



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

$$\sqrt{769 - 744x^2} = 119x^2 - 49$$

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m^2 ?

$$\frac{16}{192}$$



- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

$$3(x+1)^2 - 3x$$

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x. \quad 1 - 3 \cdot 3x$$

$$3(x-1)^2 - 1$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

$$x^2 - 14x + 1 \quad 2x^2 - 4x + 1$$

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\frac{9}{b} \begin{vmatrix} X \\ b \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x-7)^2 / (2x-7)/(x-1)$$

$$\begin{aligned} &x^2 - 3x + 1 \\ &(x-2)(x-1) \end{aligned} \quad 2. \quad 139$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2.5.

$$\begin{matrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{matrix}$$

$$x^2 - 3x + 2 \\ (x-2)(x-1) + 3x + 2x^2$$

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc : 2^{14} \cdot 7^{18} \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{30}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 7^{x_2} \cdot k_1 \quad k_1 \nmid 2; 7$$

$$b = 2^{y_1} \cdot 7^{y_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{z_1} \cdot 7^{z_2} \cdot k_3$$

$$ab = 2^{x_1+y_1} \cdot 7^{x_2+y_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \quad \therefore 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$\begin{matrix} y \\ x_1 + y_1 \geq 15 \end{matrix}$$

$$x_2 + y_2 \geq 11$$

$$\text{ограничения: } y_1 + z_1 \geq 17 \quad y_2 + z_2 \geq 18 \quad z_1 + z_2 \geq 23$$

$$x_2 + z_2 \geq 39$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + y_1 \geq 15 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \end{array} \right.$$

$$x_2 + z_2 \geq 23$$

проверка: все возможные значения

для ограничений

$$2x_2 + y_2 + 2z_2 \geq 18 + 39 + 11 = 66$$

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq 3 \quad y_2 < 39 \quad \text{он не может быть 39.}$$

$$ab \cdot c = 2^{x_1+y_1+z_1} \cdot 7^{x_2+y_2+z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

$$\geq 2^{23} \cdot 7^{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 15 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \\ x_1 + z_1 \geq 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + z_2 \geq 18 \\ x_2 + z_2 \geq 35 \end{cases}$$

$$2x_1 + 2y_1 + 2z_1 \geq 55$$

$$2x_2 + 2y_2 + 2z_2 \geq 43$$

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq 27.5$$

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$$

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq 28$$

$$\Rightarrow abc = 2^{x_1+y_1+z_1} = 2^{x_2+y_2+z_2 - k_1 - k_2 - k_3}$$

$$= 2^{28} \cdot 4^{39}$$

Это выражение достичь не

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 11$$

$$y_1 = 5$$

$$y_2 = 0$$

$$z_1 = 13$$

$$z_2 = 18$$

$$a = 2^{10} \cdot 2^{11} \quad b = 2^5 \quad c = 2^{13} \cdot 2^{18}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 4^{39}$$

Ответ:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b \cdot m \quad a^2 - 4ab + b^2 = a+2ab - 9ab + b^2$$

$$= (a+b)^2 - 9ab \quad :m$$

:m



$$9ab : m$$

если $m > 9$,

также число a , число $b : m$, то есть

$$a+b : m, \text{ но } a, b \neq 0 : m \Rightarrow$$

$$a+b : m \Rightarrow a : m \quad m \leq 9$$

$$\text{так что } m=9 \quad a=4 \quad b=5$$

$$a+b=9 \quad a^2 - 4ab + b^2 = -99$$

$$- \frac{9}{99} \text{ окн. } 90 - \frac{1}{11}$$

Ответ: $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$BC = 7x \quad AC = 12x \quad \text{OK - при } AB \text{ к из упр}$$

$$BM = M$$

$$AH = BH = 7x$$

$$CH = 5x$$

$$WH \parallel OH$$

$$\Rightarrow h^2 + (12x)^2 = 7x^2$$

$(h+7)^2 + (5x)^2 = 769$ / все можно
написать с любым числом точек W и H и
иметь различные соотношения

$h+7 = 6x$ и т.д.

$$h^2 + 144x^2 = 769 \quad h = \sqrt{769 - 144x^2}$$

$$h^2 + 14h + 49 - 25x^2 = 769$$

$$119x^2 - 49 = 769$$

$$119x^2 - 49 = \sqrt{769 - 144x^2}$$

$$119x^2 - 49 = 2\sqrt{769 - 144x^2}$$

$$289x^4 - 238x^2 + 49 = 646 - 576x^2$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$
$$x^2 = \frac{-338 + \sqrt{338^2 + 627 \cdot 289 \cdot 4}}{2 \cdot 289} = \frac{769}{289}$$

$$x = \frac{13}{17} \quad AH = \frac{13}{17} \cdot 24 = \frac{312}{17}$$

ответ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= 7 - 9x \\ 3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 &= \\ = 12x^2 - 18x + 1 & \end{aligned}$$

$$1) (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = 7 - 9x$$

$$\Rightarrow 7 - 9x = (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \cdot$$
$$= (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \cdot$$
$$\cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= 7 \\ \Rightarrow 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 7 &= 9x \\ 12x^2 - 21x + 8 &= 6x^2 - 36x + 4 \\ 6x^2 + 12x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7$$

$$\text{Возвести в квадраты} \quad 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

$$42x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$6x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 96}}{12} = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{24}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{24}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

Возьмем все узелки будо
 $2x+y = k$. Заметим, что

в таких узелках параллелограммы
стороны OP и QR паралл. \Rightarrow

для них k от O (паралл OP)

и QR ~~30~~ 30 и 32 (паралл QR)

сумма всех дистанций двух точек x_1y_1

и x_2y_2 так же

$$(2x_1 + y_1) - (2x_2 + y_2) = k_1, \text{ но это}$$

$\Rightarrow 2x_1 + y_1 = k_2$ и $2x_2 + y_2 = k_1$, но
эти точки взяты из общего множества
точек А и В, поэтому есть
так $2x+y=k_1$ и $2x+y=k_2$

для каждого узелка в параллелограммах

имеет 26 членов точек \checkmark это будет из множества

эти кратные k_1 и k_2 - количество
точек \checkmark 25 сумме k_1 и k_2 - количество

пар листьев членов. Число из ~~пять~~ ^{пять} 260
 $14 = 10$ -сторон включая 2 точки -26^2 и не пары
от. сторон -25^2 . Ответ: всего пар: $70 \cdot 26^2 + 9 \cdot 25^2$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИЕсли отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Чтобы } f(x) = 36 - ax$$

№ 6

ч. 1

$$f(x) = (x^2 + (36 - ax)^2 - 7) / (x^2 + (36 - ax - 12)^2 - 10) \leq 0$$

это $f(x)$ непрерывно. Значит,что для она в некан- $\forall x < 0$, тоЧто значит, что можно рассмотреть
интервал на котором она ≤ 0 (пункт в x_0 она $f(x) < 0$ тогда
если это сущест., т.к. это
не опред. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$)сущ. $\delta > 0$ так, что для любого x

$$\forall (x - \delta; x + \delta) \quad |f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

тогда $\varepsilon < f(x_0)$ тогда для δ , мы на отрезке $(x - \delta, x + \delta)$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$$

таким образом $f(x)$ для некоторых решений

то это можно все это

$$f(x) = 0 \quad \underbrace{(x^2 + (36 - ax)^2 - 7) / (x^2 + (36 - ax - 12)^2 - 10) = 0}$$

Испол 2 корня и все решения $f(x) < 0$

Будем $G(x)$ и $Q(x)$ — пары симметричных
корней при $x^2 + (z + a^2)$ — они симметричны
один из $G(x)$ корней $-z$, и x_2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нб отр. 3

$$\Rightarrow 276a - 192b + 729 = 0 \text{ всегда (т.к это)}$$

лишь оружия и смысла нет 2 корня,
но все члены - те же)

$$\Rightarrow a=0 \quad 276 - 192b = 0 \quad b = \frac{276}{192}$$

~~а т.к. $a=0$ то~~ Δ_1 при $b=0$ $\Delta_1 > 0$
~~наверное~~ $276^2 - 640^2 > 0$ ~~и~~ $\Delta_2 > 0$

\Rightarrow у $g(x)$ 2 корня и $g(x)$ плюс
минус у $g(x)$ и $Q(x)$ по описану

корни, но это не верно

~~у $g(x)$ и $Q(x)$ плюс~~ $ab=k$

$$D(g(x)) = (2ka)^2 - 4(1+a^2)(k^2-1) = 0$$

$$4k^2a^2 - 4k^2a^2 - 4k^2 + 4 + 4a^2$$

$$4a^2 - 4k^2 + 4 = 0 \quad a^2 - k^2 + 1 = 0$$

$$D(Q(x)) = (2ka - 2ak)^2 - 4(1+a^2) \cdot$$

$$(k^2 + 128 - 72k) = 1576a^2 - 96a^2k + 4a^2k^2$$

$$- 4a^2k^2 - 512a^2 + 48a^2k - 4k^2 - 572 + 4a^2$$

$$6ka^2 - 48a^2k - 512 - 4k^2 + 48k = 0$$

$$16a^2 - 72a^2k - 128 - k^2 + 48k = 0$$

$$13a^2 - 72a^2k - 129 + 48k = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a^2 + k^2 + x^6 \text{ спр. } y \\ a^6 + k^2 - 72a^2k - 72b - k^2 + 48k = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$$

$$y^2 - 1 = (y - 12)^2 - 16$$

$$y^2 - 1 = y^2 - 24y + 128$$

$$2 \cdot 12y = 128$$

$$y = \frac{128}{24} \Rightarrow y \text{ не может}$$

быть только зерн. \Rightarrow не было огн
решения $\Rightarrow a=0$

Ответ: $y=0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

но на интервале (x_1, x_2) $g(x) > 0$ —
 т.к. $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $g(x) < 0 \Rightarrow$
 $Q(x)$ максимум < 0 и > 0 на этих
 интервалах \Rightarrow или у $g(x)$ корни x_1, x_2 ,
 либо $Q(x)$ имеет корни (x_1, x_2) или
 только один x где $g(x) = Q(x) = 0$.
 или $g(x)$ не имеет корней;
 либо тогда у $Q(x)$ не может
 быть 2 корня м.к. или у $\underline{Q(x)}$
 2 корня либо x_1 при корне
 $Q(x_1) < 0$ и x_2 $Q(x_2) > 0$ и
 тогда либо $f(x_1) < 0$ либо $f(x_2) < 0$
 \Rightarrow либо у $Q(x)$ и $f(x)$ одни и
 корни, либо у $Q(x)$ 2 корня
 \Rightarrow либо у $f(x)$ 2 корня.
 $Q(x) = x^2 + a^2 x^2 + 64b^2 - 16abx - 192b$
 $Q(x) - g(x) = 129 - 192b + 24ax$
 $24 - 192b + 24ax = 0$ при x_1, x_2