



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1)

Так как $ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$, то и число abc будет делить-ся на это произведение. То есть минималь-ное число $abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$ и $ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$. Найдем минимальное b . Рассмотрим число на сме-рени 7. Тогда, пусть $a = 2^m \cdot 7^{10}$; $c = 2^n \cdot 7^{27}$. Тогда первые два неравенства будут выполняться от-носительно семерки (то есть если рассмотрим выражение $ab : 7^{10}$).

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ равносильно числу } \begin{cases} ab : 2^{14} \\ ab : 7^{10} \end{cases}$$

С-но, для минимизации числа b оно не делится на 7.

Тогда, пусть $a = 2^m \cdot 7^{10}$. Тогда $c = 2^{(20-m)} \cdot 7^{10}$.

С-но, если $b = 2^x$, то первые два выражения представим в виде.

$$\begin{cases} m+x \geq 14 \\ (20-m)+x \geq 14 \end{cases} \Rightarrow 20+2x \geq 31 \Rightarrow x \geq 5,5. \text{ Тогда, } m=8,5, \text{ но}$$

такого не можем быть, потому что тогда a - не натуральное. С-но, любая другая степе-нь x - не подходит. С-но, $x=6 \Rightarrow m=8$.

Тогда,
 $a = 2^8 \cdot 7^{10}$; $b = 2^6$; $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$
Тогда, $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

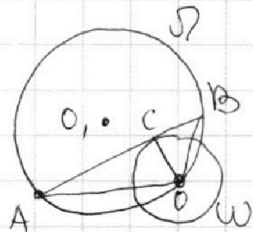
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(13)



Обозначим центр окр-ти ω — O . Тогда,
сечезои $OC \perp AB$. Но OB — кат-ой, но
есть в $\triangle AOB$, виссан. в окр-ти ω , OC —
вессане. Пусть $|AB| = 8x \Rightarrow |AC| = 4x, |CB| = 4x$.
В туги тр-ке AO $AO = \sqrt{4x^2 + 1}$ по т. Пиф.
Ан-ко, $OB = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{Сн-ко, } S_{AOB} &= \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 8x = 4x. \\ S_{AOB} &= \frac{AO \cdot OB \cdot AB}{4 \cdot OB} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} (\sqrt{4x^2 + 1}) \cdot 8x}{4 \cdot 5} \end{aligned}$$

$$\text{Т.о. } 4x = \frac{\sqrt{x^2 + 1} (\sqrt{4x^2 + 1}) \cdot 8x}{20}$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$$

$$\text{Пусть } t = x^2 \geq 0.$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0.$$

$$D = 625 + 4 \cdot 851 = 876 = 7^2 \cdot 4$$

$$t = \frac{-25 + 7}{49} = 2$$

$$t = \frac{-25 - 7}{49} < 0 \text{ — не могу.}$$

$$\text{Сн-ко, } x^2 = 1 \text{ и т.к. } x > 0, \text{ то } x = 1.$$

$$\text{Сн-ко, } |AB| = 8 \cdot x = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(14) Пусть $k = 2x^2 - 5x + 3$
 $m = 2x^2 + 2x + 1$.

Тогда получаем уравнение приравняем
вычтем

$$\sqrt{k} - \sqrt{m} = k - m$$

$$(\sqrt{k} - \sqrt{m}) = (\sqrt{k} - \sqrt{m})(\sqrt{k} + \sqrt{m})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{k} - \sqrt{m} = 0 \\ \sqrt{k} + \sqrt{m} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{k} = \sqrt{m} \\ \sqrt{k} + \sqrt{m} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = m \\ k \geq 0 \\ m \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = m \\ k \geq 0 \\ m \geq 0 \\ \sqrt{k} + \sqrt{m} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{7} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{array} \right.$$

Сложим второй ур-не с ур-нем из усло-
вие. Тогда

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 2\sqrt{61}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{4} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{4} \end{array} \right.$$

оба корня подходят
в ОДЗ.

Ответ: $\frac{11 - 2\sqrt{61}}{4}; \frac{2}{7}; \frac{11 + 2\sqrt{61}}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

И-но, у прямых $y_1 = -2x_1 + (a-12)$ и $y_2 = -2x_2 + a$

$a \in [0; 30]$ и $(a-12) \in [0; 30]$.

И-но, мы имеем $(30-12)^2 = 144$ пар
прямых. ~~И-но, если мы можем считать из~~
них 10 пар первой линии и 9 пар второ-
рой линии. И-но, любой может заменить
на прямой из пары, соответствующей
12 или 13 точек (зависимости от линии ко-
орд), заменяющих на второй прямой из
пары. Т.о., всего у нас $10 \cdot 13^2 + 9 \cdot 12^2$ пар
линий.

$$10 \cdot 169 + 9 \cdot 144 = 1690 + 1296 = 2986.$$

Ответ: 2986 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(№5.)

$$2x_2 + y_2 - 2x_1 - y_1 = 12.$$

Если ~~$y_1 = -2x_1 + a$~~ , то ~~$y_2 = -2x_2 + (12 - a)$~~

$y_2 + 2x_2 = a$, то $y_1 + 2x_1 = (a - 12)$.

Эти два уравнения задают нам две параллельные прямые, расположенные на 12 единиц одна выше другой. Они имеют коэффициент наклона (-2) . Найдём уравнение боковой грани пар.-линии (ОП).

$$\begin{cases} 0 = 0 + b \\ 12 = -12k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

т.е. прямые параллельными прямыми параллельными.

Прямые вида $y = -2x + b$ могут быть двух видов:

- 1) ~~линия~~ ~~уже~~ ~~проходит~~ ~~через~~ ~~центр~~ ~~шести~~ ~~угольника~~ ~~по~~ ~~верхней~~ ~~границе~~ ~~пар.-линии~~
- 2) не ~~линия~~.

Первый вид прямых задаётся уравнением $y = -2x + 20$
второй вид прямых — $y = -2x + (20 - 12)$

Т.е., прямые $y_1 = -2x_1 + (a - 12)$ и $y_2 = -2x_2 + a$ — одного вида, т.к. -12 — четное. Прямые первого вида проходят через 13 целочисленных точек (две диагональные 12 и 12 касательных углов), а второго вида — 12 ~~и~~ ~~у~~ ~~с~~ ~~точек~~. Найдём количество прямых каждой линии: на верхней стороне пар.-линии 16 $y/2$ точек (т.к. ее длина $15 - 0 = 15$), т.е. прямых 8, а прямые второго вида расположены между ними, то есть их 15. Вторая боковая сторона пар.-линии задаётся уравнением $y = -2x + 30$, т.к.

$$\begin{cases} 0 = 15k + b \\ 12 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ 15k + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ b = 30 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

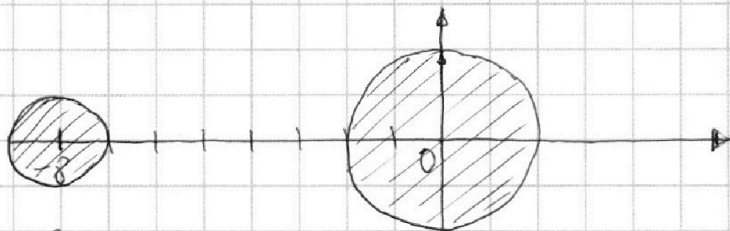
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Второе уравнение задает нам две окружности с центрами $(-3; 0)$ и $(0; 0)$ и радиусами 1 и 2 соответственно.



Первое ур-ие задает нам прямую $y = ax + 10b$.
И-но, ^{система} ~~что~~ уравнение имеет две решения,
~~то~~ прямая должна иметь ровно две об-щие точки с окружностями или с одной из них. С одной окр-тью она может иметь либо только одну общую точку, либо не иметь, либо иметь бесконечно много. С двумя окр-тями она может иметь 2 общие точки если будет касательной к ним (внутренней или внешней).

$$\text{т.о. } \begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

$$ax + 10b = \sqrt{4 - x^2}$$

$$a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 4 - x^2$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

И-но ур-ие имеет одну общую точку $D = 0$.

$$D_1 = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 - 100b^2 + 4a^2 + 4 = 0$$

$$100b^2 = 4a^2 + 4$$

$$25b^2 = a^2 + 1$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$\text{И-но } \begin{cases} y = ax + 10b \\ y = \sqrt{1 - (x+3)^2} \end{cases} \Rightarrow ax + 10b = \sqrt{1 - (x+3)^2} \Rightarrow a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 1 - (x+3)^2$$

$$(1 + a^2)x^2 + (20ab + 16)x + 100b^2 + 63 = 0$$

$$D_2 = (10ab + 8)^2 - (100b^2 + 63)(a^2 + 1) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 = 0.$$

$$160ab + 1 - 100b^2 - 63a^2 = 0$$

$$100b^2 - 160ab + 63a^2 - 1 = 0.$$

$$D_b = 80^2a^2 - 6300a^2 + 100 = 100(a^2 + 1) = (10\sqrt{a^2 + 1})^2$$

~~$$b = \frac{80a + 10\sqrt{a^2 + 1}}{100} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$~~

$$b = \frac{80a - 10\sqrt{a^2 + 1}}{100} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

Т.о., где первой окр-ми $b = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$
где второй окр-ми: $b = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$

Сл-но, касаясь применяя формулу касательной
одной из окр-ми, сл-но, b где перв.
окр-ми равно b — где второй. Если ~~какая~~
~~то 2 равносильных уравнения~~

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$3\sqrt{a^2 + 1} = 8a$$

$$9a^2 + 9 = 64a^2$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$a^2 + 1 = 64a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$9a^2 + 9 = 64a^2$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$a^2 + 1 = 64a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

Таким образом, имеем 4 значения

а. Ответ: $-\frac{3}{\sqrt{55}}$; $-\frac{1}{\sqrt{63}}$; $\frac{1}{\sqrt{63}}$; $\frac{3}{\sqrt{55}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

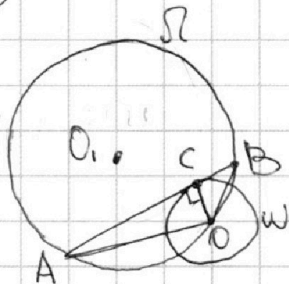
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

13



Обозначим центр окр-ти ω — O . Тогда, отрезки $OC \perp AB$ по свойству касательной, то есть в прямоугольнике AOB , вписанном в окр-ть Ω , OC — высота. Обозначим длину стороны $AB = 8x \Rightarrow AC = 7x, CB = x$.

$$\text{Т.о.}, S_{AOB} = OC \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 8x \cdot \frac{1}{2} = 4x.$$

В $\triangle AOB$ по теореме Пифагора $AO = \sqrt{AC^2 + x^2} = \sqrt{49x^2 + 1}$ по т. Пифагора.
Синус-теорема, $\sin \angle AOB, OB = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$\text{Т.о.}, S_{AOB} = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB}{2} = \frac{\sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot 8x}{4 \cdot 2} = 4x$$

$$\sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} = 10$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\text{Пусть } t = x^2 \geq 0.$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0.$$

$$D = 25 \cdot 25 + 99 \cdot 49 = 5476 = (74)^2$$

$$t = \frac{-25 + 74}{98} = 1$$

$$t = \frac{-25 - 74}{98} < 0 \rightarrow \text{не возм.}$$

$$\text{Синус-теорема, } x^2 = 1. \text{ Т.к. } x > 0, \text{ то } x = 1.$$

$$\text{Синус-теорема, } |AB| = 8x = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(w2.)
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$$

См-но, если можно можно сократить
на m , m , m

$$\begin{aligned} a+b &= km \\ (a-b)^2 &= n^2 m + b \\ 4ab &= fm + b \end{aligned}$$

~~8.~~

$\pm 8.$

$$\begin{aligned} \frac{11+16}{4} &= \frac{27}{4} \approx 7 \\ \frac{11-16}{4} &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$



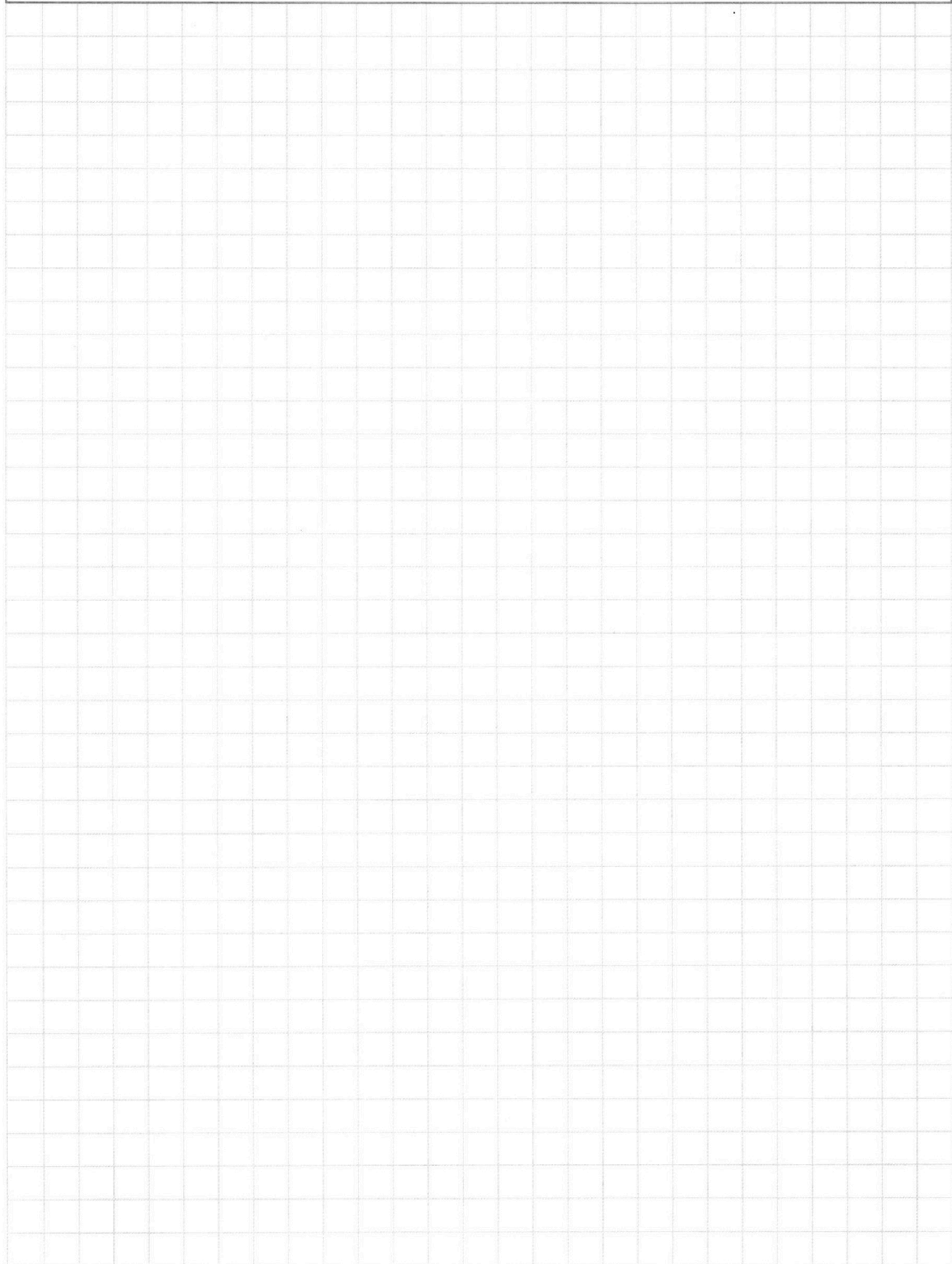
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{(a-b)^2 - 4ab} = \frac{7}{1-48} = \frac{7}{-47}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{a}{6}$$

$$\frac{4+3}{4^2+3^2-6 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7}{25-22}$$

$$a = qm + l$$

$$b = cm + z$$

$$a+b = km$$

$$a-b = pm$$

$$4ab = fm$$

$$(qm+l)(cm+z) = u = fm$$

$$(qm+l)(cm+z)$$

$$(qcm^2 + (c+l)zm + lz) = fm$$

$$a^2 + b^2 = km + c$$

$$6ab = lm + (m-c)$$

$$a+b \div m$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \div m^2$$

$$km + c + \frac{1}{3}m + \frac{m}{3} - \frac{c}{3} \div m^2$$

$$m(k + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{2}{3}c \div m^2$$

$$k + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \div m$$

$$\frac{2}{3}c \div m^2$$

~~2c~~

$$2c \div m^2$$

$$2m - 20 \div m$$

$$m \geq 20$$

$$20 \div m$$

$$a+b \div m$$

$$a^2 + b^2 = km + c$$

$$6ab = lm + c - m$$

$$2ab = \frac{1}{3}m + \frac{c}{3} - \frac{m}{3}$$

$$a^2 + b^2 \div m^2$$

$$c < m$$

$$km + c + \frac{1}{3}m - \frac{m}{3} + \frac{c}{3} \div m^2 \quad 2c \div m$$

$$(k + \frac{1}{3} - \frac{1}{3})m + c(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) \div m^2 \quad c = \frac{m}{2}$$

$$\frac{4}{3}c \div m^2$$

$$c \leq m$$

$$2c \geq m$$

~~2c~~

~~2c~~

$$c = 0$$

$$c < m$$

$$2c \div m^2$$

$$2c + m \geq m + c$$

$$c \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2.$$

$$\sqrt{k} - \sqrt{m} = k - m. \quad k \geq 0$$

$$k + m - \sqrt{km} = k^2 - 2mk + m^2. \quad m \geq 0$$

$$k - \sqrt{k} = m - \sqrt{m}.$$

$$k^2 + k - 2k\sqrt{k} = m^2 + m - 2m\sqrt{m}.$$

$$k - m = k^2 - m^2.$$

$$(k - m) = (k - m)(k + m)$$

$$\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{m} \Rightarrow k = m$$

$$\sqrt{k} + \sqrt{m} = 1.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \\ 63a^2 - 160ab + 100b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$67a^2 - 160ab + 3 = 0$$

$$b = \frac{67a^2 + 3}{160a}$$

$$y = ax + 10b$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 4 - x^2$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (20ab)x + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 - 100b^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4 &= 100b^2 \\ b^2 &= \frac{4a^2 + 4}{100} \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{a^2 + 1}}{10} \\ b &= -\frac{1}{5}\sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{67a^2 + 3}{160a} = \frac{2\sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$\frac{67a^2 + 3}{32} = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$4489a^4 + 402a^2 + 9 = 1024a^2 + 1024$$

$$4489a^4 - 622a^2 - 1015 = 0$$

$$311 \cdot 311 + 1015 \cdot 4489$$

$$\begin{array}{r} \times 2156 \\ 2156 \\ \hline 12786 \\ 10780 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 311 \\ 311 \\ \hline 311 \\ 933 \\ \hline 96724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4489 \\ 1015 \\ \hline 22445 \\ 4489 \\ \hline 0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24489 \\ \hline 4556335 \\ 96721 \end{array}$$

4653056

$$\begin{array}{r} \times 205 \\ 205 \\ \hline 1625 \\ 0000 \\ 410 \\ \hline 42025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 215 \\ 215 \\ \hline 1075 \\ 215 \\ \hline 430 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46225 \\ \times 216 \\ 216 \\ \hline 1296 \\ 216 \\ \hline 432 \\ \hline 46656 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$80^2 a^2 - 63a^2 + 100 = 0.$$

$$100a^2 + 100 = 0. \quad (100a^2 + 1)^2$$

$$b = \frac{80a + 10\sqrt{a^2 + 1}}{100} = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$100a^2 + 1 = 809.$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = 89.$$

$$a > 0.$$

$$a^2 + 1 = 649.$$

$$a^2 - 649 = 0.$$

$$\sqrt{\frac{649}{64}}$$

$$64^2 + 4 = 0.$$

$$+ 62x^2 - x - 3 + (4x^2 - 4)(x^2 - 50x + 8)$$

$$50 \cdot 45x^3$$

$$4x^4 - 8x^3 - 2x^2 + x + 3 = 4x^2 + 62x^2 + 3$$

$$4x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 2x^2 + 2x + 3 + 6x + 3$$

$$50 \cdot 45$$

$$5x(5x - 5)$$

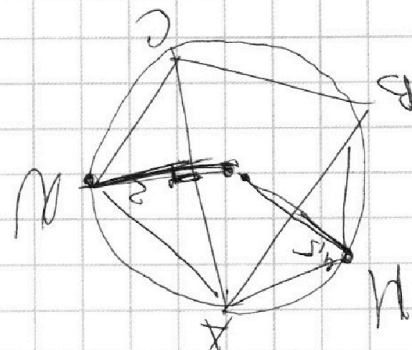
$$45x^2 - 25x = (2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 3)$$

$$45x^2 + 25x - 25x - 25x = 45x^2 + 25x - 25x - 25x$$

$$45x^2 + 25x + 1 + 14$$

$$45x^2 - 5x + 3 + 14x(2x^2 - 5x + 3) = 45x^2 - 5x + 3$$

$$45x^2 - 5x + 3 + 14x = 45x^2 + 22x + 1 + 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(√4)

$$\sqrt{(x-1)(x-\frac{3}{2})} - \sqrt{\dots}$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - \sqrt{\dots} = 4 - 3x + 4x^2$$

$$-45x^2 + 11x = \sqrt{\dots}$$

$$(x(45x-11))^2 = (2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)$$

$$4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$$

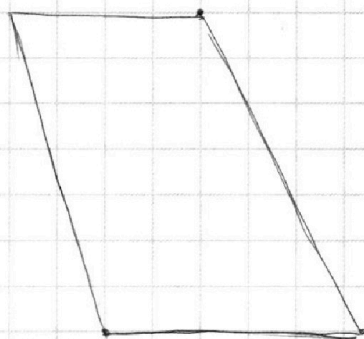
45x

x 45
45
225

$$45^2 x^2 -$$

$$2x_1 + y_1 = 12 + 2x_2 + y_2$$

$$x + y = 3$$



$$400a^2b^2 - 100a^2b^2$$

$$4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$(a^2+1)(100b^2-4)$$

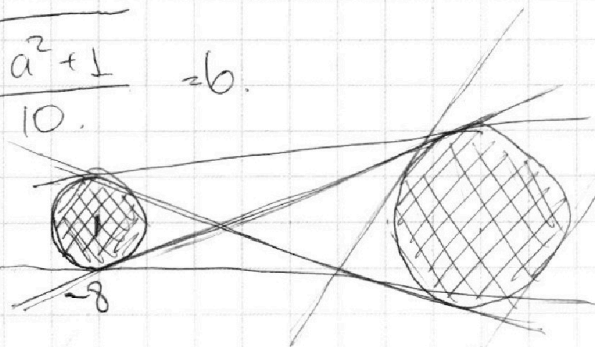
$$100a^2b^2 + 100b^2 - 4a^2 - 4$$

$$100a^2b^2$$

$$4a^2 + 4 = 100b^2$$

$$(a^2+1)x^2 + 2abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\frac{20a^2+1}{10} = b$$



$$ax + 10b = x^2 + y^2 - 4$$

$$ax + 10b = \sqrt{-x^2+4}$$

$$(ax)^2 + 20abx + 100b^2 = 4 - x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

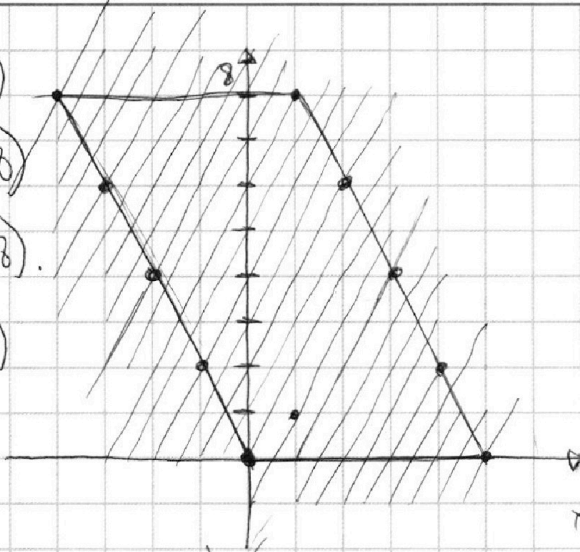
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0; 0)$
 $P(-4; 8)$
 $Q(2; 8)$
 $R(5; 0)$



$$2x - y = 2$$

$$y = 2x - 2$$

$$2x - y =$$

$$2x + y = 1$$

$$2x - y = 11$$

$$0 = \frac{1690}{1296}$$

$$20 - 8$$

$$12 \cdot 4$$

$$\frac{144}{9} = 1296$$

$$12 \cdot 14$$

$$\frac{14}{12} = 28$$

$$\frac{14}{12} \times 168 = 196$$

$$\frac{7}{4}$$

$$30$$

$$\frac{12}{30}$$

$$+ 360 + 16 + 12$$

$$388$$

8 и 5.

7 и 4.

7 и 4.

$$ax + 10b = (x + 8)^2 + 2$$

$$a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = \Delta - x^2 - 16x - 64$$

10.

$$(a^2 + 1)x^2 + (20ab + 16)x + (100b^2 + 63)$$

$$(20ab + 16)^2$$

$$(100b^2 + 8)^2$$

$$100a^2b^2 + 160ab + 64 -$$

$$100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63$$

$$63a^2 - 160ab + 100b^2 - \Delta = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 \times 1227 \\
 1227 \\
 \hline
 8589 \\
 2454 \\
 2454 \\
 1227 \\
 \hline
 1505529
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1243 \\
 1243 \\
 \hline
 3729 \\
 4972 \\
 2486 \\
 1243 \\
 \hline
 1545049
 \end{array}$$

$$\times 1300$$

$$\begin{array}{r}
 \times 13 \\
 13 \\
 \hline
 39 \\
 13 \\
 \hline
 1690000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1297 \\
 1297 \\
 \hline
 9079
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1293 \\
 1293 \\
 \hline
 3879
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1287 \\
 1287 \\
 \hline
 09 \\
 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11673 \\
 1594
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11637 \\
 2586
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1297 \\
 \hline
 1582209
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1293 \\
 \hline
 1671849
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 6351 \\
 2401 \\
 \hline
 6351
 \end{array}$$

$$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} ah_a$$

$$\begin{array}{r}
 0000 \\
 25404 \\
 12702 \\
 \hline
 15248752
 \end{array}$$

$$\frac{8x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2-49+1}}{20} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x$$

$$\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 10$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$625 + 441$$

$$\begin{array}{r}
 \times 25 \\
 25 \\
 \hline
 125 \\
 50 \\
 \hline
 625
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 49 \\
 49 \\
 \hline
 441
 \end{array}$$

$$1086$$

$$\begin{array}{r}
 \times 49 \\
 49 \\
 \hline
 441 \\
 441 \\
 \hline
 4851 \\
 625 \\
 \hline
 5476
 \end{array}$$

$$8x \cdot \sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 4x$$

$$\begin{array}{r}
 -25+74 \\
 \hline
 49
 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{99}{49}}$$

$$\frac{9}{7} \sqrt{11}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 74 \\
 74 \\
 \hline
 296 \\
 518 \\
 \hline
 5476
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 36 \\
 36 \\
 \hline
 216 \\
 108 \\
 \hline
 1296
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -25+74 \\
 \hline
 49
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 76 \\
 76 \\
 \hline
 353 \\
 532 \\
 \hline
 5673
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

~~$$2^{14} \cdot 7^{10}$$~~

$$2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$$

$$c =$$

$$b = 2^6$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{10}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{27}$$

$$m + x \geq 14$$

$$(20 - m) + x \geq 17$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$1500625 + 153664 =$$

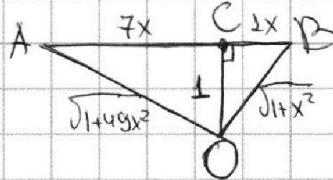
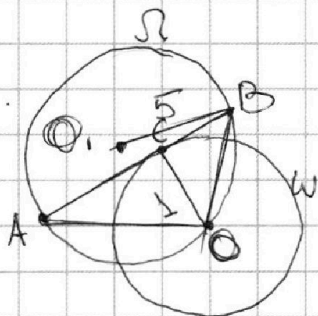
=

$$\frac{1}{4} = 9 - 1 = (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} \quad \begin{cases} a = (3 + 2\sqrt{2})b \\ a = (3 - 2\sqrt{2})b \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + 1500625 \\ + 153664 \\ \hline 1654289 \end{array}$$

$$a+b$$

$$(a - (3 + 2\sqrt{2})b)(a - (3 - 2\sqrt{2})b)$$



$$\begin{array}{r} \times 1303 \\ 1303 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 227 \\ 227 \\ \hline 8589 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6400 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4927 \\ 4927 \\ \hline 999529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2450 \\ 2450 \\ \hline 0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1225 \\ 1225 \\ \hline 6125 \\ 2450 \\ \hline 1225 \\ \hline 1500625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2401 \\ 2401 \\ \hline 9604 \\ 14406 \\ \hline 153664 \end{array}$$

$$80x = 7x \sqrt{(1+x^2)(1+49x^2)}$$

$$\left(\frac{80}{7}\right)^2 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$2401x^4 + 2450x^2 - 6400 = 0$$

$$\begin{array}{r} 12250 \\ 9800 \\ \hline 4900 \\ 6002500 \end{array}$$

~~6400~~
- 49
6351