



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{14} \cdot 7^{10} m$; $b = 2^{17} \cdot 7^{17} n$; $c = 2^{20} \cdot 7^{37} k$; $m, n, k \in \mathbb{N}$. Замечу, что

если в числах m, n и k есть простые делители, отличные от 2 и 7, то можно их вычеркнуть, уменьшив числа, и все необходимые условия в результате выполняются. Таким образом, в числах m, n и k используются у простых множителей только 2 и 7 $\Rightarrow \min abc = 7^k \cdot 2^y$.

Рассмотрим оба простых делителя поочередно.

I. Рассмотрим 2. Перепишем все равенства в начале:

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{67} m^2 n^2 k^2 \Rightarrow abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{67} m^2 n^2 k^2} \Rightarrow \text{н.к. } abc \in \mathbb{N}, \text{ то } abc \vdots 2^{26}, \text{ н.к. } \sqrt{2^{51}} = 2^{25} \cdot \sqrt{2},$$

но $m, n, k \geq 1 \Rightarrow \min y = 26$. Приведу пример:

$a \rightarrow 2^9$; $b \rightarrow 2^5$; $c \rightarrow 2^{11}$ (здесь сопоставлены числа с их макс степенями 2). Можно заметить,

что $abc \vdots 2^{26}$, но $abc \not\vdots 2^{27}$ и все 3 условия выполнены $\Rightarrow y = 26$.

II. Рассмотрим 7. Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \vdots 7^3$, но $abc \not\vdots 7^{37} \Rightarrow abc \vdots 7^{37} \Rightarrow \min x = 37$.

Приведу пример:

$a \rightarrow 7^{10}$; $b \rightarrow 7^7$; $c \rightarrow 7^{20}$. Аналогично, все условия выполнены $\Rightarrow \min x = 37 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a; a+b) = 1$ и

$\text{НОД}(b; a+b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(ab; a+b) = 1$. Теперь преобразуем начальное выражение:

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}. \text{ Заметим, что } \text{НОД}(a+b; (a+b)^2 - 8ab) = \text{НОД}(a+b; 8ab). \text{ Но}$$

$\text{НОД}(a+b; ab) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; 8ab) > 1$ если $\text{НОД}(a+b; 8) > 1$. Но $\max \text{НОД}(a+b; 8) = 8$.

Таким образом, $\max m \in \mathbb{N} = 8$. Этот случай достигается, если $(a+b) \div 8$. Приведу

пример, в котором это выполняется:

$$a=1; b=7 \Rightarrow \frac{1+7}{1-6 \cdot 7 \cdot 1+7^2} = \frac{8}{8} \Rightarrow m=8.$$

П.е. было доказано, что $m \leq 8$ и приведён пример на $m=8$.

Ответ: 8

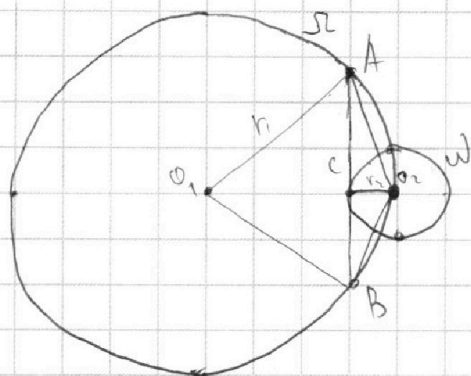
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$r_1 = 5$$

$$r_2 = 1$$

AB - касат. к ω

$$AC:CB = 7$$

$$AB = ?$$

Решение:

1) Введём обозначения: O_1 - центр Ω_1 ; O_2 - центр ω ; r_1 и r_2 - их радиусы соответственно.

2) AB - касательная к $\omega \Rightarrow O_2C \perp AB$.

3) Пусть $BC = x \Rightarrow AC = 7x$. По теореме Пифагора для ΔACO_2 : $AO_2^2 = AC^2 + CO_2^2$; для ΔBCO_2 :

$$BO_2^2 = BC^2 + CO_2^2 \Rightarrow AO_2^2 = 49x^2 + r_2^2; BO_2^2 = x^2 + r_2^2 \Rightarrow AO_2 = \sqrt{49x^2 + r_2^2}; BO_2 = \sqrt{x^2 + r_2^2}$$

4) По теореме cos для ΔAO_2B :

$$AO_2^2 + BO_2^2 - 2 \cdot AO_2 \cdot BO_2 \cdot \cos \angle AO_2B = AB^2. \text{ Пусть } \angle AO_2B = \alpha =$$

$$\Rightarrow 49x^2 + r_2^2 + x^2 + r_2^2 - 2 \sqrt{(49x^2 + r_2^2)(x^2 + r_2^2)} \cos \alpha = 64x^2$$

$$2r_2^2 - 2\sqrt{49x^2 + 50x^2 + r_2^2} \cos \alpha = 14x^2. \quad | :2$$

$$\uparrow \text{ к. } r_2 = 1$$

$$1 - \sqrt{49x^2 + 50x^2 + 1} \cos \alpha = 7x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - 7x^2}{\sqrt{49x^2 + 50x^2 + 1}}$$

Продолжение см. на обороте

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \angle A O_2 B = \frac{\angle A B}{2}; \angle A O_1 B = \angle A O_2 B, \text{ но } \angle A B + \angle A O_2 B = 360^\circ \Rightarrow \angle A O_1 B = 360^\circ - 2\angle A O_2 B = 360^\circ - 2\alpha.$$

$$6) \cos \angle A O_1 B = \cos(360^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2 - (1 - 7x^2)^2}{49x^4 + 50x^2 + 1} - 1 = \frac{2 + 98x^4 - 28x^2}{49x^4 + 50x^2 + 1} - 1 = \frac{98x^4 - 28x^2 + 1}{49x^4 + 50x^2 + 1}$$

7) По теореме кос для $\triangle A O_1 B$:

$$A O_1^2 + B O_1^2 - 2 \cdot A O_1 \cdot B O_1 \cdot \cos \angle A O_1 B = A B^2. \text{ Так } A O_1 = B O_1 = r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2r_1^2 - 2r_1^2 \cos 2\alpha = 64r^2$$

$$r_1^2 - r_1^2 \cos 2\alpha = 64r^2. \text{ По условию } r_1 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 - 25(99x^4 - 28x^2 + 1)}{49x^4 + 50x^2 + 1} = 64x^2$$

$$64 \cdot 49x^6 + 64 \cdot 50x^4 + 64x^2 + 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 78x^2 + 25 - 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 50x^2 - 25 = 0$$

$$32 \cdot 49x^6 + 32 \cdot 50x^4 + (32 - 25 \cdot 78 - 25 \cdot 50)x^2 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\text{Пусть } y = x^2 \Rightarrow y \geq 0.$$

$$49y^2 + 50y - 99 = 0$$

$$D = 21504$$

$$\sqrt{D} = 148$$

$$y_1 = \frac{-148 - 50}{98} < 0 \text{ - не подходит}$$

$$y_2 = \frac{148 - 50}{98} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x^2 = 1, \text{ так } x > 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)} - (2 - 2x) = 2 - 2x$$

Пусть $y = 2x^2 - 5x + 3$; $z = 2 - 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{y - z} = z$$

$$y + y - z - 2\sqrt{y(y - z)} = z^2$$

$$2y - z^2 - z = 2\sqrt{y(y - z)}$$

$$4y^2 + z^4 + z^2 - 4yz^2 - 4yz + 2z^3 = 4y^2 - 4yz$$

$$z^4 + 2z^3 + (1 - 4y)z^2 = 0$$

$$z^2(z^2 + 2z + 1 - 4y) = 0$$

$$(2 - 2x)^2(4 + 49x^2 - 28x + 4 - 14x + 1 - 8x^2 + 20x - 12) = 0$$

$$(2 - 2x)^2(4(x^2 - 22x - 3)) = 0$$

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4(x^2 - 22x - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{2} \Rightarrow \text{если } z = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$\sqrt{D} = 4\sqrt{61}$$

$$x_2 = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_3 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

Значит, что $2x^2 - 5x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$. $2x^2 + 2x + 1 > 0$ всегда.
Поэтому этот $1 < \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$. Оставшиеся корни подходят.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}; \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \right\}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

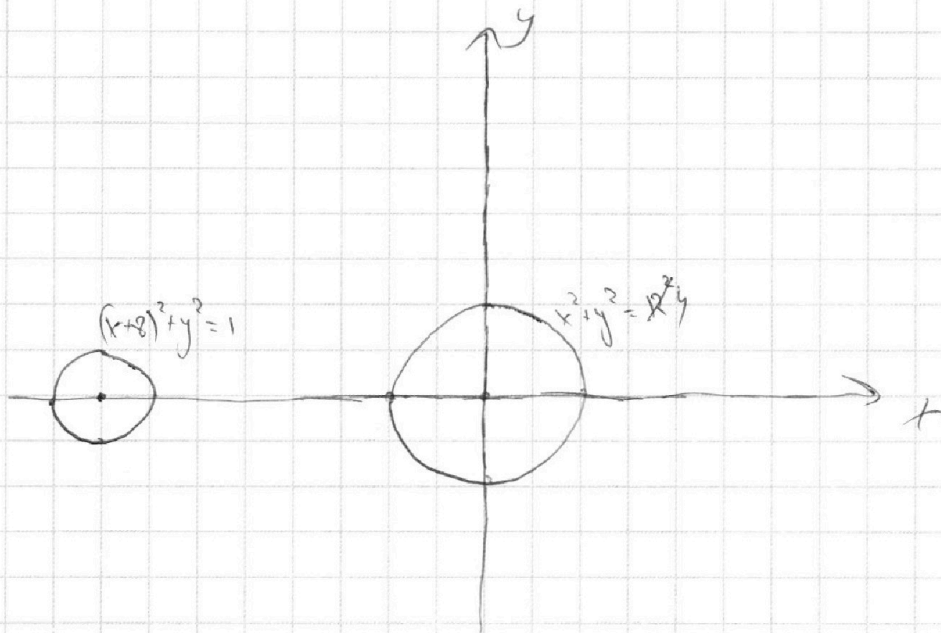
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Построим графики функций $(x+2)^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4$. Это окружности.



Заметим, что неравенство верно, когда точка лежит внутри одной окружности и вне другой. Т.к. окружности не касаются, то это верно при всех x и y . Т.е.

у неравенства $((x+2)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ бесконечно много решений, и оно всегда верно \Rightarrow на количество решений оно не повлияет. У функции $y = ax + b$ бесконечно много решений, т.к. $y = ax + b$ - прямая. Таким образом, при любых a и b данная система имеет бесконечно много решений, т.е. 2 решения не будет ни при каких a .

Ответ: \emptyset .

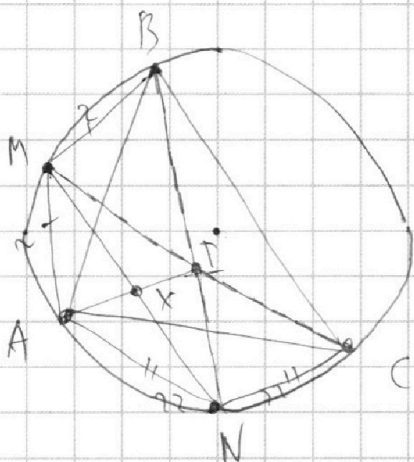
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$\overset{\smile}{AM} = \overset{\smile}{MB}, \overset{\smile}{AN} = \overset{\smile}{NC}$$

$$\underline{h_1 = 7,5; h_2 = 2}$$

$AI = ?$

Решение:

1) Пусть h_1 - расстояние от M до AB - или же высота из M ΔAMB ; h_2 - аналогичная высота из N в ΔANC .

2) Пусть I - пересечение AM и BN . $\angle ABN = \frac{\overset{\smile}{AN}}{2}$, $\angle CBN = \frac{\overset{\smile}{CN}}{2}$, но $\overset{\smile}{AN} = \overset{\smile}{CN}$

$\Rightarrow \angle ABN = \angle CBN \Rightarrow BN$ - биссектриса угла $\angle ABC$. Аналогично AM - биссектриса $\angle ACB$.

Центр вписанной окр. - точка пересеч. бисс. $\Rightarrow I$ - центр впис. окр. $\Delta ABC \Rightarrow$ нам необходимо найти AI .

3) Т.к. $\overset{\smile}{AM} = \overset{\smile}{MB} \Rightarrow AM = MB = a$; Аналогично $AN = CN = b$. Пусть $\angle BCM = \angle ACM = \alpha$; $\angle ABN = \angle CBN = \beta$.

4) AMC - впис. \Rightarrow по св-ву впис. центр: $\angle MAC = \angle MCB = \alpha$. Но $\angle MCA = \angle MCB = \alpha$ (ΔMAC - р/б.). Аналогично $\angle NAC = \angle NCB = \beta$.

5) Выпишем пары равных вписанных углов, опирающихся на одну дугу:
 $\angle AMN = \angle ABN = \beta$; $\angle CMN = \angle CBN = \beta$; $\angle ANM = \angle ACM = \alpha$; $\angle MNB = \angle MCB = \alpha$.

6) По теореме синусов формуле площади для ΔABM .

$$S = \frac{a^2 \sin(180^\circ - 2\alpha)}{2} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2} \quad \text{с другой стороны: } S = \frac{AB \cdot h_1}{2}$$

СМ. продолжение

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\downarrow$$
$$a^2 \sin 2\alpha = AB \cdot h_1$$

По теореме синусов в $\triangle AMB$:

$$\frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow AB = \frac{a \sin 2\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\downarrow$$
$$a^2 \sin 2\alpha = \frac{a \sin 2\alpha \cdot h_1}{\sin \alpha} \Rightarrow a \sin \alpha = h_1$$

Аналогично из $\triangle ANC$:

$$b \sin \beta = h_2$$

7) $\triangle MAN = \triangle MIN$ по II кр. ($\angle AMN = \angle INM = \beta$; $\angle ANM = \angle INM = \alpha$; MN - общ.) $\Rightarrow AM = IN$;

$AN = IN \Rightarrow AMIN$ - ромб $\Rightarrow AI \perp MN$ и $AX = IX$.

8) По теореме синусов в $\triangle MAX$:

$$\frac{AX}{\sin \beta} = \frac{AM}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AX = a \sin \beta$$

Аналогично из $\triangle NAX$:

$$\frac{AX}{\sin \alpha} = \frac{AN}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AX = b \sin \alpha$$

Из двух полученных равенств следует: $AI = 2a \sin \beta = 2b \sin \alpha \Rightarrow AI^2 = 4ab \sin \alpha \sin \beta$,

но $a \sin \alpha = h_1$; $b \sin \beta = h_2 \Rightarrow AI^2 = 4h_1 h_2 = 36 \Rightarrow AI = 6$.

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



зеркально

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+b)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = ax + 10b$$

$$((x+b)^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1)(x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4) \leq 0$$

$$\underbrace{(a^2+1)x^2 + (20ab+16)x + (100b^2+6)}_{\leq 0} \underbrace{(a^2+1)x^2 + 20abx + (100b^2-4)}_{\geq 0} \leq 0$$

$$y = (a^2+1)x^2 + 20abx + (100b^2-4)$$

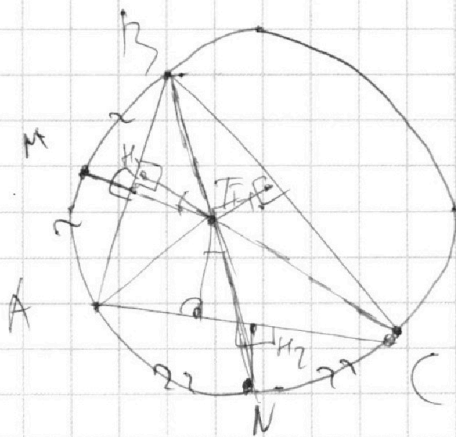
$$y(y+16x+62) \leq 0$$

$$D = (20ab+16)^2 - 4(a^2+1)(100b^2+6) = 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 4a^2b^2 - 252a^2 - 400b^2 - 252 = 640ab - 252a^2 - 400b^2 + 256$$

$$M_1 = 9,5$$

$$M_2 = 2$$

AI - ?



CM и BN — бисс. медиан
I — их точка перес.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

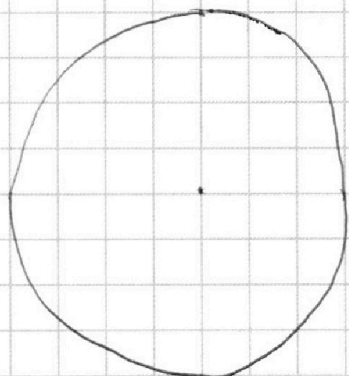


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Зеркальные

min abc - ?



$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ км}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \text{ км}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \text{ км}$$

$$abc = 2^{51} \cdot 7^{64} \text{ км}^3$$

$$2^{20} \cdot 7^{37} - ?$$

$$\begin{array}{l}
 a \rightarrow 7^{10} \\
 b \rightarrow 2^{14} \\
 c \rightarrow 2^{17}
 \end{array}$$

$$b = 1$$

конкретно 26 чисел
a+c → 20

х, у, z - числами 2
 $x+y \geq 14$
 $y+z \geq 17$

$$\begin{array}{l}
 a = 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ км} \\
 c = 2^{17} \cdot 7^{17} \text{ км} \\
 ac = 2^{31} \cdot 7^{27} \text{ км}^2
 \end{array}$$

$y \rightarrow 2^9$
 $b \rightarrow 2^5$
 $c \rightarrow 2^2$

$$\begin{array}{l}
 a = 2^9 \cdot 7^{10} \\
 b = 2^5 \\
 c = 2^{12} \cdot 7^{27} \\
 abc = 2^{26} \cdot 7^{37}
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{z} - \sqrt{y-z} = y$$

черновик

$$z + y - z - 2\sqrt{z(y-z)} = y^2$$

$$2\sqrt{z(y-z)} = 0$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2 - 7x - 2x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 2x + 1 \\ z = 2 - 2x \end{cases}$$

$$\sqrt{y-z} - \sqrt{y} = z$$

$$y - y^2 = 2\sqrt{z(y-z)}$$

$$y^2 - 2y^3 + y^2 = 4yz - 4z^2$$

$$y^2 - 2y^3 + (2z - y)^2 = 0$$

$$y^3(y-z) + (2z-y)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1) &= 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + \\ &+ 4x^3 + 4x^2 + 2x + 2x^2 + 2x + 1 = \\ &= 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1)(2x^2 + 2x + 1) &= \\ = 8x^6 + 8x^5 + 4x^4 + 16x^5 + 16x^4 + 8x^3 + \\ + 16x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 2x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

$$(8x^6 + 24x^5 + 36x^4 + 32x^3 + 18x^2 + 6x + 1)(2x^2 + 2x + 1) + (4 - 4x - 2x^2 - 2x - 1)^2 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{y-z} = z$$

$$y + y - z - 2\sqrt{y(y-z)} = z^2$$

$$2y - z - z = 2\sqrt{y(y-z)}$$

$$4y^2 + 2y^2 - 4yz - 4yz + z^2 = 4y^2 - 4yz$$

$$y = 2x^2 - 5x + 3$$

$$z = 2 - 7x$$

$$2x^2 + 2x + 1 = y - z$$

$$\begin{array}{r} 1045 \mid 9 \\ 115 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 20 \\ \hline 820 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 820 \\ + 225 \\ \hline 1045 \end{array}$$

$$z^4 z^3 + z^2 - 4yz^2 = 0$$

$$z^2 + z + (1-y)z = 0$$

$$4 + 49x^2 - 28x + 2 - 7x + 1 - 8x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$41x^2 - 15x - 5 = 0$$

$$D = 225 + 820 = 1045$$



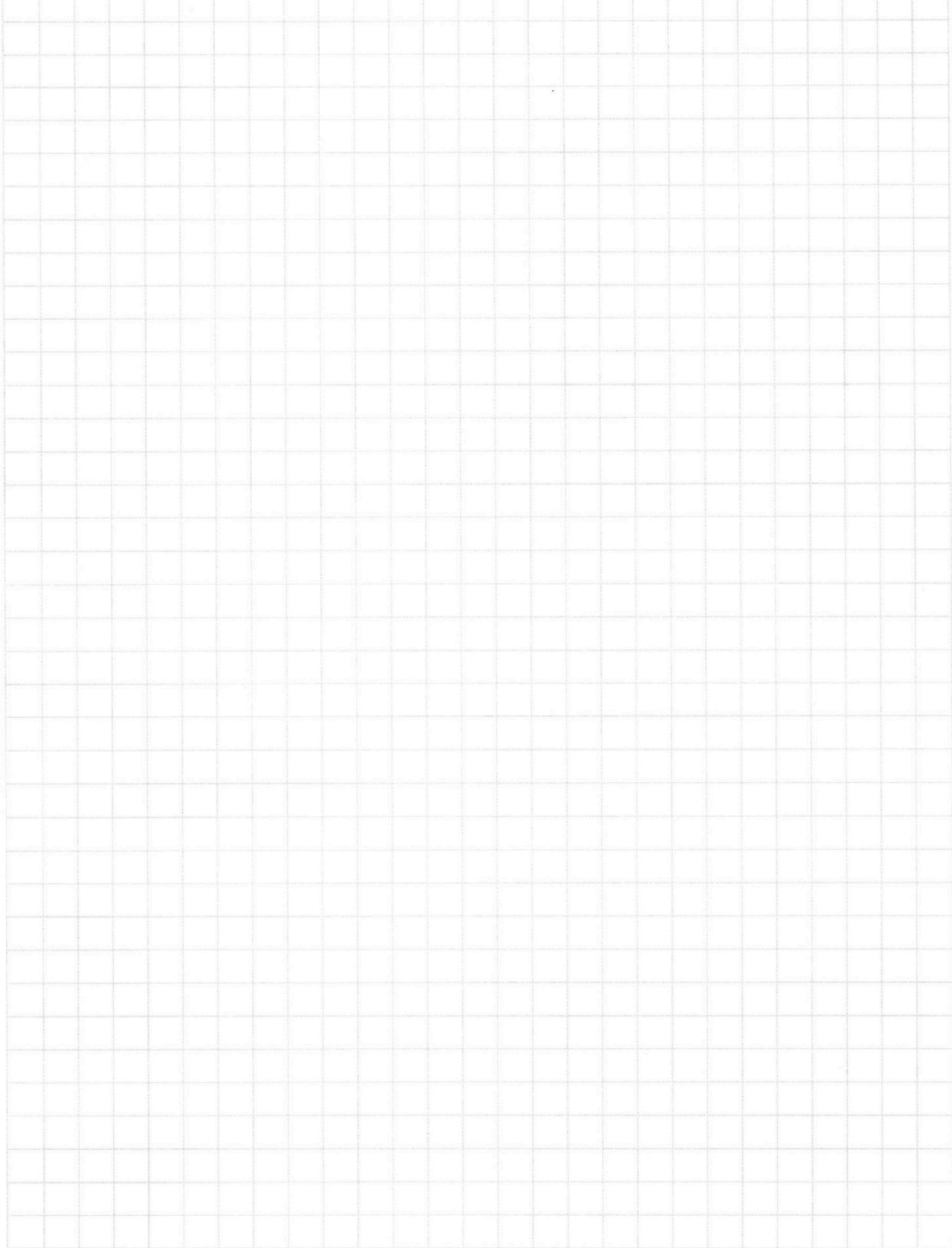
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

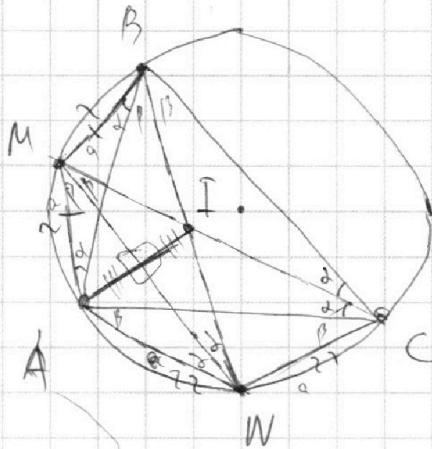
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик



AI - ?

$$S = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{ah}{2}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{a \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2a \cos \alpha$$

$$\frac{a \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\gamma} = \frac{2 \cos \alpha \cdot a \cdot h}{\gamma}$$

$$a \sin \alpha = h_1$$

$$b \sin \beta = h_2$$

$$\frac{AI}{2} = \frac{a}{\sin 90^\circ}$$

$$AI = 2a \sin \beta$$

$$AI = 2b \sin \alpha$$

$$AI^2 = 4h_1 h_2 = 8 \cdot 4,5 = 36 \Rightarrow AI = 6$$

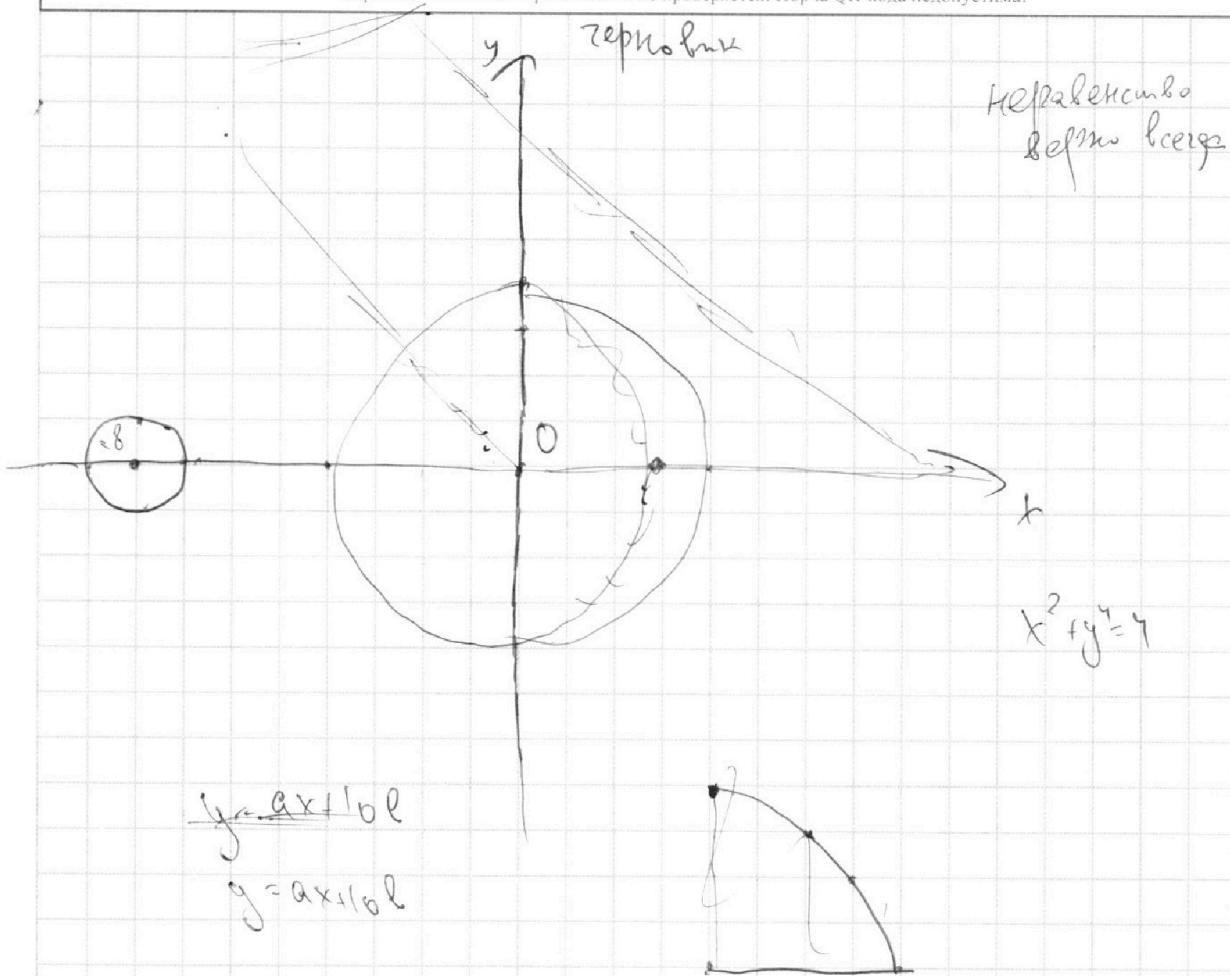
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{(2x^2 - 5x + 3) + (2 - 2x)} = 2 - 2x$$

$$y = 2 - 2x$$

$$z = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{z} - \sqrt{y + z} = y$$

$$z + y + z - 2\sqrt{z(y+z)} = y^2$$

$$y - y^2 + 2z = 2\sqrt{z(y+z)}$$

$$y^2 + y^4 + 4z^2 - 2y^3 + 4yz - 4y^2z = 4yz + 4z^2$$

$$4y^2z = y^4 - 2y^3 + y^2$$

$$z = \frac{y^2 - 2y + 1}{4}$$

$$4z = (y-1)^2$$

$$4(2x^2 - 5x + 3) = (2 - 2x - 1)^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 1 + 49x^2 - 14x$$

$$41x^2 + 6x - 11 = 0$$

$$D = 36 + 1804 = 1840$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{1840}}{82} = \frac{-4\sqrt{115} - 6}{82} = \frac{-2\sqrt{115} - 3}{41}$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{1840}}{82} = \frac{-2\sqrt{115} + 3}{41}$$

$$\frac{2\sqrt{61} + 11}{41} > \frac{3}{2}$$

$$\frac{4\sqrt{61} + 22 - 3 \cdot 41}{82} < 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x < 1 \text{ или } x > \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 4 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 412 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$(1-2x)^2$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 41 \\ \hline 44 \\ 176 \\ \hline 1804 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ + 484 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \\ 244 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1840 \\ - 400 \\ \hline 1440 \\ - 115 \\ \hline 1225 \\ 33 \\ \hline 1258 \end{array}$$

$$\sqrt{61} = 101$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos d = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}} \quad \text{черновик}$$

$$\angle A_2 B = 360^\circ - 2d$$

$$\cos \angle A_2 B = \cos(360^\circ - 2d) = \cos 2d = 2\cos^2 d - 1 = \frac{2(1 - 2x^2)^2}{49x^4 + 50x^2 + 1} - 1 =$$

$$= \frac{2 + 98x^4 - 28x^2 - 49x^4 - 50x^2 - 1}{49x^4 + 50x^2 + 1} = \frac{49x^4 - 78x^2 + 1}{49x^4 + 50x^2 + 1}$$

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2d = 64x^2$$

$$50 - 50 \cos 2d = 64x^2$$

$$25 - 25 \cos 2d = 32x^2$$

$$25 - \frac{25(49x^4 - 78x^2 + 1)}{49x^4 + 50x^2 + 1} = 32x^2$$

$$32 \cdot 49x^4 + 32 \cdot 50x^2 + 32x^2 + 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 78x^2 + 25 - 25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 50x^2 - 25 = 0$$

$$32 \cdot 49x^4 + 82 \cdot 50x^2 + 32 \cdot 50x^2 + (32 - 25 \cdot 78 - 25 \cdot 50)x^2 = 0$$

$$32 \cdot 49x^4 + 32 \cdot 50x^2 + (32 - 25 \cdot 28)x^2 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 + (1 - 25 \cdot 4)x^2 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$y = x^2$$

$$49y^2 + 50y - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 19404 = 21904$$

$$\sqrt{D} = 148$$

$$y = \frac{148 - 50}{98} = 1 \Rightarrow$$

$$x = 1 \Rightarrow AB = 8$$

Handwritten calculations on the right side of the page:

$$\begin{array}{r} 21904 \\ 5426 \\ \hline 16478 \\ 1389 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 396 \\ 396 \\ \hline 792 \\ 396 \\ \hline 1188 \\ 396 \\ \hline 1584 \\ 396 \\ \hline 1980 \\ 396 \\ \hline 2376 \\ 396 \\ \hline 2772 \\ 396 \\ \hline 3168 \\ 396 \\ \hline 3564 \end{array}$$

