



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

Замечу, что для того, чтобы abc было минимальным,
 abc не должно делиться ни на какие простые числа,
отличные от 2 и 7, иначе, т.к. в условии дано только
условие на кратность делимости на числа вида $2^k \cdot 7^l$, то
разделив разделив abc на данное простое, изначальное
условие ни как не нарушится, т.е. если без условия соизмеримости,

$a: p$, где p - простое, $p \neq 2, p \neq 7$, то если $abc: 2^{15} \cdot 7^4$, то

$\frac{a}{p} \cdot b: 2^{15} \cdot 7^4 \Rightarrow$ следует искать минимальное abc вида

$2^n \cdot 7^m$. Т.е. каждое из a, b, c имеет вид $2^i \cdot 7^j$

Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 7^{\beta_1}$; $b = 2^{d_2} \cdot 7^{\beta_2}$; $c = 2^{d_3} \cdot 7^{\beta_3}$, тогда,

$$abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

Замечу, чтобы $abc: 2^{15} \cdot 7^4$, нужно, чтобы $d_1+d_2 \geq 15$ и $\beta_1+\beta_2 \geq 11$

Аналогично рассуждая для остальных двух условий

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow d_2+d_3 \geq 17 \text{ и } \beta_2+\beta_3 \geq 18$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow d_1+d_3 \geq 23 \text{ и } \beta_1+\beta_3 \geq 39$$

$$\rightarrow \begin{cases} d_1+d_2 \geq 15 \\ d_2+d_3 \geq 17 \\ d_1+d_3 \geq 23 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geq 11 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 18 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

Складывая пер-ва в той системе, получаем, что $2(d_1+d_2+d_3) \geq 55 \Rightarrow$

$d_1+d_2+d_3 \geq 27.5$. Но, т.к. d_1, d_2, d_3 - цел. числа (степени простого числа), то
 $d_1+d_2+d_3 \geq 28$

Продолжение на след. листе

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение задачи №1.

Аналогично делаем со второй системой нерав и после сложения получаем, что $2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$

т.к. ищем мин abc, где $abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$, то

нужно найти мин $d_1+d_2+d_3$ и $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \Rightarrow$ т.к.

$d_1+d_2+d_3 \geq 28$ и $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34$, то ~~лучше~~ мин abc, то

~~$d_1+d_2+d_3=28, \beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$ мин abc = $2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~но лучше $d_1+d_2+d_3=28 \Rightarrow$~~

$d_1+d_2=15$	если d_1 четно $\Rightarrow d_2$ нечет $d_3=2$, но d_1+d_2 нечет тогда $2+2=2$ если d_1 нечет d_2 чет $d_3=2$ чет
$d_1+d_2=23$	
$d_2+d_3=17$	

~~$\Rightarrow d_1+d_2+d_3 \geq 29$~~

~~$d_1+d_2+d_3=28, \beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$ мин abc = $2^{28} \cdot 7^{34}$~~

Пример $a=2^{11}$ пусть $\beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$

если β_1 $\beta_1+\beta_2=11$
 $\beta_2+\beta_3=12$
 $\beta_1+\beta_3=34 \rightarrow \beta_1+\beta_3+2\beta_2=29$ ~~не~~
 $30 \rightarrow \beta_2 < 0$ \rightarrow нужно прибавить мин
 $12 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34+12 \geq 46 \rightarrow$
 В итоге мин $\beta_1+\beta_2+\beta_3=46 \Rightarrow$
 $abc = 2^{28} \cdot 7^{46}$

Пример $a = 2^9 \cdot 7^{16}$; $b = 2^5 \cdot 7^9$
 $c = 2^{12} \cdot 7^{23}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{46}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Я ищу такое m , что числитель и знаменатель были кратны $m \Rightarrow$

$$a+b:m \quad \text{и} \quad (a+b)^2-9ab:m, \quad \text{рассмотрю } (a+b)^2-9ab:m$$

из условия, что $a+b:m \Rightarrow (a+b)^2:m \Rightarrow$ этот разность была кратна m

$9ab:m$. Пусть $m:p$, p -простое, $p \neq 3$, тогда $9:p \Rightarrow$ либо a , либо b

$b:p$. Без орг. обидности, пусть $a:p \Rightarrow b:p$, т.к. иначе, если

$a:p$ и $b:p$, то $\frac{a}{b}$ не будет не сокр (можно будет сократить на

p). Но, тогда $a+b$ будет $:p$, т.к. $a:p$ и $b:p$, но $a+b:m$, где $m:p$

$a+b:p \rightarrow$ Противоречие, т.к. число не может одновременно делиться и

не делиться на $p \Rightarrow \nexists p$, что $p \neq 3$ и $m:p \Rightarrow$ Единственное

простое на которое может делиться m - это 3. Также, заметю, что

если степень вхождения 3 в m хотя бы 3, т.е. $m \geq 27$, то приходим

к аналогичному противоречию, т.к. степень вхождения 3 в $9 \neq 2$ равна

$2 \Rightarrow ab:3 \Rightarrow$ либо $a:3$, либо $b:3 \Rightarrow$ Если $a:3$, то $b:3$, иначе

$\frac{a}{b}$ - сократимая дробь (можно сократить на 3), но тогда $a+b:3$, т.к. a

$a:3$ и $b:3$, но $a+b:m$, где $m:3 \Rightarrow a+b:3$ - Противоречие \Rightarrow степень

вхождения 3 в m не больше 2. Приведу пример для $m=9$.

$$a=1, b=8 \quad (\text{важно, что дробь } \frac{a}{b} = \frac{1}{8} \text{ - несократима)} \quad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{1+8}{1-56+64} = \frac{9}{9}$$

а эта дробь сократима на 9 \Rightarrow существует такие a, b , что $m=9$.

Максимальное $m=9$, вот пример. Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

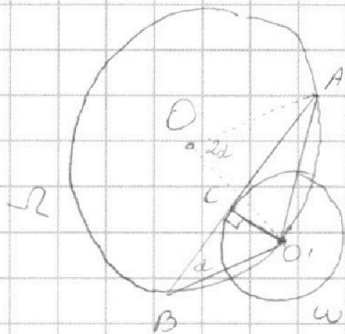
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3



Дано, Ω - окр ω - окр, O' - центр ω ,
 O - центр Ω

$O' \in \Omega$ радиусе $\Omega = R$; радиусе $\omega = r$.

AB - хорда Ω ; AB кас ω в C , так что

$$AC : CB = 17 : 7; \neq$$

Найти: длину AB

Решение

Пусть $AC = 17x$, $CB = 7x$ ($AC : CB = 17 : 7$), т.к. AB - кас к ω , то $O'C \perp AB$
 $\Rightarrow \triangle O'CB$ - прями, где $O'C = r$ ($O'C$ - радиус ω); $CB = 7x \Rightarrow$ по т. Пиф $O'B = \sqrt{r^2 + CB^2}$
 $= \sqrt{49 + 49x^2}$, а $CO^2 = 49 + 49x^2$. Пусть $\angle CBO' = \alpha$, тогда $\cos \alpha = \frac{CB}{BO'}$.

Замечу, что $\angle AOO' = 2\angle ABO'$, т.к. $\angle AOO'$ - центральный и опирается на AO' , как и $\angle ABO'$. Тогда $\angle AOO' = 2\alpha$. Замечу, что $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$.

$$\cos \alpha = \frac{CB}{BO'} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{CB^2}{BO'^2} = \frac{49x^2}{49 + 49x^2} = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 =$$

$$= \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \frac{1x^2}{1x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \text{ т.к. } \angle ACO' = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACO' \text{ - прями} \Rightarrow \text{по т. Пиф}$$

$$AO'^2 = AC^2 + CO'^2 = 289x^2 + 49. \text{ Из т. кос в } \triangle AOO' \rightarrow$$

$$AO'^2 = AO^2 + OO'^2 - 2\cos(\angle AOO') \cdot AO \cdot OO', \text{ т.к. } AO = OO' = \text{радиус } \Omega = R, \text{ то получим}$$

Значит получим:

$$289x^2 + 49 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos(2\alpha)$$

$$289x^2 + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \text{ Сделаю замену } t = x^2 \text{ (} t \geq 0 \text{)} \rightarrow$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{t - 1}{t + 1} \quad (t \neq -1, \text{ т.к. } t \geq 0)$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - \frac{t - 1}{t + 1}\right)$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{t + 1 - t + 1}{t + 1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{2 \cdot 13^2 \cdot 2}{t + 1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{4 \cdot 13^2}{t + 1}$$

90-уголь
все части на $t+1 \rightarrow$

$$(289t + 49)(t + 1) = 676$$

$$289t^2 + 338t + 49 = 676$$

$$289t^2 + 338t + 49 - 676 = 0 \quad 3-2y, \text{ что что так? что и } 17^2 t^2 + (17^2 + 7^2)t + 7^2 = 2 \cdot 13^2$$

Продолжение на следующей странице.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №3

~~$17x^2 + 17x - 17x = 17x$~~

$289t^2 + 338t + 49 = 676$, заметь, что $t=1$ подходит

~~$289t^2 + 338t + 49 = 676$~~

$289t^2 + 338t - 627 = 0$

$t^2 + \frac{338}{289}t - \frac{627}{289} = 0 \rightarrow$ т.к свободный член отрицательный, а

один корень положительный (равен 1), то ~~по~~ ^{из} т.к. второй корень отрицателен, то второй корень отрицателен \Rightarrow он нам не подходит, т.к. $t \geq 0 \Rightarrow$ единственный корень это $t=1$. Вернемся к изм. переменной x :

$x^2 = 6$; $x^2 = 1$, т.к. $17x$ — длина стороны $AC \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ из $x^2 = 1 \rightarrow x = 1$

т.к. $AB = AC + CB = 17x + 7x = 24x$, и $x = 1 \Rightarrow AB = 24$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

З-значит, что $x = \frac{1}{9}$ - корень, т.к. правая часть равна 0, то

рассмотрим левую часть, т.к. там же тоже должно быть 0, что

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}, \text{ т.е. левая часть тоже равна 0.}$$

Один из корней = $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5

Значит зафиксируем точку с коор x_2, y_2 . Заметим, что она задает прямую, такую что все точки с коор x_2, y_2 удовлетворяют условию приписав ей, и все точки приписав ей второе условие (условие на x_2 и y_2 — линейно). Это это за прямая!

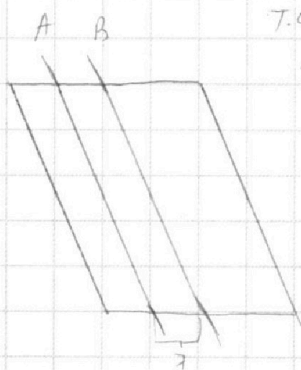
$$\text{т.к. } 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \rightarrow$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$$

$$y_2 = -2x_2 + 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$$

$$y_2 = -2(x_2 - 7 - x_1) + y_1 \rightarrow \text{прямая. Также } z \rightarrow \text{это}$$

Обе боковые стороны параллельны с вершинами $(-13, 26), (0, 0)$ и $(3, 26), (16, 0)$ лежат на прямой $y = -2x$ и $y = -2x + 32$ соотв \Rightarrow все такие прямые, которые задаются x_1, y_1 параллельны сторонам параллелограмма, также заметим, что также работает и в другую сторону



т.е. есть две прямые А и В, что которые параллельны сторонам, тогда каждую из $T \in A$ могу взять как точку (x_1, y_1) и где нее $\exists k$ условие будет подходить все $T \in B$, причем, между ними ровно 7 км, т.е.

$$x_1, y_1 \quad \quad \quad x_1 + 7, y_1$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2x_1 + 14 - 2x_1 + y_1 - y_1 = 14$$

\rightarrow такая точка подходить

Продолжение @ на след листе



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc \rightarrow abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

$d_1, \beta_1, d_2, \beta_2, d_3, \beta_3$

$d_1, d_2, d_3 - \text{кр. } 6 \times 2$
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3 - \text{кр. } 6 \times 7$

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &\geq 15 & d_1 + d_2 &\geq 15 \\ \beta_1 + \beta_2 &\geq 11 & d_2 + d_3 &\geq 17 \\ d_2 + d_3 &\geq 17 & d_1 + d_3 &\geq 23 \end{aligned}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq \frac{15 + 17 + 23}{2} = \frac{55}{2} \Rightarrow$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 28$$

$\min d_1 + d_2 + d_3 = 28$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 11 + 18 + 39 = 68$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{68}{2} = 34$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a}{b} = (a, b) = f$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} \quad \text{make } m \rightarrow a+b \cdot m; a^2 - 7ab + b^2 : m$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 5ab}$$

③ $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$

$$(a+b)^2 - 9ab = (a-b)^2 - 5ab = 1$$

$$= (a+b - 3\sqrt{ab})(a+b + 3\sqrt{ab}) = (a+b) \cdot (a+b + 3\sqrt{ab})^2$$

$$= ((\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - \sqrt{ab})((\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + \sqrt{ab})$$

$$m: p \Rightarrow q: p \Rightarrow$$

$$a: p \rightarrow b: p \Rightarrow$$

$$a+b: p, \text{ то } a+b \cdot m \Rightarrow$$

$$m = q$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} \cdot \frac{1+2}{9^2 - 9 \cdot 3 \cdot 3} / 9$$

$$a+b : m \Rightarrow \frac{(a+b)^2 - 9ab}{m} \Rightarrow 9ab : m$$

$$m \leq a+b \quad m \leq 9ab$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

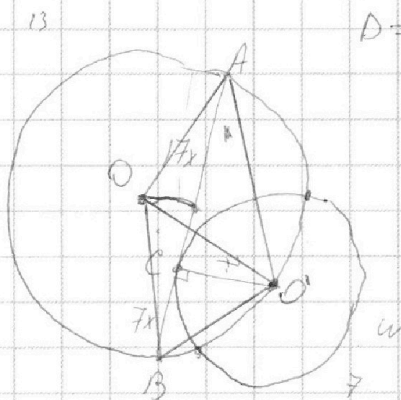
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода непустима!



$$\begin{array}{r} 676 \\ -49 \\ \hline 627 \end{array}$$



$$17^2 6^2 + (17^2 + 7^2) t - (26^2 - 7^2)$$

$$D = (17^2 + 7^2)^2 + 4 \cdot 17^2 (26^2 - 7^2)$$

AO → x
OB → x

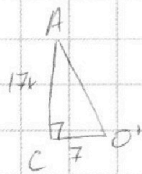
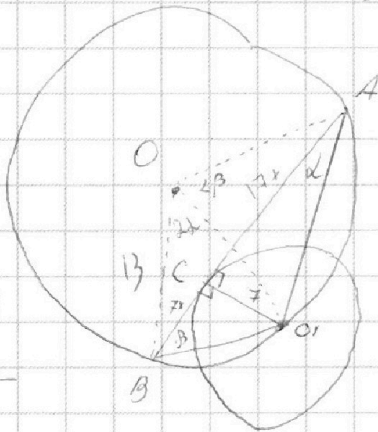
$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 68 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \\ \times 2 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 13 \\ \hline 78 \\ 268 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\cos 2 = \frac{289x^2}{289x^2 + 49}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$



$$AO' = \sqrt{17^2 x^2 + 49}$$

$$= \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha =$$

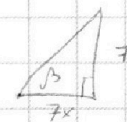
$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha =$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 338 \\ 49 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$BO'^2 = OB^2 + OO'^2 - 2\cos(2\alpha) OB \cdot OO' =$$

$$= 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot (2\cos^2 \alpha - 1)$$



$$AO'^2 = \sqrt{289x^2 + 49} \quad \cos^2 \alpha = \left(\frac{17x}{\sqrt{289x^2 + 49}} \right)^2 = \frac{289x^2}{289x^2 + 49}$$

$$BO'^2 = \sqrt{49 + 49x^2} \quad \cos^2 \beta = \frac{49x^2}{49 + 49x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\cos(2\beta) = 2\cos^2 \beta - 1 =$$

$$= \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\sqrt{289x^2 + 49} = 13^2 + 13^2 - 2\cos 2\beta \cdot 13^2 =$$

$$= 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$289x + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$$

$$289x + 49 = 338 - 338 \cdot \frac{x-1}{x+1}$$

$$289x + 49 = 338 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$289x + 49 = 338 \cdot \frac{x+1-x+1}{x+1} = 2$$

$$289x + 49 = 338 \cdot \frac{2}{x+1}$$

$$(289x + 49)(x+1) = 289x^2 + 338x + 49 = 676$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0; \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D_1 = 9 - 6 = 3$$

$$D = 9 - 3 = 6$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\sqrt{D} = 2 \cdot \sqrt{9 - 6} = 2\sqrt{3}$$

$$9x^2 - 6x + 2 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\left(x + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) = x^2 + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$x_1 \vee D = 9 - 12 < 0 \rightarrow \text{нет корней}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$(-75x^2 + 15x + 2)(-75x^2 + 15x + 2) =$$

$$= 75^2 x^4 - 75 \cdot 15x^3 - 150x^2 - 150x^3$$

$$3x^2 \quad \cancel{3x^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 - 3x - 2 = 3(x+1)^2 - 3x - 2$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \wedge^2$$

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2 = 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 - 9x$$

$$\left(3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1\right) + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 - 9x$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2} = 1 - 9x$$

$$-75x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 15x^2 + 6x^2}$$

$$\left(-75x^2 + 15x + 2\right)^2 = 4 \cdot (9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad 1 - 9x = 0 \Rightarrow 1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \quad x = \frac{1}{9} \text{ - корень}$$

$$-9x = -1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 - 6x + 2 \\ 3x^2 - \frac{1}{3}x \\ \hline -\frac{17}{3}x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - \frac{1}{9} \\ 3x - \frac{17}{3} \\ \hline \end{array} \quad 3x^2 - 6x + 2$$

$$\begin{array}{r} 27x^2 - 6x + 2 \\ 27x^2 - 3x \\ \hline -3x + 2 \\ -3x + \frac{1}{3} \\ \hline 1\frac{2}{3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 9x - 1 \\ 3x - \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \overline{) 9} \\ 6 \\ \hline 3 \\ 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \frac{17}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1) \left(3x - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 27x^2 - 54x + 18 \\ 27x^2 - 3x \\ \hline -51x + 18 \\ 51x + \frac{17}{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 9x - 1 \\ 3x - \frac{17}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 9 \left(x - \frac{1}{9}\right)$$

$$\sqrt{a} = 1 - 9x$$

$$a =$$

$$3x^2 - 6x + 2 = \left(x - \frac{1}{9}\right) \left(3x - \frac{17}{3}\right) + \frac{37}{27}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \left(3x + \frac{10}{3}\right) \left(x - \frac{1}{9}\right) + \frac{37}{27}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x + 1 \\ 3x^2 - \frac{1}{3}x \\ \hline \frac{10}{3}x + 1 \\ \frac{10}{3}x - \frac{10}{27} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x - \frac{1}{9} \\ 3x + \frac{10}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 7 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 17 \\ \beta_1 + \beta_3 &= 39 \\ \beta_2 + \beta_3 &= 24 \\ \beta_2 &= 7 - \beta_1 \\ \beta_3 &= 39 - \beta_1 \\ 56 - 2\beta_1 &= 24 \\ 2\beta_1 &= 32 \\ \beta_1 &= 16 \Rightarrow \beta_2 = 1 \Rightarrow \beta_3 = 23 \\ 2\beta_2 + 3\beta_3 &= 29 \Rightarrow \beta_2 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 16 \\ d_1 + d_2 &= 23 \\ d_2 + d_3 &= 17 \\ d_1 + d_3 &= 16 - d_1 \\ d_2 &= 23 - d_1 \end{aligned}$$

$$d_2 + d_3 = 40 - 2d_1 = 17$$

$$\begin{aligned} 2d_1 &= 22 \\ d_1 &= 11 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

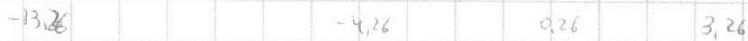


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №5.

Тогда, в на не забываем условие, что все точки имеют

целые коорд и внутри из паралл, то в качестве прямой
на которой будем отмечать точку с коорд x_1, y_1 можно выбрать



любую прямую, проходящую

через точки с коорд $\{(-13, 26), (-4, 26)\}$ и парал боковым сторонам парал

если выберем прямую через точку $x, 26$, где

$x > -4$, то ей парал через 7 клеток будет прямая через $(x+7 > 3, 26)$,
это уже не в парал.

Таких точек ровно 10. Заметим, что на каждой

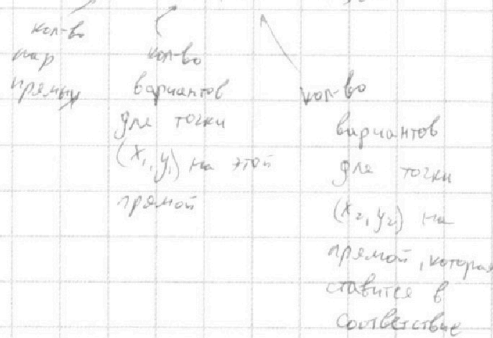
такой прямой ровно 14 целых точек с целыми координатами

тогда для каждой из этих 10 прямых на ней нет

на которых я выбираю точку x_1, y_1 ставится ровно одна

прямая на которой я выбираю точку с коорд x_2, y_2 тогда всего

вариантов выбора пары $\rightarrow 10 \cdot 14 \cdot 14 = 1960$



Ответ: 1960.

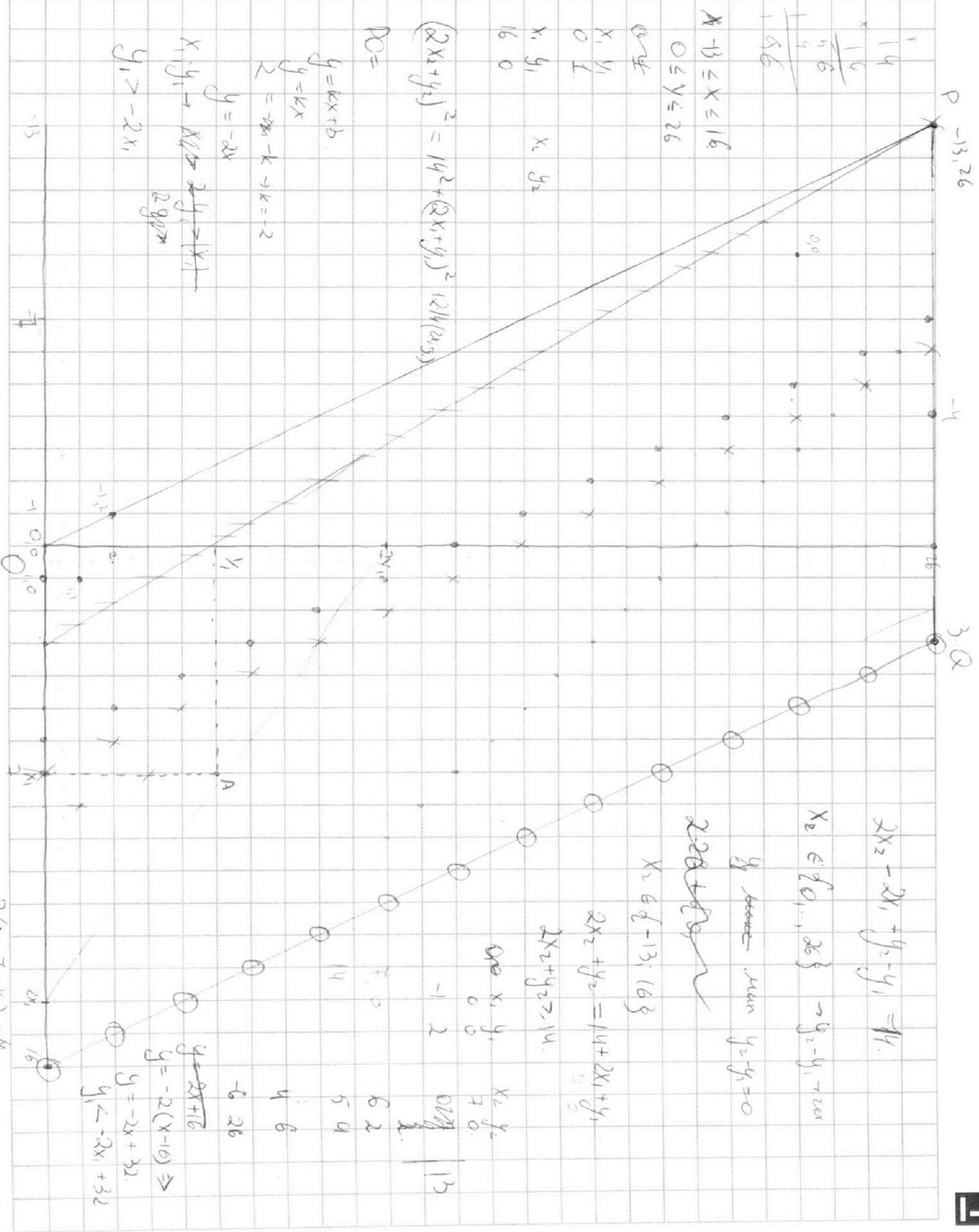
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_2 = -2(x_2 - 7 - x_1) + y_1$$

$$y_2 = -2x_2 + 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_2 = -2(x_2 - 10) \Rightarrow y_2 = -2x_2 + 20$$

$$y_1 = -2x_1 + 32$$

4	6
5	4
6	2

$$|15$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$x_2 \in [0, 26]$$

$$y_2 - y_1 = 26$$

$$x_2 \in [0, 16]$$

$$2x_2 + y_2 \geq 14$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$x_2 \geq y_1$$

$$x_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

$$x_1 \leq 7$$

$$y_1 \leq 16$$

$$x_2 \leq 26$$

$$y_2 \leq 26$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(-75x^2 + 15x + 2)^2 = 4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2)$$

$$(-75x^2 + 15x + 2)(-75x^2 + 15x + 2) = 5^2 \cdot 15^2 x^4 - 5 \cdot 15^2 x^3 - 15 \cdot 15 x^2 - 5 \cdot 15^2 x^3 + 2 \cdot 5 \cdot 15 x^2 + 15^2 x^2 + 15 \cdot 2x - 2 \cdot 15 \cdot 5 x^2 + 2 \cdot 15x + 4$$

$$= 5^2 \cdot 15^2 x^4 - 2 \cdot 5 \cdot 15^2 x^3 - 4 \cdot 5 \cdot 15 x^2 + 15^2 x^2 + 4 \cdot 15x + 4 = 4 \cdot 9x^4 - 4 \cdot 9x^3 - 4 \cdot 9x^2 + 8$$

$$(1 - 9x)^2 = 1 + 81x^2 - 18x \quad (5^2 \cdot 15^2 - 4 \cdot 9)x^4$$

$$\left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{3} \\ \hline x^3 \cdot (5^2 + 15^2 - 4 \cdot 9) \end{array} \right.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x^2 - 2x + 1 = t$$

$$3t = 3x^2 - 6x + 3 = 3x^2 + 3x + 1 + 2 \neq -9x$$

$$\sqrt{3t-1} - 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3t + 9x - 2$$

$$\sqrt{3t-1} - 1$$

$$1 - 9x = (1 - 3\sqrt{t})(1 + 3\sqrt{t})$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1$$

$$\sqrt{3x(x-2)+2} - \sqrt{3x(x+1)+1}$$

$$\sqrt{3x\left((x-2) + \frac{2}{3x}\right)} - \sqrt{3x\left((x+1) + \frac{1}{3x}\right)} = 1 - 9x$$

$$9x^2 \sqrt{1 - 9x}$$