



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



218  
12  
24  
84x  
12  
12x  
8

$$\sqrt{169 - 144x^2} = 119x^2 - 14$$

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

$$\frac{16}{192}$$



3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

$$3(x+1)^2 - 3x$$

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\frac{191x^2 + 11x + 1}{11x^2 + 19x + 1} = 1$$

$$\frac{24}{124} = \frac{96}{48}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$1 - 3 \cdot 3x$$

$$3(x-1)^2 - 1$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

$$x^2 - 4x + 1$$

$$2x^2 - 4x + 1$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\frac{959}{196}x = \frac{113}{69}$$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 \quad (2x-1)/(x-1)$$

$$x^2 - 3x + 1, \quad (x-2)/(x-1)$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

$$x^2 - 3x + 2$$

$$(x-2)/(x-1) + 3x + 2x^2$$

© МФТИ, 2023

$$4x - 14x - 4x = 1$$

$$\frac{69}{196}x = \frac{113}{69}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} \cdot 7^{17} \quad bc : 2^{14} \cdot 7^{18} \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} \cdot k_1 \quad k_1 \not\equiv 2; 7$$

$$b = 2^{y_1} \cdot 7^{y_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{z_1} \cdot 7^{z_2} \cdot k_3$$

$$ab = 2^{x_1 + y_1} \cdot 7^{x_2 + y_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \dots = 2^{15} \cdot 7^{17}$$

$$x_1 + y_1 \geq 15$$

$$x_2 + y_2 \geq 17$$

аналогично:  $y_1 + z_1 \geq 14 \quad y_2 + z_2 \geq 18 \quad x_1 + z_1 \geq 23$

$$x_2 + z_2 \geq 39$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 15 \\ y_1 + z_1 \geq 14 \\ x_1 + z_1 \geq 23 \end{cases}$$

~~ac = ab \cdot bc / b~~  
~~ab = 2^{15} \cdot 7^{17}~~  
~~bc = 2^{14} \cdot 7^{18}~~  
~~ac = 2^{23} \cdot 7^{39}~~  
~~ab \cdot bc = 2^{29} \cdot 7^{35}~~  
~~ab \cdot bc / b = 2^{15} \cdot 7^{17} \cdot 7^{18} / 7^{y\_1} = 2^{15} \cdot 7^{35 - y\_1}~~  
~~2^{15} \cdot 7^{35 - y\_1} = 2^{23} \cdot 7^{39}~~  
~~35 - y\_1 = 39~~  
~~y\_1 = -4~~  
~~невозможно~~

процп. все вычисления

$$2x_2 + 4y_2 + 2z_2 \geq 17 + 39 + 17 \quad \text{но}$$

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$$

$$ab \cdot c = 2^{x_1 + y_1 + z_1} \cdot 7^{x_2 + y_2 + z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

$$\Rightarrow 2^{23} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 \geq 15 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \\ x_1 + z_1 \geq 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + z_2 \geq 18 \\ x_2 + z_2 \geq 35 \end{cases}$$

$$2x_1 + 2y_1 + 2z_1 \geq 55$$

$$2x_2 + 2y_2 + 2z_2 \geq 48$$

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq 27.5$$
  
 $x_1, y_1, z_1 - \text{целые}$

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$$

$$\Rightarrow abc = 2^{x_1 + y_1 + z_1} \cdot 4^{x_2 + y_2 + z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$
  
 ~~$2^{28} \cdot 4^{39}$~~

Это выражение формулируется как

$x_1 = 10$

$x_2 = 11$

$y_1 = 5$

$y_2 = 0$

$z_1 = 13$

$z_2 = 18$

$a = 2^{10} \cdot 7^{11} \quad b = 2^5 \quad c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: 7

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b \div m \quad a^2 - 4ab + b^2 = a+2ab-9ab+b^2$$
$$= (a+b)^2 - 9ab \div m$$

$$\div m \Rightarrow 9ab \div m$$

then  $a \div m$ ,  $b \div m$ ,  $m \leq 9$

$$a+b \div m, \text{ но } a, b \div m \Rightarrow$$

$$a \wedge b \div m \Rightarrow a \div m \quad m \leq 9$$

$$\bullet \text{ для } m=9 \quad a=4 \quad b=5$$

$$a+b=9 \quad a^2 - 4ab + b^2 = -99$$

$$- \frac{9}{99} \text{ созн. } \frac{1}{11}$$

$$\text{Ответ: } m=9$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$
$$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 + \sqrt{3x^2-2x+3} + 2$$
$$= \sqrt{3x^2-2x+3}$$

$$1) (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) = 1-9x$$

$$\Rightarrow 1-9x = (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1}) \cdot$$

$$= (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-6x+2} = 1-9x$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 3x^2 - 36x + 4$$

$$9x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$2) \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

Вспомогательная  $2\sqrt{3x^2+3x+1} = 9x$

$$4x^2 + 12x + 4 = 9x^2$$

$$9x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{18}$$

Ответ:  $x = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{18}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Возьмем все уравнения вида  
 $2x + y = k$ . Заметим, что  
 такая прямая параллельна  
 сторонам  $OP$  и  $QR$  паралл.  $\Rightarrow$   
 для всех  $k$  от  $O$  (прямая  $OP$ )  
 до  $Q$  (прямая  $QR$ )  
 если мы берем две точки  $x_1, y_1$

и  $x_2, y_2$  так, что

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 14, \text{ то мы}$$

$$\Rightarrow 2x_2 + y_2 = k_2 \quad \text{и} \quad 2x_1 + y_1 = k_1, \text{ то}$$

мы можем взять любые две точки

линии  $A$  и  $B$ , которые мы

$$\text{на } 2x + y = k_1 \quad \text{и} \quad 2x + y = k_2$$

для каждой прямой в параллельном

линии  $k$   $\Rightarrow$  целых точек  $\downarrow$  (это видно из того  
параллельная прямая для  $k$ )

что каждая прямая покрывает определенное  
множество точек) и  $25$  если  $k_2 - k_1 = 14$   
значит что здесь  $k_1$  и  $k_2$  - разницей между

при переходе череповки, чтобы на  $14$  -  $10$  -  $26$   $\Rightarrow$   $10 \cdot 26 + 9 \cdot 25 = 25^2$   
от.  $26^2 - 25^2$ . Ответ: всего пар:  $10 \cdot 26 + 9 \cdot 25 = 25^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (пр. 7)

$$y = 3b - ax$$

$$f(x) = (x^2 + (3b - ax)^2 - 1) / (x^2 + (3b - ax - 1)^2 - 1) \leq 0$$

эта  $f(x)$  непрерывна. Заметим,  
что если она в какой-то  $x \in \mathbb{D}$ , то  
это значит, что левая часть  
интервала на котором она  $\leq 0$

(пусть в  $x_0$  она  $f(x) \leq 0$ , тогда  
но опред.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  для любого  $\varepsilon > 0$   
(или может это означать, т.к. она непрерывна.)

сущ.  $\delta > 0$  так, что для любого  $x$

$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$$

возьмем  $\varepsilon < -f(x_0)$  тогда сущ

$\delta$ , что на отрезке  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$$

если  $f(x)$  для точечных решений

то это можно еще так ~~записать~~

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 + (3b - ax)^2 - 1)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + (3b - ax - 1)^2 - 1)}_{q(x)} = 0$$

имеет 2 корня и те нули  $f(x) = 0$

где  $g(x)$  и  $q(x)$  — параболы ~~с~~ <sup>открыт.</sup>

заданы при  $x^2 + (1+a^2)$  — они сопряжены

или  $g(x)$  корни  $-z_1$  и  $x_2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

26 стр. }  
 $\Rightarrow 22ax - 192b + 129 = 0$  всегда (т.к. это

линейная функция и если у нее 2 корня,  
то все числа - те корни)

$$\Rightarrow a = 0 \quad 22a - 192b = 0 \quad b = \frac{129}{192}$$

~~при  $a \neq 0$   $22ax - 192b + 129 = 0$  имеет 2 корня  $x_1, x_2$  и  $x_1 + x_2 = -\frac{22a}{22a} = -1$~~   
 при  $a \neq 0$   $22ax - 192b + 129 = 0$  имеет 2 корня  $x_1, x_2$  и  $x_1 + x_2 = -\frac{22a}{22a} = -1$

$\Rightarrow y$  и  $q(x)$  2 корня и  $y + q(x)$  имеет

линейную функцию  $q(x)$  и  $q(x)$  по определению

корня, но это не верно

~~при  $a \neq 0$   $22ax - 192b + 129 = 0$  имеет 2 корня  $x_1, x_2$  и  $x_1 + x_2 = -\frac{22a}{22a} = -1$~~

$$D(g(x)) = (2ka)^2 - 4(1+a^2)(k^2-1) = 0$$

$$4k^2a^2 - 4k^2a^2 = 4k^2 + 4 + 4a^2$$

$$4a^2 - 4k^2 + 4 = 0 \quad a^2 - k^2 + 1 = 0$$

$$D(q(x)) = (2ua - 2ak)^2 - 4(1+u^2) \cdot$$

$$(k^2 + 128 - 22k) = 1576a^2 - 96a^2k + 4a^2k^2$$

$$- 4a^2k^2 - 512a^2 + 48a^2k - 4k^2 - 512 + 4ak$$

$$64a^2 - 48a^2k - 512 - 4k^2 + 48k = 0$$

$$16a^2 - 12a^2k - 128 - k^2 + 12k = 0$$

$$13a^2 - 12a^2k - 129 + 12k = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^2 - k^2 + a = 0$  *нб стр. 4*

$16a^2 - 72a^2k - 72b - k^2 + 43k = 0$

$$x^2 + y^2 = 1 = x^2 + (y - 72)^2 - 76 = 0$$

$$y^2 - 1 = (y - 72)^2 - 76$$

$$y^2 - 1 = y^2 - 24y + 720$$

$$2: 4y = 729$$

$$y = \frac{729}{24} \Rightarrow y \text{ не целое}$$

должно только  $xy \Rightarrow$  не имеет решений  $\Rightarrow a = 0$

Ответ:  $y = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~6 стр.~~ 26 стр. 2  
 но на интервале  $(x_1, x_2)$   $g(x) < 0$  или  $> 0$   
 на  $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$   $g(x) > 0$  или  $< 0$   
 $Q(x)$  меняет  $< 0$  и  $> 0$  на тех же  
 интервалах  $\Rightarrow$  если  $g(x)$  корни  $x_1$  и  $x_2$ ,  
 то  $g(x)$  между корнями  $(x_1$  и  $x_2)$  имеет  
 другой знак  $f(x)$  где  $g(x)$  и  $Q(x)$  и  
 разные знаки и  $f(x) < 0$ .

если  $g(x)$  не имеет корней;  
 то тогда  $g(x)$  и  $Q(x)$  не имеют  
 больше 2 корней т.к. если  $g(x)$   
 2 корня то есть  $x_1$  при котором  
 $Q(x_1) < 0$  и  $x_2$   $Q(x_2) > 0$  и  
 тогда либо  $f(x_1) < 0$  либо  $f(x_2) < 0$   
 $\Rightarrow$  либо  $g(x)$  и  $f(x)$  общие

корни, либо  $g(x)$  и  $Q(x)$  имеют по 1 корню  
 или  $g(x)$  и  $Q(x)$  имеют общие корни.  $x_1$  и  $x_2$ , то  $g(x_1) - Q(x_1) = 0$   
 $g(x) = x^2 + a^2x^2 + 6b^2ax + 64b^2 - 7$   
 $Q(x) = x^2 + a^2x^2 + 64b^2 + 144 - 16abx - 192b$   
 $Q(x) - g(x) = 144 - 192b + 24ax - 192b$   
 $144 - 192b + 24ax = 0$  при  $x_1$  и  $x_2$