



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$ м, $bc = 2^{17} \cdot 7^7$ м, $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$ кг, $m, n, k \in N$. Замеч. 2 м.

если в числах m, n и k есть простые делители, отличные от 2 и 7 , то можно не бояться поделить, уменьшив число, и все необходимые условия будут выполняться - таким образом,

в числах m, n и k исключаются чл. простых множителей только 2 и $7 \Rightarrow abc = 7^{10} \cdot 2^6$.

Рассмотрим где простые делители преодолены.

I. Рассмотрим 1. Переведем все решения в заранее:

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{14} \cdot 7^{10} m n k \Rightarrow abc = \sqrt{2^{14} \cdot 7^{10}} m n k \Rightarrow m, n, k \in N, \text{ но } abc \vdash 2^6, m, n, k. \sqrt{2^{14}} = 2^7 \cdot \sqrt{2},$$

но $m, n, k \geq 1 \Rightarrow \min y = 26$. Приведу пример:

$a \rightarrow 2^9; b \rightarrow 2^5; c \rightarrow 2^{11}$ (здесь соотношение числа с их max степенями 2). Могут заметить,

что $abc \vdash 2^6$, но $abc \nmid 2^7$ и все 3 условия выполнены $\Rightarrow y = 26$.

II. Рассмотрим 2. Т.к. $a, b, c \in N \Rightarrow abc \vdash ac$, т.к. $ac \vdash 7^{37} \Rightarrow abc \vdash 7^{37} \Rightarrow \min x = 37$.

Приведу пример:

$a \rightarrow 7^{10}; b \rightarrow 7^6; c \rightarrow 7^{29}$. Аналогично, все указанные выполнены $\Rightarrow \min x = 37 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min abc = 2^6 \cdot 7^{37}$$

Одн. $2^6 \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию $\frac{a}{b}$ - неократимая дробь $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a; a+b) = 1$ и

$\text{НОД}(b; a+b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(ab; a+b) = 1$. Теперь преобразуем начальное выражение:

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \cdot \text{Занесём } \text{НОД}(a+b; (a+b)^2-8ab) = \text{НОД}(a+b; 8ab) \text{ в знаменатель}$$

$\text{НОД}(a+b; ab) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; 8ab) > 1$ если $\text{НОД}(a+b; 8) > 1$. Но $\max \text{НОД}(a+b; 8) = 8$.

Таким образом, $\max m \in N = 8$. Тогда остаток делимости, если $(a+b) \vdots 8$. Приведу

пример, в котором это выполнено:

$$a=1; b=7 \Rightarrow \frac{1+7}{1-6 \cdot 7 \cdot 1+7^2} = \frac{8}{8} \Rightarrow m=8.$$

П.д. было доказано, что $m \leq 8$ и приведён пример на $m=8$.

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

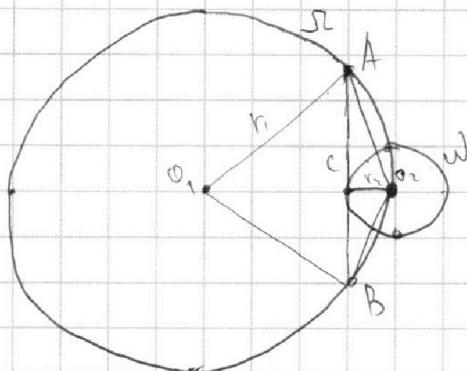
6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Dано:

$$r_1 = 5$$

$$r_2 = 1$$

AB - касательная к ω

$$AC : CB = 7$$

$$\overline{AB} ?$$

Решение:

1) Введём обозначения: O_1 - центр ω_1 ; O_2 - центр ω_2 ; r_1 и r_2 - их радиусы соответственно.

2) AB - касательная к $\omega \Rightarrow O_2C \perp AB$.

3) Пусть $BC = x \Rightarrow AC = 7x$. По теореме Пифагора для $\triangle ACO_2$: $AO_2^2 = AC^2 + CO_2^2$; для $\triangle BCO_2$:

$$BO_2^2 = BC^2 + CO_2^2 \Rightarrow AO_2^2 = 49x^2 + r_2^2; BO_2^2 = x^2 + r_2^2 \Rightarrow AO_2 = \sqrt{49x^2 + r_2^2}; BO_2 = \sqrt{x^2 + r_2^2}$$

4) По теореме cos для $\triangle AOB$:

$$AO_2^2 + BO_2^2 - 2 \cdot AO_2 \cdot BO_2 \cos \angle AOB = AB^2. \text{ Пусть } \angle AOB = \alpha \Rightarrow$$

$$49x^2 + r_2^2 + x^2 + r_2^2 - 2\sqrt{(49x^2 + r_2^2)(x^2 + r_2^2)} \cos \alpha = 64x^2$$

$$2r_2^2 - 2\sqrt{49x^2 + 50x^2r_2^2 + r_2^4} \cos \alpha = 14x^2. \mid : 2$$

$$r_2 - k \cdot r_2 = 1$$

$$1 - \sqrt{49r_2^4 + 50r_2^2 + 1} \cos \alpha = \frac{7}{32}x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{7}{32}x^2}{\sqrt{49r_2^4 + 50r_2^2 + 1}}.$$

Продолжение см. на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $\angle A_0 B = \frac{\widehat{AB}}{2}$; $\angle A_0 B = \widehat{A_0 B}$, но $\widehat{AB} + \widehat{A_0 B} = 360^\circ \Rightarrow \angle A_0 B = 360^\circ - 2\angle A_0 B \Rightarrow -360^\circ - 2\alpha$.

6) $\cos \angle A_0 B = \cos(360^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2 \cdot (1 - 7x^2)}{49x^4 + 50x^2 + 1} - 1 = \frac{2 + 98x^4 - 78x^2}{49x^4 + 50x^2 + 1} - 1 =$
 $= \frac{49x^4 - 78x^2 + 1}{49x^4 + 50x^2 + 1}$

7) По теореме cos гар $\triangle A_0 B$:

$$A_0^2 + B_0^2 - 2 \cdot A_0 \cdot B_0 \cdot \cos \angle A_0 B = AB^2. \text{ Т.к. } A_0 = B_0 = r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha = 64x^2$$

$$r^2 - r^2 \cos 2\alpha = 64x^2. \text{ Но } \cos 2\alpha = r^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 - 25(99x^4 - 78x^2 + 1)}{49x^4 + 50x^2 + 1} = 64x^2$$

$$64 \cdot 49x^6 + 64 \cdot 50x^4 + 64x^2 + 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 78x^2 + 25 - 25 \cdot 49x^2 - 25 \cdot 50x^2 - 25 = 0$$

$$32 \cdot 49x^6 + 32 \cdot 50x^4 + (32 - 25 \cdot 78 - 25 \cdot 50)x^2 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 98 = 0$$

Решим $y = x^2 \Rightarrow y \geq 0$.

$$49y^2 + 50y - 98 = 0$$

$$\Delta = 21804$$

$$\sqrt{\Delta} = 148$$

$$y_1 = \frac{-148 - 50}{98} < 0 \text{ - недопустимо}$$

$$y_2 = \frac{148 - 50}{98} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x^2 = 1, \text{ т.к. } x > 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Однеш: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 2x) = 2 - 2x$$

Пусть $y = 2x^2 - 5x + 3$, $z = 2 - 2x \Rightarrow$

$$z - \sqrt{y} - \sqrt{y-z} = z$$

$$y + y - z - 2\sqrt{y(y-z)} = z^2$$

$$2y - z^2 - z = 2\sqrt{y(y-z)}$$

$$4y^2 + z^2 + z^2 - 4yz^2 - 4yz + z^3 = 4y^2 - 4yz$$

$$z^2 + 2z^3 + (1-4y)z^2 = 0$$

$$z^2(z^2 + 2z + 1 - 4y) = 0$$

$$(2-2x)^2(4+49x^2-22x+4-14x+1-8x^2+20x-12) = 0$$

$$(2-2x)^2(41x^2 - 22x - 3) = 0$$

$$\begin{cases} 2-2x=0 \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{7} \Rightarrow z = 0$$

$$\text{D} = 484 + 492 = 976$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{976}$$

$$x_1 = \frac{22 - \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

Замечу, что $2x^2 - 5x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$. $2x^2 + 2x + 1 > 0$ всегда.

Но при этом $1 < \frac{2}{7} < \frac{3}{2}$. Остальные корни нигде не лежат.

Ответ: $\left\{ \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \right\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

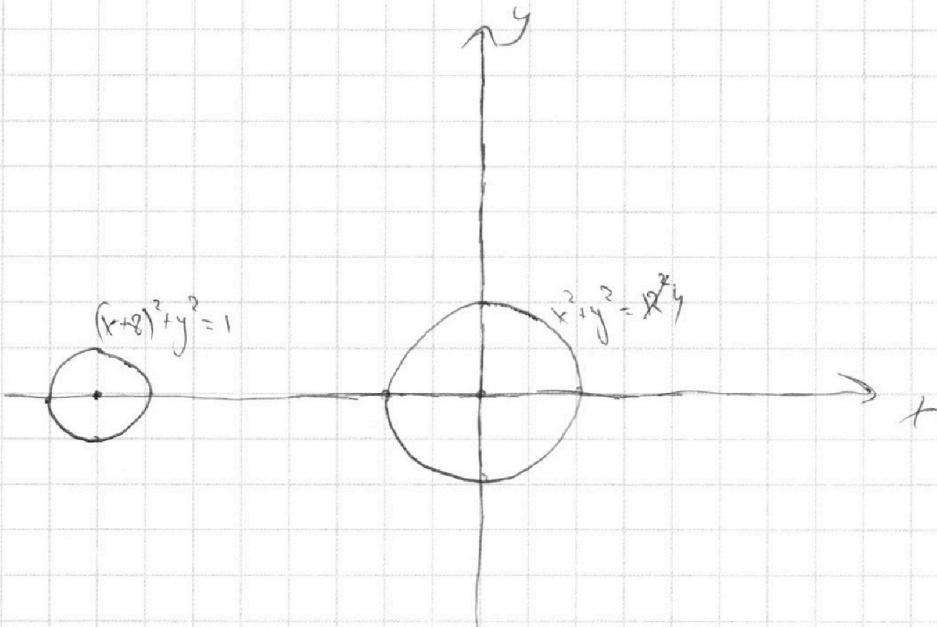
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Построим графики функций $(x+2)^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4$. Это окружности:



Замечу, что неравенство верно, когда точка лежит внутри одной окружности
и вне другой. т.к. окружности не касаются, то это верно при всех $x \neq y$. т.о.

у неравенства $((x+2)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ бесконечно много решений, и оно
является верно \Leftrightarrow на количество решений это не влияет. У функции $y = arctg x$
бесконечно много решений, т.к. $y = arctg x$ - прямая. Таким образом, при
любом $a \in \mathbb{R}$ данная система имеет бесконечно много решений, т.е. 2 решения
не будет ни при каких a .

Ответ: \emptyset .

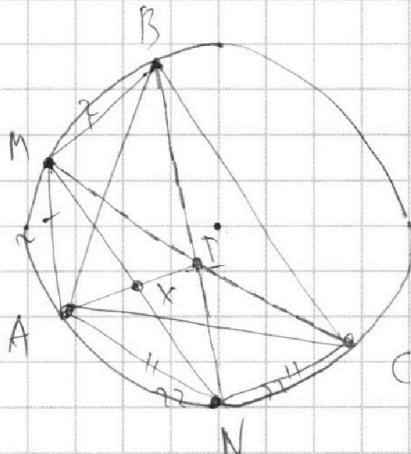
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{AN} = \overline{NC}$$

$$h_1 = 7,5; h_2 = 2$$

AI - ?

Решение:

1) Рассмотрим h_1 - расстояние от M до AB - как h_1 высота из M в $\triangle AMB$; h_2 - аналогично
высота из N в $\triangle ANC$.

2) Рассмотрим т. I - пересечение CM и BN . $\angle ABN = \frac{\overline{AN}}{2}$, $\angle CBN = \frac{\overline{CN}}{2}$, но $\overline{AN} = \overline{CN}$
 $\Rightarrow \angle ABN = \angle CBN \Rightarrow BN$ - биссектриса $\angle ABC$. Аналогично CM - биссектриса $\angle ACB$.

Четверт вписанной окр. - точка пересеч. бисс. $\Rightarrow I$ - четверт вписан. окр. $\triangle ABC \Rightarrow$ нам
необходимо найти AI .

3) Т.к. $\overline{AM} = \overline{MB} \Rightarrow AM = MB = a$; Аналогично $AN = CN = b$. Рассмотрим $\angle BCM = \angle ACM = d$; $\angle ABN = \angle CBN = \beta$.

4) $\triangle AMB$ - винс. \Rightarrow по теореме косинусов: $\angle MAB = \angle MCB = d$. Но $\angle MBA = \angle MAB = d$
($\triangle MAB$ - р/д.). Аналогично $\angle BAC = \angle NCA = \beta$.

5) Выпишем пары равных вспомогательных углов, опир. на огн. фиг.

$$\angle AMN = \angle ABN = \beta; \angle CMN = \angle CBM = \beta; \angle ANM = \angle ACM = d; \angle MNB = \angle MCN = d.$$

6) По теореме синусов находим для $\triangle ABM$.

$$S = \frac{a^2 \sin(180^\circ - 2d)}{2} = \frac{a^2 \sin 2d}{2}.$$

Из

(М. приложения)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)

$$a^2 \sin 2d = AB \cdot h_1.$$

По теореме sin теореме $\sin \text{g} \triangle AMB:$

$$\frac{AM}{\sin d} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 2d)} \Rightarrow AB = \frac{a \sin 2d}{\sin d}$$

2)

$$a^2 \sin 2d = a \sin 2d \cdot h_1 \Rightarrow a \sin 2d = h_1.$$

Аналогично из $\triangle ANC:$

$$b \sin B = h_2.$$

3) $\triangle MAN = \triangle MIN$ по II вр. ($\angle AMN = \angle IMN = \beta; \angle ANM = \angle INM = \alpha; MN = MI$) $\Rightarrow AM = IM;$

$AN = IN \Rightarrow AMIN$ - гетонг $\Rightarrow AI \perp MN \text{ и } AX \perp IX.$

4) По теореме sin g $\triangle MAX:$

$$\frac{AX}{\sin \beta} = \frac{AM}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AX = a \sin \beta.$$

Аналогично из $\triangle NAX:$

$$\frac{AX}{\sin \alpha} = \frac{AN}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AX = b \sin \alpha$$

Из выше полученных равенств сарығем: $AI = 2a \sin \beta = 2b \sin \alpha \Rightarrow AI^2 = 4ab \sin \alpha \sin \beta,$

но $a \sin \alpha = h_1; b \sin \beta = h_2 \Rightarrow AI^2 = 4h_1 h_2 = 36 \Rightarrow AI = 6.$

Олбем: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

чертёж

$$ax - y + 10b = 0$$

$$(x+6)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$y = ax + 10b$$

$$(x+6)^2 + a^2x^2 + 2abx + 100b^2 - 1)(x^2 + a^2x^2 + 2abx + 100b^2 - 4) \leq 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (8ab + 6)x + (100b^2 + 63) \geq 0$$

$$y = (a^2 + 1)x^2 + 2abx + (100b^2 - 4)$$

$$y(y + 16a^2 + 63) \leq 0$$

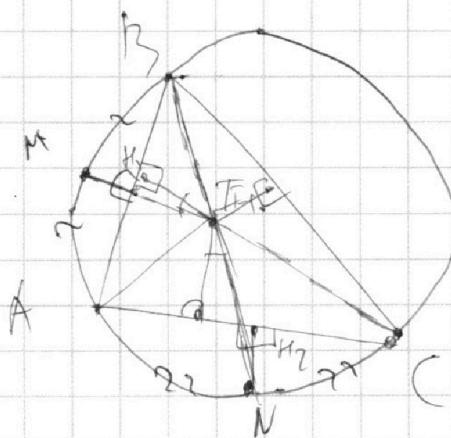
$$D = (2ab + 6)^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 + 63) \geq 0 \quad 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 4a^2b^2 - 256a^2 - 400b^2 - 256 = 640ab - 256a^2 - 400b^2 + 7$$

да

М1 - 9,5

М2

AI - ?



CM и BN - ^{бисс.}
I - их ^{перес.} точка

перес.



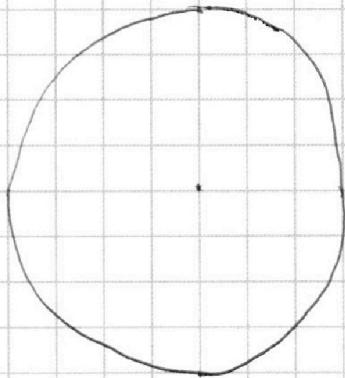
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



задача

найти $abc - ?$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ м}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 7^{17} \text{ м}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \text{ м}$$

$$abc^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \text{ м}^3$$

$$2^{20} \cdot 7^{37} - ?$$

$$\begin{array}{l} a=7^9 \\ b=7^{27} \\ c=7^{37} \\ d=2^0 \end{array}$$

тогда для 2^6 степеней
 $a+b+d=20$

$$b=1$$

$$a=2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$c=2^{13} \cdot 7^{17}$$

$$ac=2^{50} \cdot 7^{37} \text{ м}$$

какой же степень?

a, b, c

$$\begin{array}{l} 8+7=15 \\ 1+2=3 \end{array}$$

$$y \quad a \rightarrow 2^9$$

$$y \quad b \rightarrow 2^{15}$$

$$y \quad c \rightarrow 2^3$$

$$a=2^9 \cdot 7^{10}$$

$$b=2^{15}$$

$$c=2^3 \cdot 7^{37}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{87}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{z} - \sqrt{y-z} = y$$

зарисовка

$$z + y - z - 2\sqrt{z(y-z)} = y^2$$

$$2\sqrt{z(y-z)} = 0$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2-7x-2x^2+5x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+3x+1=0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2+5x+3} + \sqrt{2x^2+7x+1} = 2-7x$$

$$\begin{cases} y = 2x^2+2x+1 \\ z = 2-7x \end{cases}$$

$$y-y^2 = 2\sqrt{z(y-z)}$$

$$(2x^2+2x+1)(2x^2+7x+1) = 4x^6 + 4x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 1 =$$

$$y^2 - y^3 = 4y^2 - 4z^2$$

$$(4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1)(2x^2 + 7x + 1) =$$

$$y^2 - y^3 + (2z-y)^2 = 0$$

$$= 8x^6 + 8x^5 + 4x^4 + 16x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x^2 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 2x^2 + 2x + 1 =$$

$$y^3(y-z) + (2z-y)^2 = 0$$

$$= 8x^6 + 24x^5 + 36x^4 + 32x^3 + 18x^2 + 6x + 1$$

$$(8x^6 + 24x^5 + 36x^4 + 32x^3 + 18x^2 + 6x + 1)(2x^2 + 7x + 1) + 4(-4x - 2x^2 - 2x - 1)^2 = 0$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+7x+1} = 2-7x$$

$$\begin{cases} y = 2x^2-5x+3 \\ z = 2-7x \end{cases}$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{y-z} = z$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 20 \\ \hline 820 \end{array}$$

$$y + y - z - 2\sqrt{y(y-z)} = z^2$$

$$z^4z^3 + z^2 - 4y^2 = 0$$

$$2y - z^2 - z = 2\sqrt{y(y-z)}$$

$$z^2 + z + (1-y)z = 0$$

$$\begin{array}{r} 820 \\ \times 225 \\ \hline 1820 \end{array}$$

$$4y^2 + z^2 - 4yz + yz + z^2 = y^2 - 4yz$$

$$4 + 4y^2 - 28x + 2 - 7x + 1 - 7x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$41x^2 - 15x - 5 = 0$$

$$D = 225 + 820 - 1045$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

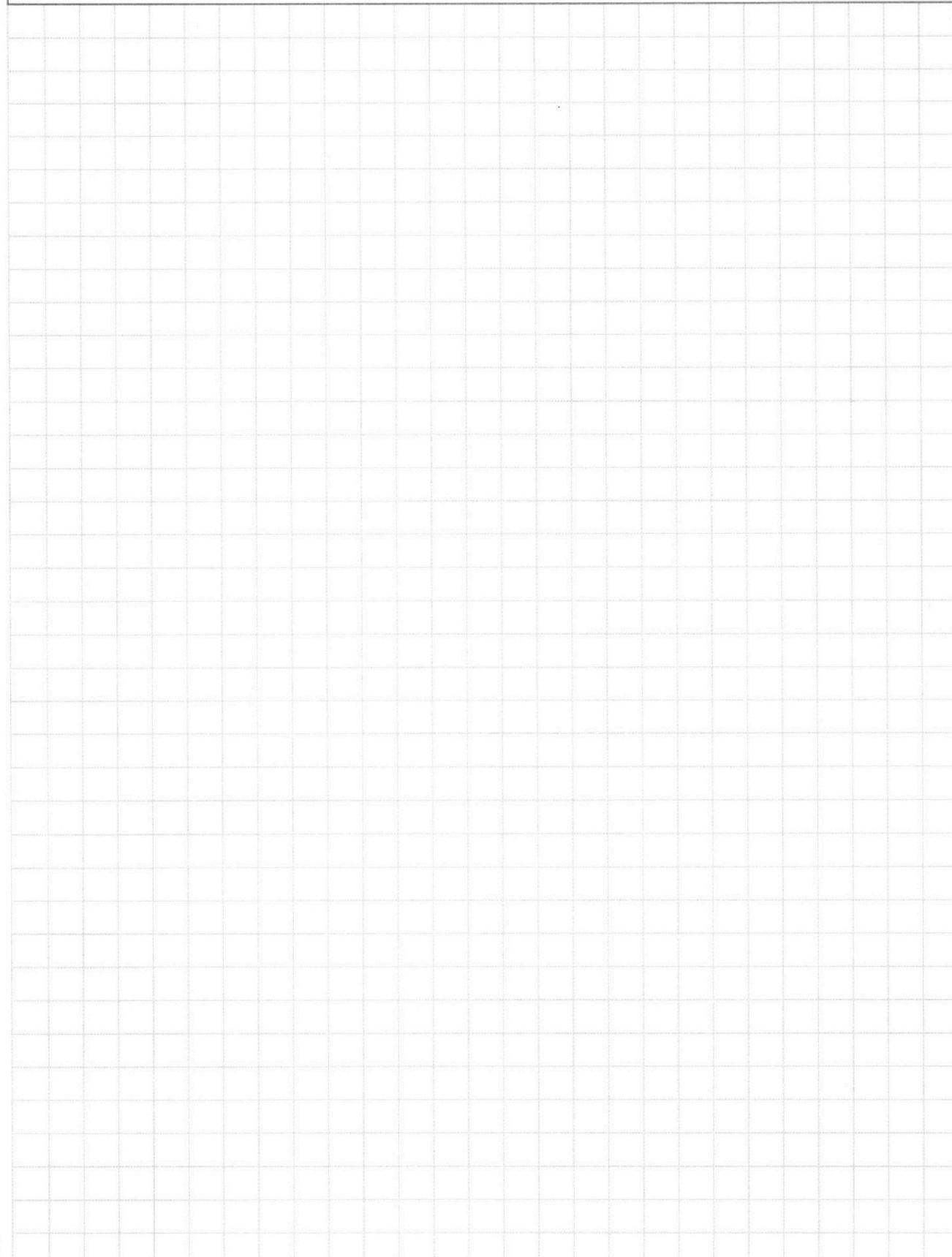
5

6

7

 МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

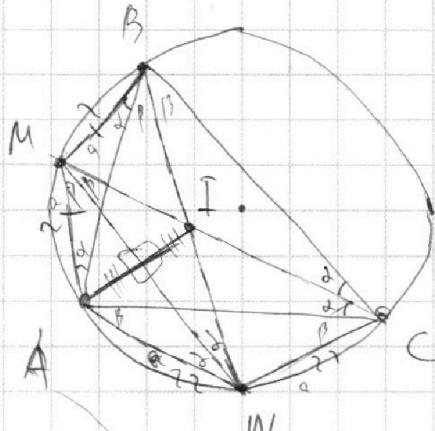
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



чертёжник

AI - ?

$$S = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha}$$

$$c = \frac{a \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2ac \sin \alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{a^2 - 2ac \sin \alpha \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2ac \sin \alpha / a \cdot h_1}{\sin 2\alpha}$$

$$as \in \alpha = h_1 \\ bs \in \beta = h_2$$

$$AI = 2as \in \alpha$$

$$AI^2 = 4h_1 h_2 = 8 \cdot 4,5 = 36 \Rightarrow AI = 6$$



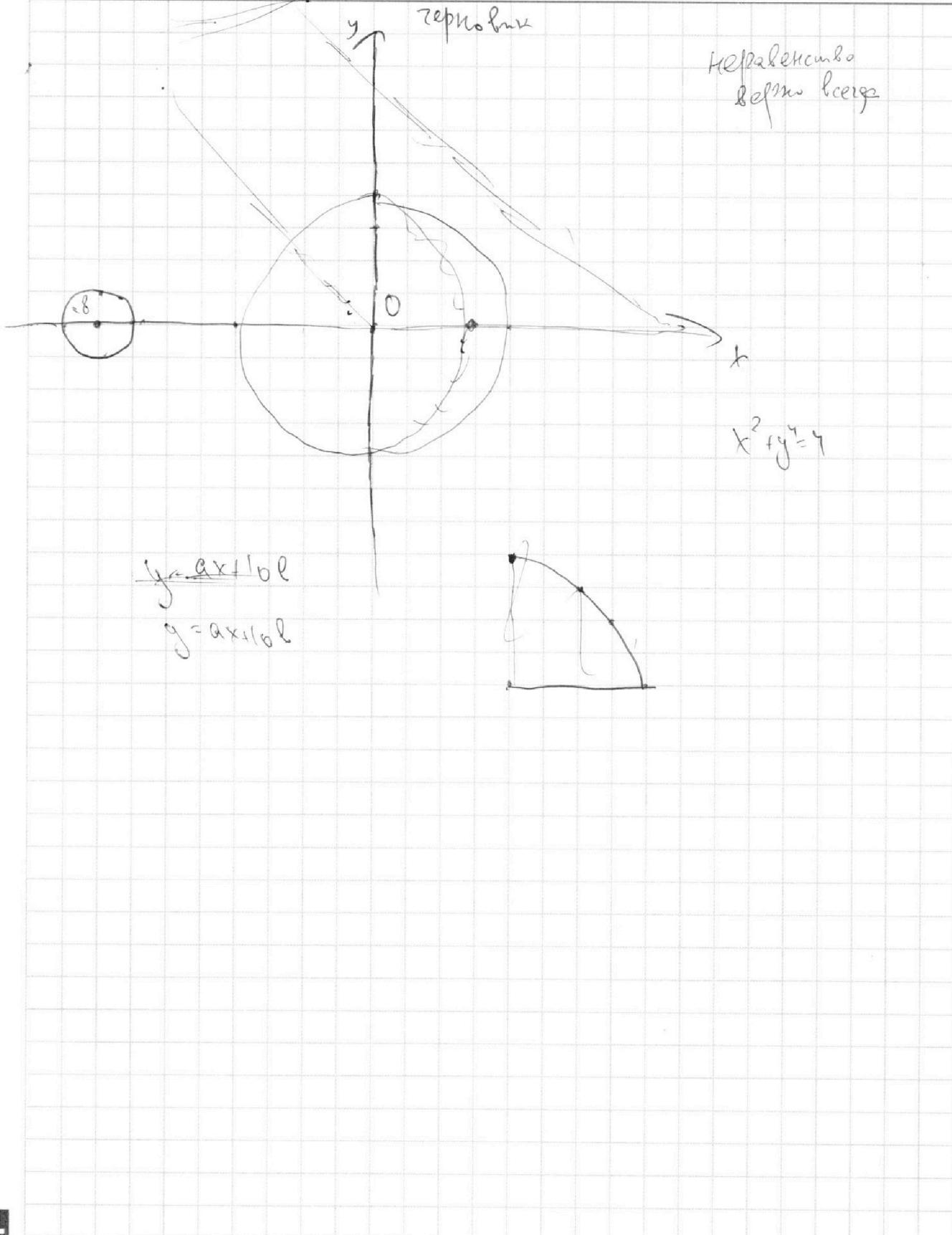
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{(2x^2 - 5x + 3) + (2 - 2x)} = 2 - 2x \quad y = 2 - 2x$$
$$\sqrt{8} - \sqrt{y+2} = y \quad z = 2x^2 - 5x + 3$$
$$z + y + z - 2\sqrt{2(y+2)} = y^2$$
$$yy^2 + 2z = 2\sqrt{2(y+2)}$$
$$yy^2 + y^2 - 2y^3 + 4yz - 4y^2 z = 4yz + 4z^2$$
$$4y^2 z = y^2 - 2y^3 + y^2$$
$$z = \frac{y^2 - 2y^3 + 1}{4}$$
$$y^2 = (y-1)^2$$
$$4(2x^2 - 5x + 3) = (2 - 2x - 1)^2$$
$$8x^2 - 20x + 12 = 144 + 48x^2 - 14x$$
$$41x^2 + 6x - 11 = 0$$
$$\Delta = 36 + 180 = 1840$$
$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{1840}}{82} = \frac{-4\sqrt{15} - 6}{82} = \frac{-2\sqrt{15} - 3}{41}$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{1840} - 6}{82} = \frac{2\sqrt{15} - 3}{41}$$
$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{61 + 22 - 341} = \sqrt{61 - 161} = \sqrt{-100} = 10i$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$8(2x-3)(x+1)^2 =$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 4 + 4x^2 - 28x \quad x_2 = \frac{3+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$45x^2 - 75x + 20\sqrt{4x^2 - 2x^2 + x + 3} = 0$$

$$2025x^4 + 625x^2 - 7250x^3 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2x-3)(x-1)$$

$$2x^2 - 2x + 1$$

$$\Delta = 4 - 8$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 50 \\ \hline 2250 \end{array}$$

$$225$$

$$(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) =$$

$$\begin{array}{r} 7250 \\ \times 27 \\ \hline 2226 \end{array} = 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x +$$

$$+ 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 55 \\ \hline 225 \\ 225 \\ \hline 2025 \\ 0,12 \quad 180 \\ 112 \quad 180 \\ \hline 0,95 \\ 2025 \end{array}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$(0,0)$$

$$2x_2 + y_2 = 12$$

$$(x_1, y_1) = \text{const}$$

$$y_2 = -2x_2 + (2x_1 + y_1 + 12)$$

$$(0,12)$$

$$(1,10)$$

$$(2,8)$$

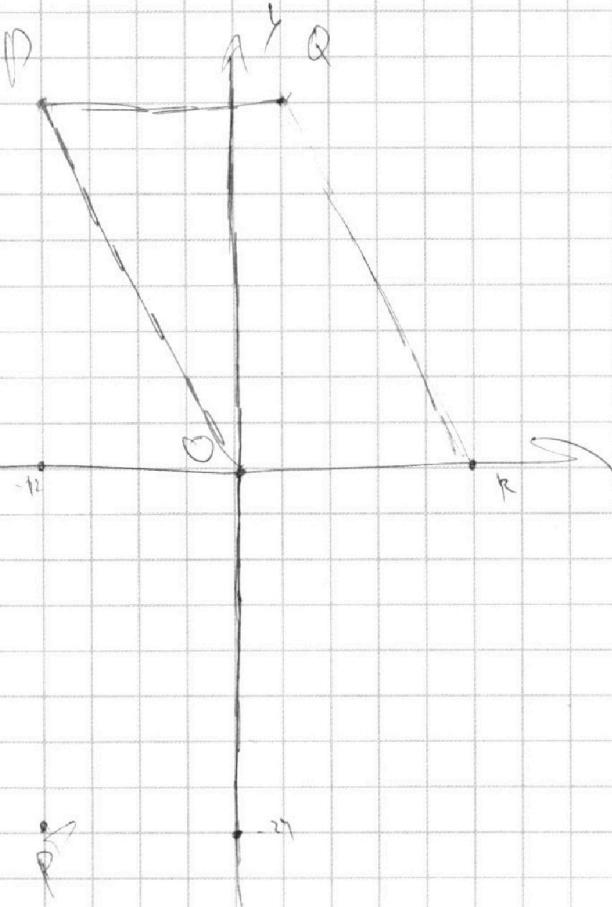
$$(3,6)$$

$$(4,4)$$

$$(5,2)$$

$$(6,0)$$

множек



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos d = \frac{1 - x^2}{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}}$$

зарисовка

$$\angle A_2 B = 360^\circ - 2d$$

$$\cos(\angle A_2 B) = \cos(360^\circ - 2d) = \cos 2d = 2 \cos^2 d - 1 = \frac{2(1 - x^2)^2}{49x^4 + 50x^2 + 1}$$
$$\rightarrow \frac{2 + 98x^4 - 28x^2 - 49x^2 - 50x^2 - 1}{49x^4 + 50x^2 + 1} = \frac{49x^4 - 78x^2 + 1}{49x^4 + 50x^2 + 1}$$

$$r_i^2 + r_2^2 - 2r_i \cdot r_2 \cos 2d = 64x^2$$

$$50 - 50 \cos 2d = 64x^2$$

$$25 - 25 \cos 2d = 32x^2$$

$$25 - \frac{25(49x^4 - 78x^2 + 1)}{49x^4 + 50x^2 + 1} = 32x^2$$

$$32 \cdot 49x^4 + 32 \cdot 50x^2 + 32x^2 + 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 78x^2 + 25 - 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 50x^2 - 25 = 0$$

$$32 \cdot 49x^4 + 32 \cdot 50x^2 + (32 - 25 \cdot 78 - 25 \cdot 50)x^2 = 0$$

$$32 \cdot 49x^4 + 32 \cdot 50x^2 + (32 - 25 \cdot 78 - 25 \cdot 50)x^2 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 + (1 - 25 \cdot 4)x^2 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 19407 = 21904$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{21904} = 148$$

$$y = \frac{148 - 50}{98} = 1$$

$$x = 1 \quad AB = 8$$

$$\begin{array}{r} x^{99} \\ \times 4 \\ \hline 396 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{15} \\ \times 396 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{3564} \\ \times 49 \\ \hline 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{3564} \\ \times 49 \\ \hline 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{3564} \\ \times 49 \\ \hline 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{3564} \\ \times 49 \\ \hline 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{3564} \\ \times 49 \\ \hline 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{3564} \\ \times 49 \\ \hline 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{3564} \\ \times 49 \\ \hline 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a, b, c \in N$

$\min abc = ?$

Черновик

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a^2bc : 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{37} mnk = 2^{51} \cdot 7^{64} mnk$$

$$bc : 2^{17} \cdot m$$

$$mc : 2^{20} \cdot 7^{37} k$$

$$c : 2^{20}$$

$$a : 2^{14}$$

$$b : 2^{17}$$

$$m=2; n=1, k=1$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} mnk = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

2) $\text{HOD}(a, b) = 1$; $a, b \in N$

$$\frac{a+b}{a^2 - b^2}$$

$$\max m \in N: \frac{a+b}{m} \in N; \frac{a^2 - b^2}{m} \in N$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\text{HOD}(8ab; (a+b))$$

$$\text{HOD}(a; a+b) = 1$$

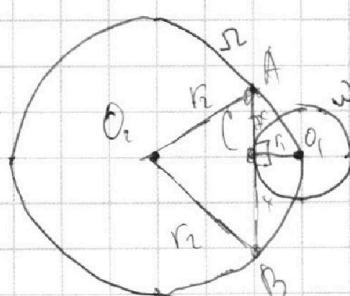
$$\text{HOD}(b; a+b) = 1$$

$$\text{HOD}(a; a+b) = 1 ; 2, 4 \text{ или } 8$$

$$m=8$$

$$2 \operatorname{сам}(a+b) : 8$$

3)



$$AC : CB = 7$$

$$AB = ?$$

$$r_1 = 1, r_2 = 5$$

$$AO_1 = \sqrt{49x^2 + r_1^2}$$

$$BO_1 = \sqrt{x^2 + r_1^2}$$

$$AO_1^2 + BO_1^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot BO_1 \cos \angle AOB = AB^2$$

$$49x^2 + r_1^2 + x^2 + r_1^2 - 2\sqrt{(49x^2 + r_1^2)(x^2 + r_1^2)} \cos \angle AOB = 64x^2$$

$$2r_1^2 - 2\cos \angle AOB \sqrt{(49x^2 + r_1^2)(x^2 + r_1^2)} = 14x^2$$

$$\angle AOB = 8^\circ - ?$$

$$1 - \cos \angle AOB \sqrt{(49x^2 + r_1^2)(x^2 + r_1^2)} = 7x^2$$

$$1 - \cos \angle AOB \sqrt{49x^2 + 50x^2 + r_1^2} = 7x^2$$