \Rightarrow a+b \vdots 3$ → Противоречие $\Rightarrow$ степень вхождения 3 в m не больше 2. Приведу пример для $m=9$.

$a=1$, $b=8$ (важно, что дробь $\frac{a}{b} = \frac{1}{8}$ - несократима) $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{1+8}{1-56+64} = \frac{9}{9}$,

а эта дробь сократима на 9 $\Rightarrow$ существует такие a, b, что $m=9$.

Максимальное $m=9$, есть пример. Ответ: 9.

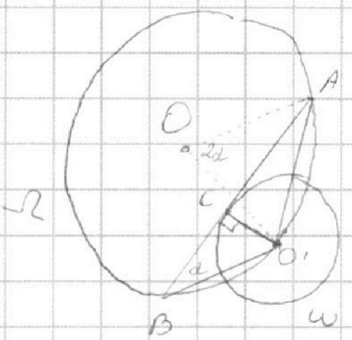
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3



Дано, Ω - окр, ω - окр, O' - центр ω;
O - центр Ω
$O' \in \Omega$, радиус Ω - 13; радиус ω - 7.
AB - хорда Ω; AB кас ω в C, так что
$AC : CB = 17 : 7$;
Найти: длину AB

Решение

Пусть $AC = 17x$, $CB = 7x$ ($AC : CB = 17 : 7$), т.к. AB - кас к ω, то $O'C \perp AB$
$\Rightarrow \Delta O'CB$ - прям, где $O'C = 7$ ($O'C$ - рад ω); $CB = 7x \Rightarrow$ по т. Пиф $O'B = \sqrt{CO'^2 + CB^2} =$
$= \sqrt{49 + 49x^2}$, а $O'B^2 = 49 + 49x^2$. Пусть $\angle CBO' = \alpha$, тогда $\cos\alpha = \frac{CB}{BO'}$.
Замечу, что $\angle AOO' = 2\angle ABO'$, т.к. $\angle AOO'$ - центральный и опир на AO', как
и $\angle ABO'$. тогда $\angle AOO' = 2\alpha$. Замечу, что $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.

$\cos\alpha = \frac{CB}{BO'} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{CB^2}{BO'^2} = \frac{49x^2}{49 + 49x^2} = \frac{x^2}{x^2+1}$, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{x^2}{x^2+1} - 1 =$
$= \frac{2x^2}{x^2+1} - \frac{1+x^2}{1+x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Т.к $\angle ACO' = 90° \Rightarrow \Delta ACO'$ - прям $\Rightarrow$ по т. Пиф

$AO'^2 = AC^2 + CO'^2 = 289x^2 + 49$. Из т. кос для $\Delta AOO' \rightarrow$

$AO'^2 = AO^2 + OO'^2 - 2\cos(\angle AOO') \cdot AO \cdot OO'$, т.к $AO = OO' =$ рад $\Omega = 13$, то подставляя
числ. знач получим:

$289x^2 + 49 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos(2\alpha)$
$289x^2 + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Сделаю замену $t = x^2$ ($t \geq 0$) $\rightarrow$
$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \frac{t-1}{t+1}$ ($t \neq -1$, т.к $t \geq 0$)
$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - \frac{t-1}{t+1}\right)$
$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \frac{t+1-t+1}{t+1} \rightarrow$ ~~28t~~ $289t + 49 = \frac{2 \cdot 13^2 \cdot 2}{t+1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{4 \cdot 13^2}{t+1}$ домножу обе части на $t+1 \rightarrow$
$(289t + 49)(t+1) = 676$
$289t^2 + 338t + 49 = 676$
~~289t²+338t+49~~ З-чу, что это тоже что и $17^2 t^2 + (17^2 + 7^2)t + 7^2 = 26^2$

Продолжение на следующем листе.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение Задачи №3

$289t^2+338t+49=676$, замечу, что $t=1$ подходит

$\cancel{289t^2}$ $289+338+49=676$

$289t^2+338t-627=0$

$t^2+\frac{338}{289}t-\frac{627}{289}=0 \rightarrow$ т.к свободный член отрицательный, а один корней положительный (равен 1), то ~~по~~ из т. Виета следует, что второй корень - отрицат $\Rightarrow$ он нам не подходит, т.к $t\geq 0 \Rightarrow$ единств корень этого ~~ив~~ уравн $t=1$. вернемся к изн. перем x:

$x^2=t$, $x^2=1$, т.к. $17x$ - длина стороны $AC \Rightarrow x>0 \Rightarrow$ из $x^2=1 \rightarrow x=1$

т.к $AB=AC+CB=17x+7x=24x$, и $x=1 \Rightarrow AB=24$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

З-гу, что $x=\frac{1}{9}$ - корень, т.к правая часть равна 0, то

рассмотрим левую часть, т.к там ~~до~~ тоже должен быть 0, то

$$3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$$

$9x=1 \rightarrow x=\frac{1}{9}$, т.е. левая часть тоже равна 0.

Один из корней $=\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5

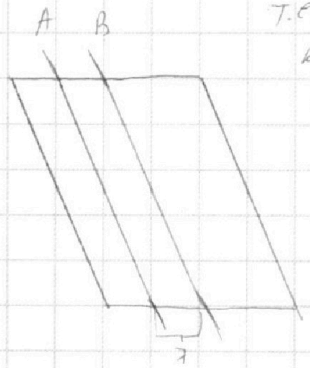
~~З-ч~~ Зафиксирую точку с коорд $x_1; y_1$. Замечу, что она задает прямую, такую что все точки к коор x_2, y_2 удовл условию принадлежат ей, и все точки принадл ей удовл условию (условие на x_2 и y_2 ~~он~~-линейно). Что это за прямая?

т.к. $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \rightarrow$

$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$

$y_2 = -2x_2 + 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$

$y_2 = -2(x_2 - 7 - x_1) + y_1 \rightarrow$ прямая. Также з-ту, что боковые стороны парал с вершинами $(-13; 26); (0,0)$ и $(3; 26); (16; 0)$ лежат на прямых $y = -2x$ и $y = -2x + 32$ соотв $\Rightarrow$ все такие прямые, которые задаются x_1, y_1 парал сторонам параллелограмма, также замечу, что также работает и в другую сторону



т.е. есть две прямые A и B, ~~что~~ которые парал сторонам, тогда каждую из т. $\in A$ могу взять как точку $(x_1; y_1)$ и для нее $\nexists$ к условию будут подходить все т. $\in B$, притом, между ними ровно 7 кл., т.к.

x_1, y_1 —— $x_1 + 7, y_1$ ($= x_2$)

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2x_1 + 14 - 2x_1 + y_1 - y_1 = 14$
$\rightarrow$ такие точка подходит.

Продолжение ~~в~~ на след листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$ abc $\to abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$

$bc \vdots 2^{17} 7^{18}$ $\alpha_1\beta_1\ \alpha_2\beta_2\ \alpha_3\beta_3$

$ac \vdots 2^{23} 7^{39}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - ст. в$\times$ 2
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - ст. в$\times$ 7

$\alpha_1+\alpha_2 \geq 15$ $\alpha_1+\alpha_2 \geq 15$

$\beta_1+\beta_2 \geq 11$ $\alpha_2+\alpha_3 \geq 17$ $\to \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq \frac{15+17+23}{2} = \frac{55}{2} \Rightarrow$

$\alpha_2+\alpha_3 \geq 17$ $\alpha_1+\alpha_3 \geq 23$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 28$

$\beta_2 +$ $\min \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 28$

$\cancel{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$ $\beta_1+\beta_2 \geq 11$

$\beta_2+\beta_3 \geq 18$ $\to \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq \frac{11+18+39}{2} = \frac{68}{2} = 34$

$\beta_1+\beta_3 \geq 39$ $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

$\frac{a}{b}$; $(a,b)=1$. $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ max $m \to$ $a+b \vdots m$; $a^2-7ab+b^2 \vdots m$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-5ab}$ (3) $a \equiv_3 1$ $b \equiv_3 2$ $\cancel{5}$

$(a-b)^2 \equiv 1$

$(a+b)^2 - 9ab =$

$\frac{1}{2}$

$= (a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab}) =$

$\cancel{\frac{1+2}{1+10}}$

$= ((\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 - \sqrt{ab})((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + \sqrt{ab})$

$m \vdots p \Rightarrow 9 \vdots p \Rightarrow$ $\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$ $a+b \vdots m \Rightarrow \underset{\vdots m}{(a+b)^2} - 9ab \vdots m \Rightarrow 9ab \vdots m$

$a \vdots p \to b \vdots p \Rightarrow$ $m \leq a+b$ $m \leq 9ab$

$a+b \vdots p$, но $a+b \vdots m$

$m=9$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1+8}{9^2-9\cdot 8}/9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

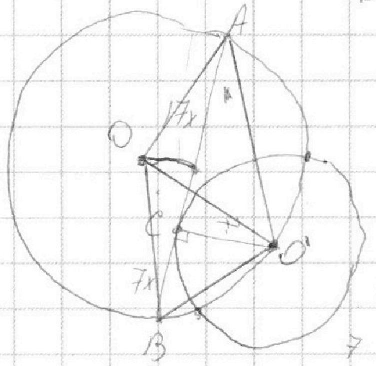
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$17^2 t^2 + (17^2+7^2)t - (26^2-7^2)$

$D = (17^2+7^2)^2 + 4\cdot 17^2 (26^2-7^2)$

$676 - 49 = 627$



$AO \to x$

$OB \to x$

$17 \cdot 17 = 289$

$13 \cdot 13 = 169$

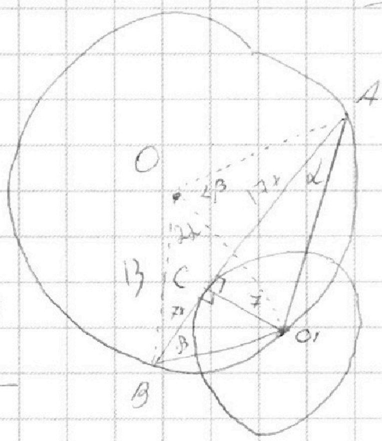
$26 \cdot 13 = 338$

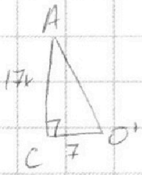
$169 \cdot 2 = 338$

$26 \cdot 26 = 676$

$627 : 19 = 33$

$\cos^2\alpha = \dfrac{289x^2}{289x^2+49}$



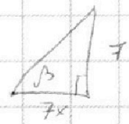


$AO' = \sqrt{17^2x^2+49} = \sqrt{289x^2+49}$

$289 + 338 + 49 = 676$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

$BO'^2 = OB^2 + OO'^2 - 2\cos(2\alpha)\, OB\cdot OO' = 2\cdot 13^2 - 2\cdot 13^2\cdot(2\cos^2\alpha - 1)$



$AO'^2 = 289x^2+49 \qquad \cos^2\alpha = \left(\dfrac{17x}{\sqrt{289x^2+49}}\right)^2 = \dfrac{289x^2}{}$

$BO' = \sqrt{49+49x^2} \qquad \cos^2\beta = \dfrac{49x^2}{49+49x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

$\cos(2\beta) = 2\cos^2\beta - 1 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - \dfrac{1+x^2}{1+x^2} = \dfrac{2x^2-1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$289x^2+49 = 13^2+13^2 - 2\cos 2\beta\, 13^2 = 2\cdot 13^2 - 2\cdot 13^2\cdot\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

$2\cdot 338 = 676$

$289t+49 = 2\cdot 13^2 - 2\cdot 13^2\,\dfrac{t-1}{t+1}$

$289t+49 = 338 - 338\,\dfrac{t-1}{t+1}$

$289t+49 = 338\left(1-\dfrac{t-1}{t+1}\right)$

$289t+49 = 338\,\dfrac{t+1-t+1}{t+1}$

$289t+49 = 338\,\dfrac{2}{t+1}$

$(289t+49)(t+1) = 289t^2 + 338t + 49 = 676$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$ $\quad 3x^2-6x+2\geq 0;\ 3x^2+3x+1\geq 0$

$3x^2-6x+2=0$ $\quad \cancel{3x^2-6x-2=0}$ $\quad 3x^2+3x+1=0$

$D_1=9-6=3$ $\quad D=9-3=6$

$x_1=\frac{3+\sqrt3}{3}$ $x_2=\frac{3-\sqrt3}{3}$ $\quad x_1=\frac{-3-\sqrt3}{3}$; $x_2=\frac{-3+\sqrt3}{3}$

$D=36-4\cdot2\cdot3$

$3x^2+3x+1=\left(x+\frac{3+\sqrt3}{3}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt3}{3}\right)$

$\sqrt D=2\cdot\sqrt{9-6}=2\sqrt3$

$3x^2-6x+2=\left(x-\frac{3+\sqrt3}{3}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt3}{3}\right)$

$\cancel{x_1=\frac{6-2\sqrt3}{2\cdot3}=\frac{6-\sqrt3}{}}$

$\left(x+\frac{3+\sqrt3}{3}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt3}{3}\right)=x^2+\frac{3+\sqrt3}{3}+3x\ \cancel{x}$

$\surd$

$3x^2-6x+2=\left(x-\frac{3+\sqrt3}{3}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt3}{3}\right)$ $\quad x_{1,2}:\ D=9-12<0\to$ нет корней

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}$ $\quad (-75x^2+15x+2)(-75x^2+15x+2)=$

$=\cancel{75^2x^4}\ 75^2x^4-75\cdot15x^3-150x^2-150x^3$

$\cancel{3x^2}\ \cancel{3x^2+1}$

$\underline{x^2-2x+1+x^2-2x+1+x^2-2x+1}-1=3(x-1)^2-1.$

$x^2+2x+1+x^2+2x+1+x^2+2x+1-3x-2=3(x+1)^2-3x-2$

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x\ |^2$

$(\underset{a}{\sqrt{3x^2-6x+2}}-\underset{b}{\sqrt{3x^2+3x+1}})^2=\cancel{3x^2-6x+2}$ $\quad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$(3x^2-6x+2+3x^2+3x+1)-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=1+81x^2-18x$

$6x^2-3x+3-2\sqrt{9x^4+\cancel{27}x^3+3x^2-18x^3-18x^2-6x+6x^2+6x+2}=1+81x^2-18x$

$-\cancel{8}75x^2+15x+2=2\sqrt{\cancel{9x^4-9x^3-15x^2+6x^2}}$

$\sqrt{9x^4-9x^3-9x^2+2}$

$(-75x^2+15x+2)^2=4(9x^4-9x^3-9x^2+2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$ $1-9x=0 \Rightarrow 1=9x \Rightarrow x=\frac{1}{9}$

$3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$ $x=\frac{1}{9}$ - корень

$-9x=-1$

$x=\frac{1}{9}$

$3x^2-6x+2 \;|\; x-\frac{1}{9}$, $3x^2-\frac{1}{3}x$, $-\frac{17}{3}x+2$, $-\frac{17}{3}x+\frac{17}{27}$; $3x-\frac{17}{3}$ $3x^2-6x+2$

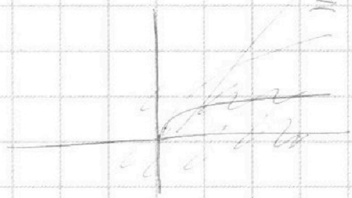
$3x^2$

$\frac{3x^2-6x+2}{\frac{9x-1}{9}}$ → $27x^2-6x+2 \;|\; 9x-1$, $27x^2-3x$, $-3x+2$, $-3x+\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$; $3x-\frac{1}{3}$

$51 \;|\; 9$, 45, 6, $5\frac{2}{3}$, $\frac{17}{3}$

$3x^2-6x+2=(9x-1)(3x-\frac{1}{3})+1\frac{2}{3}$

$\cancel{27x^2}$ $27x^2-54x+18 \;|\; 9x-1$, $27x^2-3x$, $-51x+18$, $51x+\frac{17}{3}$; $3x-\frac{17}{3}$



$3x^2-6x+2=9(x-\frac{1}{9})$

$3x^2+3x+1 \;|\; x-\frac{1}{9}$, $3x^2-\frac{1}{3}x$, $\frac{10}{3}x+1$, $\frac{10}{3}x-\frac{10}{27}$; $3x+\frac{10}{3}$

$\sqrt{a}=1-9x$

$a=$

$3x^2-6x+2=(x-\frac{1}{9})(3x-\frac{17}{3})+\frac{37}{27}$

$3x^2+3x+1=(3x+\frac{10}{3})(x-\frac{1}{9})+\frac{37}{27}$

$\alpha_1+\alpha_2=16$
$\alpha_1+\alpha_3=17$
$\alpha_2+\alpha_3=23$
$\alpha_2=16-\alpha_1$
$\alpha_3=23-\alpha_1$

$\alpha_2+\alpha_3=40-2\alpha_1=39$ $=17$
$2\alpha_1=22$
$\alpha=11$

$a=2^{10}\cdot 7$
$b=7^{11}$
$c=2^{13}$

$\beta_1+\beta_2=17$
$\beta_1+\beta_3=39$
$\beta_2+\beta_3=24$
$\beta_2=17-\beta_1$
$\beta_3=39-\beta_1$
$56-2\beta_1=24$
$2\beta_1=32$
$\beta_1=16 \rightarrow \beta_2=1 \rightarrow \beta_3=23$
$2\beta_2+39=29 \rightarrow \beta_2<0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение Задачи №5.

Тогда, в ~~на~~ не забывая условие, что все точки имеют целочисл коорд и внутри изн паралл, то в качестве прямой на которой буду отмечать точку с коорд $x_1; y_1$ можно выбрать

−13,26 −4,26 0,26 3,26

любую прямую, проходящую через точка с коорд $\{(-13;26), .., (-4,26)\}$ и паралл боковым сторонам паралл
если выберу проходящую через точку $x;26$, где $x > -4$, то ей паралл через 7 клеток будет проходить через $(x+7>3\ ;26)$, что уже не в парал.

Таких точек ровно 10. Замечу, что на каждой такой прямой ровно 14 ~~целочи~~ точек с целочисл координатами

Тогда ~~для~~ каждой из этих 10 прямых ~~на ней есть~~ на которых я выбираю точку x_1, y_1 ставится ровно одна прямая на которой я выбираю точку с коорд x_2, y_2 тогда всего вариантов выбрать пару $= 10 \cdot 14 \cdot 14 = 1960$

кол-во пар прямых

кол-во вариантов для точки (x_1, y_1) на этой прямой

кол-во вариантов для точки (x_2, y_2) на прямой, которая ставится в соответствие

Ответ: 1960.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

14
16
46
196

$\cancel{x}\ -13 \le x \le 16$

$0 \le y \le 26$

$\cancel{0\ 4}$

$x_1\ y_1$
$0\ 1$

$x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$
$16\ 0$

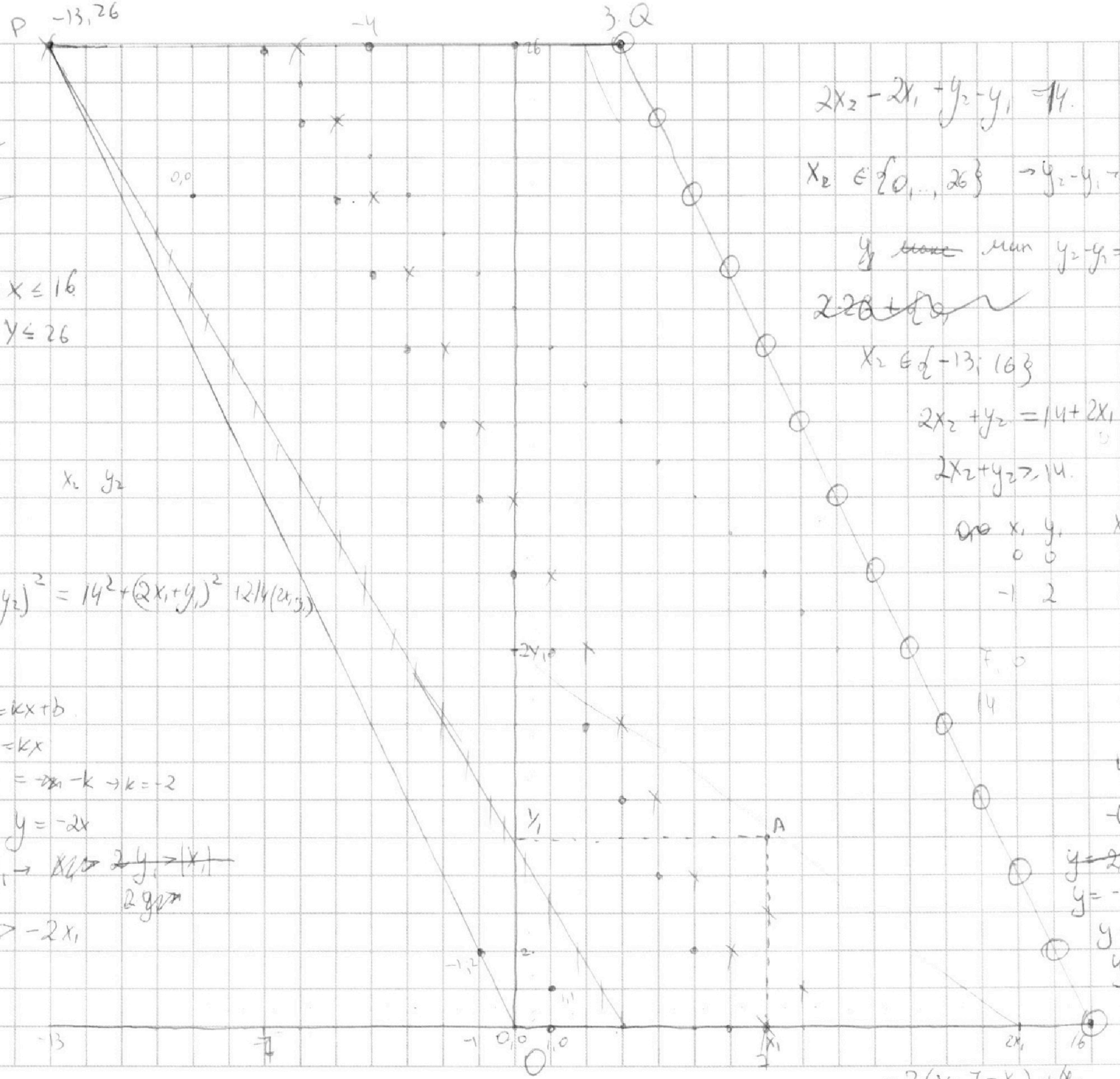
$(2x_2+y_2)^2 = 14^2 + (2x_1+y_1)^2 + 2\cdot 14(2x_1+y_1)$

$PO=$

$y = kx+b$
$y = kx$
$2 = \cancel{x_1} -k \to k=-2$
$y=-2x$

$x_1; y_1 \to \cancel{x_1 \ge 2y_1 \ge |x_1|}$ 2 $\cancel{y}$

$y_1 > -2x_1$



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14.$

$x_2 \in \{0, \dots, 26\} \to y_2 - y_1 \to$ zer

y ~~max~~ min $y_2 - y_1 = 0$

~~$22 + \{0$~~

$x_2 \in \{-13; 16\}$

$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$

$2x_2 + y_2 \ge 14.$

x_1	y_1	x_2	y_2
0	0	7	0
−1	2	0	14
		2	
		6	2
		5	4
		4	6
		−6	26

13

~~$y = 2x+16$~~

$y = -2(x-16) \Rightarrow$

$y = -2x + 32.$

$y_1 < -2x_1 + 32$

$-2(x-7-x_1) + y_1$

$y_2 = -2x_2 + 14 + 2x_1 + y_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(-75x^2+15x+2)^2 = 4(9x^4-9x^3-9x^2+2)$

$(-75x^2+15x+2)(-75x^2+15x+2) = 5^2 15^2 x^4 - 5\cdot 15^2 x^3 - \cancel{15\,9x^2} - 5\cdot 15^2 x^3 +$
$2\cdot 5\cdot 15 x^2$

$+15^2 x^2 + 15\cdot 2x - 2\cdot 15\cdot 5x^2 + 2\cdot 15 x + 4.$

$= 5^2\cdot 15^2 x^4 - 2\cdot 5\cdot 15^2 x^3 - 4\cdot 5\cdot 15x^2 + 15^2x^2 + 4\cdot 15x + 4 = 4\cdot 9x^4 - 4\cdot 9x^3 - 4\cdot 9x^2 + 8$

$(5^2\cdot 15^2 - 4\cdot 9)x^4$

$(1-9x)^2 = 1 + 81x^2 - 18x$

$x - \frac{1}{9}$

$x^3\cdot(5^2+15^2-4\cdot 9)$

$\sqrt{3x^2}+\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1}$

$x^2-2x+1 = t$ $\qquad 3t = 3x^2-6x+3 = 3x^2+3x+1+2 \cancel{*} -9x$

$\cancel{\sqrt{3(t+1)}\ 3t-1}$ $\qquad 3x^2+3x+1 = 3t + 9x - 2$

$\sqrt{3t-1} - \sqrt{}$

$1-9x = (1-3\sqrt{x})(1+3\sqrt{x})$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$\cancel{\sqrt{3x^2-6x+2+9x-1} = \sqrt{3x^2+3x+1} + k}$

$\sqrt{3x(x-2)+2} - \sqrt{3x(x+1)+1}$

$\sqrt{3x\left((x-2)+\frac{2}{3x}\right)} - \sqrt{3x\left((x+1)+\frac{1}{3x}\right)} = 1-9x$

$\cancel{9x^2\sqrt{?} - 9x^2\sqrt{?} = 1-9x}$