



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Замечу, что где-то в задаче abc было написано минимальное,
 abc оно не должно делиться на какие-либо простые числа,
отличные от 2 и 7, т.к. в условии дано только
условие на то что делится на число $2^k \cdot 7^l$, то
разделим abc на данное простое, написанное
число так как не делится, т.е., если α ограничено снизу,
 a/p где p простое, $p \neq 2, p \neq 7$, то если $ab: 2^{15} \cdot 7^m$, то
 $\frac{a}{p} \cdot b: 2^{15} \cdot 7^m \Rightarrow$ следовательно минимальное abc будет

$2^n \cdot 7^m$. Т.е. каждое из a, b, c имеет вид $2^i \cdot 7^j$

Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 7^{\beta_1}$; $b = 2^{d_2} \cdot 7^{\beta_2}$; $c = 2^{d_3} \cdot 7^{\beta_3}$, тогда,
 $abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$.

Замечу, чтобы $ab: 2^{15} \cdot 7^m$ нужно, чтобы $d_1+d_2 \geq 15$ и $\beta_1+\beta_2 \geq m$

Аналогично рассуждаем где ограничено выше условие

$bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow d_2+d_3 \geq 17$ и $\beta_2+\beta_3 \geq 18$ Рассуждаем же снизу вверх:

$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow d_1+d_3 \geq 23$ и $\beta_1+\beta_3 \geq 39$

$$\begin{cases} d_1+d_2 \geq 15 \\ d_2+d_3 \geq 17 \\ d_1+d_3 \geq 23 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geq m \\ \beta_2+\beta_3 \geq 18 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

Складываем первое и третье неравенства получаем, что $2(d_1+d_2+d_3) \geq 55 \Rightarrow$

$d_1+d_2+d_3 \geq 27,5$. Но, т.к. d_1, d_2, d_3 - натуральные числа (степени простого числа), то

$$d_1+d_2+d_3 \geq 28$$

Продолжим на следующем.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение Задачи №1.

Аналогично делало со второй системой перв-6 и после
сложение получало, что $2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$.

Т.к. известно мин abc, т.е. $abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$, то

нужно найти мин $d_1+d_2+d_3$ и $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \Rightarrow$ т.к.

$d_1+d_2+d_3 \geq 28$ и $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34$, то есть мин abc, то

$d_1+d_2+d_3=28$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3=34$ для мин abc $= 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$

но ведь $d_1+d_2+d_3=28 \Rightarrow d_1+d_2=15$

$$\begin{aligned} d_1+d_2 &= 15 \\ d_1+d_3 &= 23 \\ d_2+d_3 &= 17 \end{aligned}$$

если d_1 четно $\Rightarrow d_2$ четн.,
 d_3 - нечетн.
если d_1 нечетн., d_2 четн.
 d_3 - нечетн.
если d_1 нечетн., d_2 нечетн., d_3 - четн.

$\Rightarrow d_1=d_2=13$

$d_1+d_2+d_3=28$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3=34$ для мин abc $= 2^{28} \cdot 7^{34}$

Пример "a=2" Расср $\beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$

если $\beta_1+\beta_2=11$

$$\beta_2+\beta_3=18$$

$$\beta_1+\beta_3=34$$

$$\rightarrow \beta_1+\beta_3+2\beta_2=29 \Rightarrow$$

30) $\rightarrow \beta_2 < 0$ и \rightarrow нужно прибавить 10

$$12 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34+12=46 \Rightarrow$$

а где мин $\beta_1+\beta_2+\beta_3=46 \Rightarrow$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{46}$$

Пример $a=2^1 \cdot 7^{16}$, $b=2^5 \cdot 7^7$

$$c=2^{12} \cdot 7^{23}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{46}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$\frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} - \frac{a+b}{(a+b)^2-ab}$$

Я ищу такое m , что числитель из условия будет кратным $m \Rightarrow$

$$ab:m \text{ и } (a+b)^2-ab:m \text{ . рассмотрю } (a+b)^2-ab:m$$

из условия, что $ab:m \Rightarrow (a+b)^2:m \Rightarrow$ если разделим $(a+b)^2$ на m

$ab:m$. Расслабим $m:p$, p -простое, $p \neq 3$, тогда $a:p \Rightarrow$ либо a , либо

$b:p$. Без ограничения, пусть $a:p \Rightarrow b:p$, т.к. иначе, если

$a:p$ и $b:p$, то $\frac{a}{ab}$ не будет не скр. (можно сократить на p). Но, тогда ab будет $:p$, т.к. $a:p$ и $b:p$, то $ab:p$, где $m:p$

$a+b:p \rightarrow$ Противоречие, т.к. число не может одновременно делиться на

не скр. на $p \Rightarrow p \neq p$, что $p \neq 3$ и $m:p \Rightarrow$ Единственное

Простое на которое может делиться m - это 3. Так же, замечу, что

если степень вхождения 3 в m тоже был 3, т.е. $m=27$, то приходит

к аналогичному противоречию, т.к. степень вхождение 3 в $3^2=9$ равна 2 $\Rightarrow ab:3 \Rightarrow$ либо $a:3$, либо $b:3 \Rightarrow$ Если $a:3$, то $b:3$, иначе

$\frac{a}{b}$ - скр. дробь (скр. скр. скр. на 3), то тогда $ab:3$, т.к. $a:b$

$a:3$ и $b:3$, но $ab:m$, где $m:3 \Rightarrow ab:3 \rightarrow$ Противоречие \Rightarrow степень вхождение 3 в m не больше 2. Приведу пример где $m=9$.

$a=1, b=8$ (также, что дробь $\frac{a}{b}=\frac{1}{8}$ - не скр.) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{1+8}{1-8+64} = \frac{9}{64}$

а эта дробь скр. на 3 \Rightarrow существует такие a, b , что $m=9$.
Максимальное $m=9$, есть пример $a=6, b=1$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

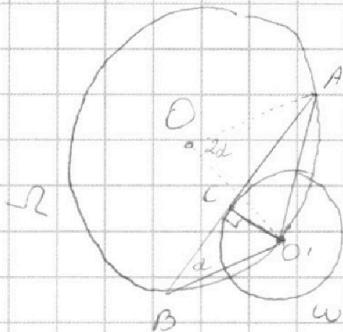
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Zagaza M3

Дано, R -окр w -окр, O' -центр w ,
 O -центр R



O'FEE pagaye R-3; pagaye w-7.

AB - kopygo R, AB kac w C C, tak 2m
AC · CB = 17 · 7, $\frac{1}{2}$

Klaūra: gruzy AB

Pemexane

$$\text{Pythagorean theorem: } AC = 17x, CB = 7x \quad (\text{AC}^2 + CB^2 = 17^2 + 7^2), \text{ i.e. } AB - \text{hypotenuse} \quad \text{and} \quad O'C \perp AB$$

$$\Rightarrow \triangle O'CB - \text{right-angled}, \text{ i.e. } O'C = 7(O'C - \text{proj. } w); \quad CB = 7x \Rightarrow \text{proj. } O'C = \sqrt{O'C^2 + CB^2}$$

$$= \sqrt{49 + 49x^2}, \quad \text{and} \quad O'C^2 = 49 + 49x^2. \quad \text{Pythagorean theorem: } \angle CBO' = \alpha, \text{ i.e. } \cos \alpha = \frac{CB}{BO'}.$$

Заметим, что $\angle AOO' = 2\angle ABO$ и к. $\angle AOO'$ - углоправильник в окружности на дуге AO' , как

$\angle ABO' = \angle AOD' = 2\alpha$ ғаһызы, што $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$. 4.

$$\cos \alpha = \frac{CB}{BA} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{CB^2}{BA^2} = \frac{45x^2}{40+45x^2} = \frac{x^2}{x^2+1}, \cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{x^2}{x^2+1} - 1 =$$

$$\frac{2x^2}{x^2+1} - 1 + x^2 = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2+1} = \frac{x^2 - 1}{x^2+1}$$

T.k $\angle ACO = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACO$ - nhéptuynh ngay

$$AO'^2 = AC^2 + CO'^2 = 289x^2 + 49. \quad 43 \rightarrow \text{boc gne } \triangle AOO' \rightarrow$$

$$AO'^2 = AO^2 + OO'^2 - 2 \cos(\angle AOO') \cdot AO \cdot OO' \quad \text{, T.k. } AO = OO = \text{rag } S_2 = B_1 \text{, TO } \text{Hogarufas}$$

Зад. Знай наймен.

$$289x^2 + 49 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos(2\alpha)$$

$$289x^2 + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{czyli dla } t = x^2 \quad (t \geq 0) \rightarrow$$

$$28.5t + 40 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \frac{t}{t+1} \quad (t \neq -1, t > 0)$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - \frac{t-1}{t+1}\right)$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \frac{t+1 - 7+1}{t+1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{2 \cdot 13^2 \cdot 2}{t+1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{4 \cdot 13^2}{t+1} \quad \text{q.e.d.}$$

$$(289t + 49)(t + 1) = 676$$

$$289t^2 + 338t + 49 = 676$$

$$288778888100 \quad 3-24, 270 \quad 370 \quad \text{taxe} \quad 270 \quad u \quad 17^2 6^2 + (17^2 + 7^2)t + 7^2 = 26^2$$

Прогонение па Снегурочку на снегу.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение Задачи №3

$$17^2 + 87^2 + 87^2 + 7^2 = 676$$

$$289t^2 + 338t + 49 = 676, \text{ задача } t=1 \text{ подходит}$$

$$289 + 289 + 338 + 49 = 676$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$t^2 + \frac{338}{289}t - \frac{627}{289} = 0 \rightarrow \text{т.к. свободный член отрицательный, то}$$

один корень положительного (правда?) и один ~~отрицательный~~ ^{нек}. Вытачиваю, что второй корень отрицателен не подходит, т.к. $t \geq 0 \Rightarrow$ единственный корень $t=1$ уравнения $t=1$. Вернемся к нач. перемен x :

$$t^2 = t, t^2 = 1, \text{ т.к. } 17x - \text{длина стороны } AC \Rightarrow t > 0 \Rightarrow \text{или } x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{т.к. } AB = AC + CB = 17x + 7x = 24x, \text{ и } x = 1 \Rightarrow AB = 24$$

Ответ 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 174

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

З-зг, то $x = \frac{1}{9}$ - корень, т.к. при этом значение 0, то

рассмотрим левую часть, т.к. там же должно быть 0, то

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$, т.е. левая часть тоже равна 0.

Одни из корней = $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5

Задача Задано Задано точку с коорд x_1, y_1 . Задана

что эта задача предложена, такую что все точки в коор x_2, y_2

удовлетворяющие ограничениям, и все эти точки принадлежат ей удобно

удовлетворяющие условиям на $x_2 + y_2$ (или иначе). что это за условия?

$$t.k. \quad 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \rightarrow$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$$

$$y_2 = -2(x_2 - 7 - x_1) + y_1 \rightarrow$$

$$y_2 = -2(x_2 - 7 - x_1) + y_1 \rightarrow \text{прямая. Такое } y=2x, \text{ что}$$

обе стороны параллельны вершинами $(-13, 26), (0, 0)$ и $(3, 26); (16, 0)$

Легко тоа прямые $y = -2x$ и $y = -2x + 32$ соотв \Rightarrow все такие
прямые, которые задаются x_1, y_1 параллельны сторонам параллелограмма, такие
записи, что такое работает и в глубину стороны

A B

t.e. есть две прямые A и B, что

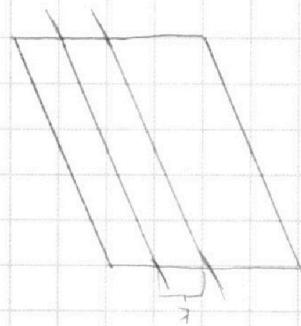
которые параллельны, тогда

когда то A могу быть как тонк

или же не толстый

или же подходит все t.e. B, причем,

лишь если равно толстая, толстая



x_1, y_1 x_2, y_2

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2x_1 + 14 - 2x_1 + y_1 - y_1 = 14$$

\rightarrow Такие толстые
подходят.

Продолжение \Rightarrow то след
история

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$\begin{matrix} abc \\ \beta_1 \beta_2 \beta_3 \\ d_1 d_2 d_3 \end{matrix}$$

$$d_1, d_2, d_3 - \text{cr. } 6x2$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 - \text{cr. } 6x7$$

$$d_1 + d_2 \geq 15$$

$$d_1 + d_2 \geq 15$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$d_2 + d_3 \geq 17 \rightarrow d_1 + d_2 + d_3 \geq \frac{15+17+23}{2} = \frac{55}{2} = 27.5$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_1 + d_3 \geq 23$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 28$$

$$\beta_2 +$$

$$\min d_1 + d_2 + d_3 = 28$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 18$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{11+18+39}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 39$$

$$abc = 2^{23} 7^{34}$$

$$\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a=b$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

make $m \rightarrow a+b:m; a^2 - 7ab + b^2 : m$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 5ab}$$

$$\textcircled{3} \quad a=\frac{1}{3}, \quad b=\frac{2}{3}$$

$$(a-b)^2 = 1$$

$$(a+b)^2 - 9ab =$$

$$= (a+b - 3\sqrt{ab})(a+b + 3\sqrt{ab}) = (a+b)(a+2b)^2$$

$$= ((\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - \sqrt{ab})((\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + \sqrt{ab})$$

$$m:p \Rightarrow q:p \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a+b:m \Rightarrow (a+b)^2 - 9ab:m \Rightarrow 9ab:m$$

$$a:p \rightarrow b:p \Rightarrow$$

$$a+b:p \Rightarrow a:b:m$$

$$m=q$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1+2}{9^2 - 9ab} / 3$$

$$m \leq a+b$$

$$m \neq 9ab$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



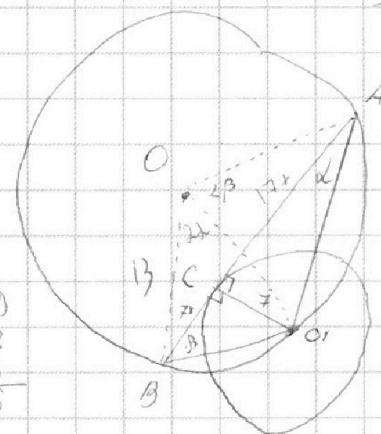
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 177 \end{array}$$

13.



$$\begin{array}{r} 269 \\ + 338 \\ \hline 607 \end{array}$$

$$BO'^2 = OB^2 + OO'^2 - 2 \cos(2\alpha) OB \cdot OO' =$$

$$= OB^2 \cdot 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$AO'^2 = \sqrt{289x^2 + 49} \quad \cos^2 \alpha = \left(\frac{17x}{\sqrt{289x^2 + 49}} \right)^2 = \frac{289x^2}{289x^2 + 49}$$

$$BO' = \sqrt{49 + 49x^2} \quad \cos^2 \beta = \frac{49x^2}{49 + 49x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$OA^2 (289x^2 + 49) = 13^2 + 13^2 - 2 \cos 2\beta \cdot 13^2 = \cos(2\beta) = 2 \cos^2 \beta - 1 =$$

$$= 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) = \frac{2x^2 - 1}{1+x^2} = \frac{2x^2 - 1}{1+x^2}$$

$$289x^2 + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 + 49 = 338 - 338 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 + 49 = 338 \left(1 - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$17^2 \cdot 6^2 + (12^2 + 7^2) + 4 \cdot (26^2 - 7^2)$$

$$D = (17^2 + 7^2)^2 + 4 \cdot 17^2 (26^2 - 7^2)$$

$$AO \rightarrow x$$

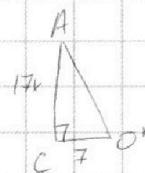
$$OB \rightarrow x$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 49 \\ 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 13 \\ \hline 78 \\ 26 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{289x^2}{289x^2 + 49}$$



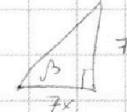
$$AO = \sqrt{17^2 + 7^2} =$$

$$= \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1.$$



$$OA^2 (289x^2 + 49) = 13^2 + 13^2 - 2 \cos 2\beta \cdot 13^2 =$$

$$= \frac{2x^2 - 1}{1+x^2} = \frac{2x^2 - 1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$2338 - 676$$

$$289x^2 + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 + 49 = 338 - 338 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 + 49 = 338 \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$(289x^2 + 49)(x^2 + 1) = 289x^2 + 338x^2 + 49 = 676$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0, \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$D = 9 - 3 = 6$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\sqrt{D} = 2 \cdot \sqrt{9 - 6} = 2\sqrt{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2/3} = 3 - \sqrt{3}$$

$$\left(x + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{-3 + \sqrt{3}}{3}\right) = x^2 + \frac{3 + \sqrt{3}}{3} + 2x + 1$$

✓

$$3x^2 - 6x + 2 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$x_1, x_2 \in D = 0 + 12 < 0 \rightarrow \text{нет корней}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} =$$

$$(-75x^2 + 15x + 2)(-75x^2 + 15x + 2) =$$

$$= 75^2 x^4 - 75 \cdot 15 x^3 - 150 x^2 - 150 x^3$$

$$3x^2 \quad 3x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 - 1 = 3(x+1)^2 - 1.$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 - 3x - 2 = 3(x+1)^2 - 3x - 2$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad |^2$$

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2 = 3x^2 - 6x + 2 \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

a
b

$$(3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1) + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 + 81x^2 - 18x$$

$$6x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{9x^4 + 18x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2} = 1 + 81x^2 - 18x$$

$$- 575x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 15x^2 - 16x^2}$$

$$(9x^4 - 9x^3 - 15x^2 - 16x^2)$$

$$(-75x^2 + 15x + 2)^2 = 4(9x^4 - 9x^3 - 15x^2 - 16x^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = 0 \Rightarrow 1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9} - \text{корень}$$

$$-6x = -2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$-3x^2 - 6x + 2 \mid x - \frac{1}{3}$$

$$3x^2$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + \frac{1}{3}x \\ \hline -\frac{17}{3}x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ 45 \\ \hline 6 \end{array} \begin{array}{r} 9 \\ 52 \\ \hline 3 \end{array} \begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (3x - 1)(3x - \frac{1}{3}) + \frac{2}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2$$

$$\begin{array}{r} 9x - 1 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$27x^2 - 6x + 2 \mid 9x - 1$$

$$\begin{array}{r} 27x^2 - 3x \\ \hline -3x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x + \frac{1}{3} \\ \hline 1 \frac{2}{3} \end{array}$$

$$27x^2 - 6x + 2 = 27x^2 - 54x + 18 \mid 9x - 1$$

$$-27x^2 - 3x \mid 9x - 1$$

$$\begin{array}{r} -54x + 18 \\ \hline 54x + 17 \end{array}$$

$$\sqrt{a} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 4(x - \frac{1}{9})$$

$$\alpha =$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (x - \frac{1}{3})(3x - \frac{17}{3}) + \frac{37}{27}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = (3x + \frac{10}{3})(x + \frac{1}{9}) + \frac{37}{27}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \mid x - \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + \frac{10}{3}x + 1 \\ \hline \frac{10}{3}x - \frac{10}{27} \end{array}$$

$$2\beta_1 = 16 \Rightarrow \beta_2 = 1 \Rightarrow \beta_3 = 23$$

$$\begin{array}{l} \beta_2 = 17 - \beta_1 \\ \beta_3 = 39 - \beta_1 \\ \beta_1 + \beta_3 = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta_2 = 17 - \beta_1 \\ \beta_3 = 39 - \beta_1 \\ \beta_1 + \beta_3 = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d_1 + d_2 = 15 \\ d_2 + d_3 = 23 \\ d_1 + d_3 = 17 \\ d_2 = 3 \\ d_3 = 16 - d_1 \\ d_1 = 23 - d_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta_2 + \beta_3 = 17 \\ \beta_1 + 2\beta_2 = 40 - 2\beta_1 = 17 \\ \beta_1 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta_1 = 7 \\ \beta_2 = 17 - 7 = 10 \\ \beta_3 = 39 - 7 = 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 = 17 \\ \beta_2 + \beta_3 = 14 \\ \beta_1 + \beta_3 = 39 \\ \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = 15 \\ \beta_3 = 37 \end{array}$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Погонажные задачи №5.

Тогда, если все эти задачи выполнены, то все точки изменились

Через коэффициенты перед x в выражении параллельно, то в каждой прямой
на которой было отмечено две точки с коэффициентами x_1, y_1 можно выбрать

$$-13,26 \quad -4,26 \quad 0,26 \quad 3,26$$

Найдено прямую, проходящую

через точку с коэффициентами $(-13,26), (-4,26)$ и параллельно боковым сторонам параллелепипеда

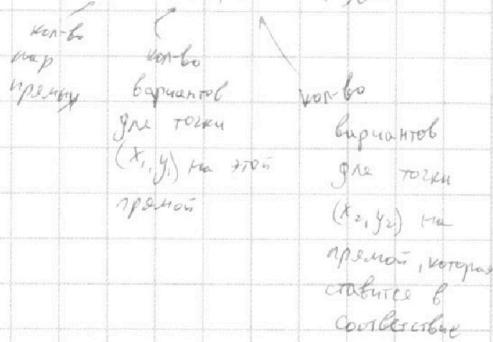
если прямая проходит через точку x_1, y_1 , где

$x > -4$, то для параллели через x_1, y_1 прямая проходит через $(x+7, y+26)$,
тогда у нас все 6 параллелей

таких точек ровно 10. Значит, что все пять

таких прямых ровно 14. Учитывая что с помощью координатации

тогда для каждого из этих 10 прямых на них есть
точка, которая и является точкой x_1, y_1 , ставится ровно одна
прямая на которой и является точка с коэффициентами x_1, y_1 т.е. та сама
параллельная прямая $-10 \cdot 14 / 14 = 1960$



Ответ: 1960.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

P -13, 26

-4

3, Q

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14.$$

$$x_2 \in \{0, \dots, 26\} \rightarrow y_2 - y_1 = 2x_2$$

$$y_{\text{мин}} \leq y_2 - y_1 = 0$$

$$2x_2 + y_2 \geq 14$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$\text{от } x_1, y_1$$

$$x_2, y_2$$

$$(2x_2 + y_2)^2 = 14^2 + (2x_1 + y_1)^2 + 2(14)(x_1 y_1)$$

$$DC =$$

$$y = kx$$

$$2 = -2k - k \Rightarrow k = -2$$

$$y = -2x$$

$$x_1, y_1 \rightarrow x_2 = 2y_1 \geq 14$$

2gpt

$$y_1 > -2x_1$$

$$y = -2x + 32$$

$$y_1 < -2x + 32$$



1

1

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(-75x^2 + 15x + 2)^2 = 4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2)$$

$$(-75x^2 + 15x + 2)(-75x^2 + 15x + 2) = 5^2 \cdot 15^2 x^4 - 5 \cdot 15^2 x^3 - 15 \cdot 15^2 x^2 - 5 \cdot 15^2 x^3 +$$

$$+ 15^2 x^2 + 15 \cdot 2x - 2 \cdot 15 \cdot 5x^2 + 2 \cdot 15x + 4.$$

$$= 5^2 \cdot 15^2 x^4 - 2 \cdot 5 \cdot 15^2 x^3 - 4 \cdot 5 \cdot 15x^2 + 15^2 x^2 + 4 \cdot 15x + 4 = 9 \cdot 9x^4 - 4 \cdot 9x^3 - 49x^2 + 8$$

$$(1-9x)^2 = 1 + 81x^2 - 18x$$

$$(5^2 \cdot 15^2 - 4 \cdot 9)x^4$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x^2 \cdot (5^2 \cdot 15^2 - 4 \cdot 9)$$

$$\sqrt{3x^2} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x^2 - 2x + 1 = t$$

$$3t = 3x^2 - 6x + 3 = 3x^2 + 3x + 1 + 2 \neq -9x$$

$$\sqrt{3t+1} - \sqrt{3t-1}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3t + 9x - 2$$

$$1-9x = (1-3\sqrt{x})(1+3\sqrt{x})$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1$$

$$\sqrt{3x(x-2)+2} - \sqrt{3x(x+1)+1}$$

$$\sqrt{3x\left(\left(x-2\right) + \frac{2}{3x}\right)} - \sqrt{3x\left(\left(x+1\right) + \frac{1}{3x}\right)} = 1-9x$$

$$9x^{\frac{27}{11}} - 9x^{\frac{7}{11}} = 1-9x$$