



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

1. По условию:

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

2. Найдите наименьшее возможное значение произведения

abc :

$$\underbrace{abc}_{: 2^{14} \cdot 7^{10}} = \frac{2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

(т.к. abc)

Ответ: $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$
(наим)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$. $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ (*)

При каком наиб m числитель и знаменатель (*) $\div m$:

Решение:

1. $\frac{a}{b}$ - несократима.

$$2. \quad a^2 - 6ab + b^2 = a^2 - 4ab - 2ab + b^2 = (a-b)^2 - 2ab.$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = a^2 + 2ab - 8ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab.$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq ab$$

$$a+b \leq 2ab.$$

Берём наименьшее, $\Rightarrow a+b = 2ab$
 $(a+b)^2 = 4a^2b^2$.

$$(a+b)^2 \leq 4a^2b^2$$

$$\Rightarrow \text{дробь примет вид: } \frac{2ab}{4a^2b^2-8ab} = \frac{\frac{1}{2}ab}{2ab(ab-2)} = \frac{1}{2(ab-2)}$$

\Rightarrow для сокращения $m_{\text{наиб}} = 1$

Ответ: $m = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

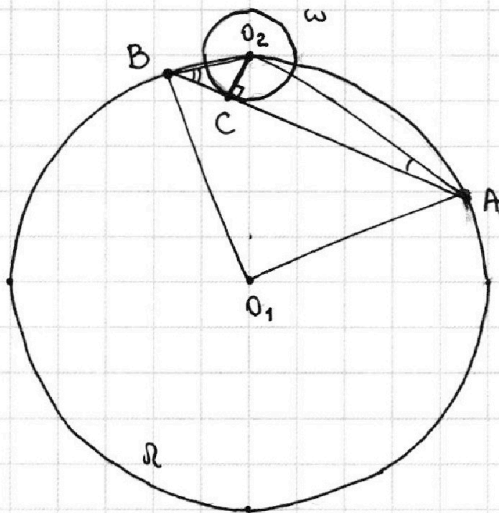
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



Дано: Дкр. Ω ($O_1; R$)
Дкр. ω . ($O_2; r$).
 $R = 5; r = 1$.
 $O_2C \perp AB$. (AB - касат.
к (окр) Дкр. ($O_2; r$)).
 $AC: CB = 7$.
Найти: AB - ?

Решение:

1. $\frac{AC}{CB} = 7, \Rightarrow AC = 7CB$. Пусть $CB = x, \Rightarrow AC = 7x$.

2. $O_2C \perp AB$ - как радиус, проведенный в точку касания.

3. $O_2C \perp AB, \Rightarrow \angle O_2CB = \angle O_2CA = 90^\circ$.

4. Рассмотрим $\triangle BCO_2$ - и/у ($\angle BCO_2 = 90^\circ$):

По т. Пифагора: $BO_2 = \sqrt{BC^2 + O_2C^2} = \sqrt{BC^2 + r^2} = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\sin \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BO_2} = \frac{r}{BO_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

5. Рассмотрим $\triangle ACO_2$ - и/у ($\angle O_2CA = 90^\circ$):

По т. Пифагора: $AO_2 = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 49x^2}$

$$\sin \angle O_2AC = \frac{O_2C}{AO_2} = \frac{r}{AO_2} = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

6. $\triangle ABO_2$ - вписанный \triangle (из условия): в Дкр Ω :

\Rightarrow По т. Синусов: $\frac{AO_2}{\sin \angle O_2BC} = \frac{BO_2}{\sin \angle O_2AB} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{\sin \angle O_2BC} = 2 \cdot 5 \quad | \cdot 2$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

Очевидно, что $x = 1$ - корень ($49 + 50 - 99 = 0$ (в)).

Проверим, есть ли у ур-я другие корни:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\begin{array}{r} 49x^4 + 50x^2 - 99 \\ - 49x^4 - 49x^3 \\ \hline 49x^3 + 50x^2 - 99 \\ - 49x^3 - 49x^2 \\ \hline 99x^2 - 99 \\ - 99x^2 - 99x \\ \hline 99x - 99 \\ - 99x - 99 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-1 \\ \hline 49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 \end{array}$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = (x-1)(49x^3 + 49x^2 + 99x + 99)$$

Очевидно, что для второй скобки не существует положительных x , при которых она бы обращалась в ноль.

$$\Rightarrow x = 1. \Rightarrow CB = 1 \Rightarrow AC = 7.$$

$$7. AB = AC + CB = 7 + 1 = 8.$$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

Начальное условие: $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \text{ (1)} \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ (2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-1) - 3(x-1) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-1) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

Умножим обе части ур-е на $(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) > 0$:

$$\Rightarrow (2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(-7x + 2) - (-7x + 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

$$(-7x + 2)(1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{подходит по нач. усл.} \\ 1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad (3) \end{cases}$$

Выйдем из совокупности:

$$(3) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad |^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = 0$$

$$2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = -4x^2 + 3x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = (-4x^2 + 3x - 3)^2 \quad (4) \\ -4x^2 + 3x - 3 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 \leq 0 \\ \Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 9 - 48 = -41 < 0, \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Выйдем из системы

$$(4): \underline{16x^4} - \underline{24x^3} - 8x^2 + 4x + 12 = \underline{16x^4} - \underline{24x^3} + 33x^2 - 18x + 9$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$\Delta = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 16 \cdot 61 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x_1 = \frac{22 + 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}; \quad x_2 = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Но! корни x_1 и x_2 не подходят, т.к.
 $4x^2 - 3x + 3 > 0$ при $\forall x \in \mathbb{R}$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

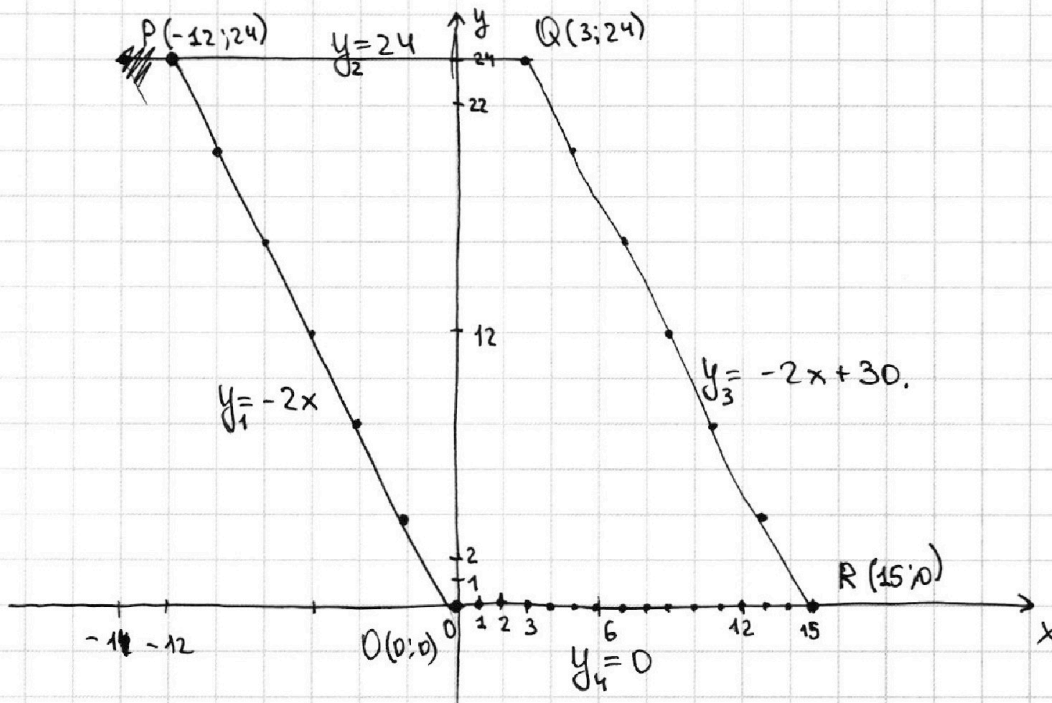
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



1. Составим ур-я сторон пар-ма:

PO: $y_1 = -2x$

OR: $y_4 = 0$

PQ: $y_2 = 24$

QR: $y_3 = -2x + 30$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \Rightarrow 24 = 3k - 15k \Rightarrow k = -2 \\ 0 = 15k + b \Rightarrow b = -15k \Rightarrow b = 30 \end{cases}$$

2. Всего точек с целыми координатами в пар-льнике.

$$N = 16 \cdot 13 + 14 \cdot 12 = 208 + 168 = 376 \text{ точек.}$$

3. Система для точек (сущ-няя пар-мма)

$$\begin{cases} y \leq 24 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x + 30 \\ y \geq -2x \end{cases}$$

4. Это условие: $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у р-е б ценорх:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 = 2 \\ y_2 - y_1 = 2 \\ x_2 - x_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 10 \\ x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = 6 \\ x_2 - x_1 = 4 \\ y_2 - y_1 = 4 \\ x_2 - x_1 = 5 \\ y_2 - y_1 = 2 \\ x_2 - x_1 = 6 \\ y_1 = y_2 \\ x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = 12 \end{array} \right.$$

кон-во нар: $\frac{376}{2} = 188$

Ответ: 188 нар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Найти все a , для каждого из которых найдётся b , при котором система имеет ровно 2 решения

Выйдем из системы:

(1) $y = ax + 10b$

Пр. - прямая
Лин. зависимость.

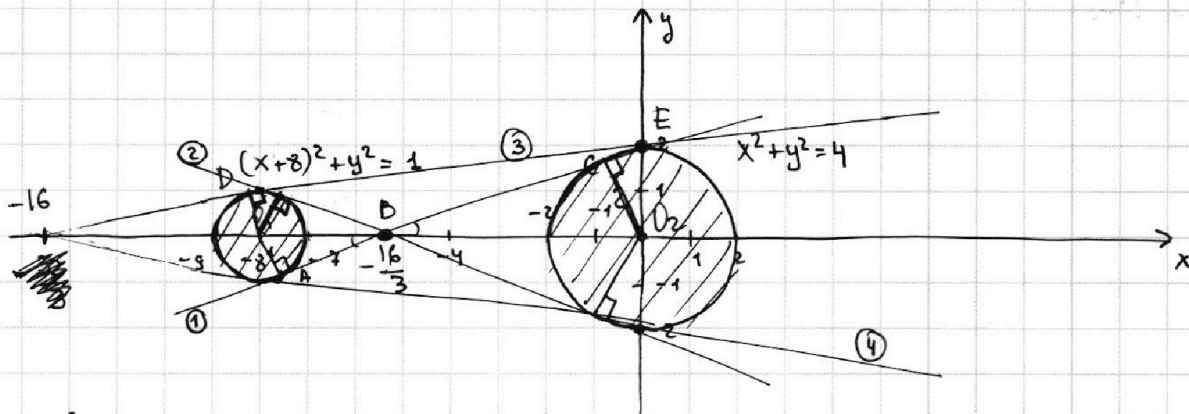
~~$ax + y - 10b = 0$~~

(2) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 & \leftarrow \text{Пр. - окружность.} \\ x^2 + y^2 \geq 4 & \leftarrow \text{Пр. - окружность.} \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \end{cases}$$

Центр $(-8; 0); R_1 = 1$
Центр $(0; 0); R_2 = 2$.

Построим графики в одной системе координат:



Система ур-ий будет иметь 2 решения, если a, b будут "относиться" к прямой 1, 2, 3, 4.

$$\triangle OAB \sim \triangle BCO_2 \Rightarrow \frac{OB}{BO_2} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow OB = \frac{8}{3}, BO_2 = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow B\left(-\frac{16}{3}; 0\right)$$

$$AB = \sqrt{OB^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow \frac{55}{9} = \left(-\frac{16}{3} - x_A\right)^2 + y_A^2$$

$$\rho(O_1; AB) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-8A + 0 + C|}{A} = 1 \Rightarrow A = |-8A + C|$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\rho(O_2; CB) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{A} = 2 \Rightarrow 2A = |C|$$

$$DE = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$$

$$y = ax + 10b$$

$$K(-16; 0); S(0; 2)$$

$$0 = -16a + 10b \Rightarrow +16a = 10b$$

$$16a = 2, \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$2 = 10b \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \text{сумм.} \quad a = -\frac{1}{8}$$

$$E\left(-\frac{16}{3}; 0\right) \quad S(0; 2)$$

$$0 = -\frac{16}{3}a + 10b \Rightarrow \frac{16}{3}a = 2 \Rightarrow a = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$2 = 10b \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$\text{сумм.т.} \quad a = -\frac{3}{8}$$

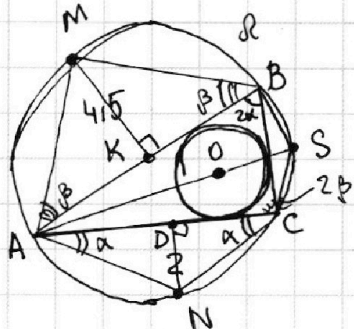
Ответ: ~~$a = \frac{1}{8}$~~ $a = \left\{ \frac{1}{8}; -\frac{1}{8}; \frac{3}{8}; -\frac{3}{8} \right\}$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7

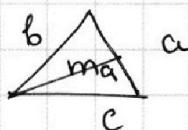


Дано: $\triangle ABC$ вписан в окруж. Ω
 M - сер. $\cup AB$. Окруж. $(O; r)$ вписана в $\triangle ABC$.
 N - сер. $\cup AC$
 $MK = 4,5$; $ND = 2$.
 Найти: AO - ?

Решение:

- M - сер. $\cup AB$, $\Rightarrow \cup AM = \cup MB \Rightarrow \angle MAB = \angle MBA$ - как впис., центр. на равные дуги, $\Rightarrow \triangle MAB$ - р/б, $\Rightarrow AM = MB$.
- N - сер. $\cup AC$, $\Rightarrow \cup AN = \cup NC$, $\Rightarrow \angle DAN = \angle DCN$ - как впис., центр. на равные дуги, $\Rightarrow \triangle ANC$ - р/б, $\Rightarrow AN = NC$.
- Центр впис. в \triangle окруж. - т. пер. биссектрис.
 $\Rightarrow AO$ - биссектриса $\angle BAC$, $\Rightarrow \cup BS = \cup SC$ (т.к. $\angle BAO = \angle CAO$)
 (т.к. AO - бисс.).
- $\angle SCB = \angle SBC$ - как впис. угол, центр. на равные дуги, $\Rightarrow \triangle SBC$ - р/б, $\Rightarrow BS = SC$.
- $\triangle MAB$ - р/б, $\Rightarrow MK$ - бисс., медиана, высота.
- $\triangle NAC$ - р/б, $\Rightarrow ND$ - бисс., медиана, высота.
- Формула Медианы \triangle :

$$m = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$



Пусть $AN = NC = x$
 \Rightarrow Это т. Пер. для $\triangle ADN$:
 $AD = \sqrt{AN^2 - ND^2} = \sqrt{x^2 - 4}$

$$\Rightarrow ND = \sqrt{\frac{2x^2 + 2x^2 - (x^2 - 4)}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2.$$

8. По т. синусов $\triangle ANC$:

$$\frac{AN}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow x = \sin \alpha \cdot 2R.$$

9.



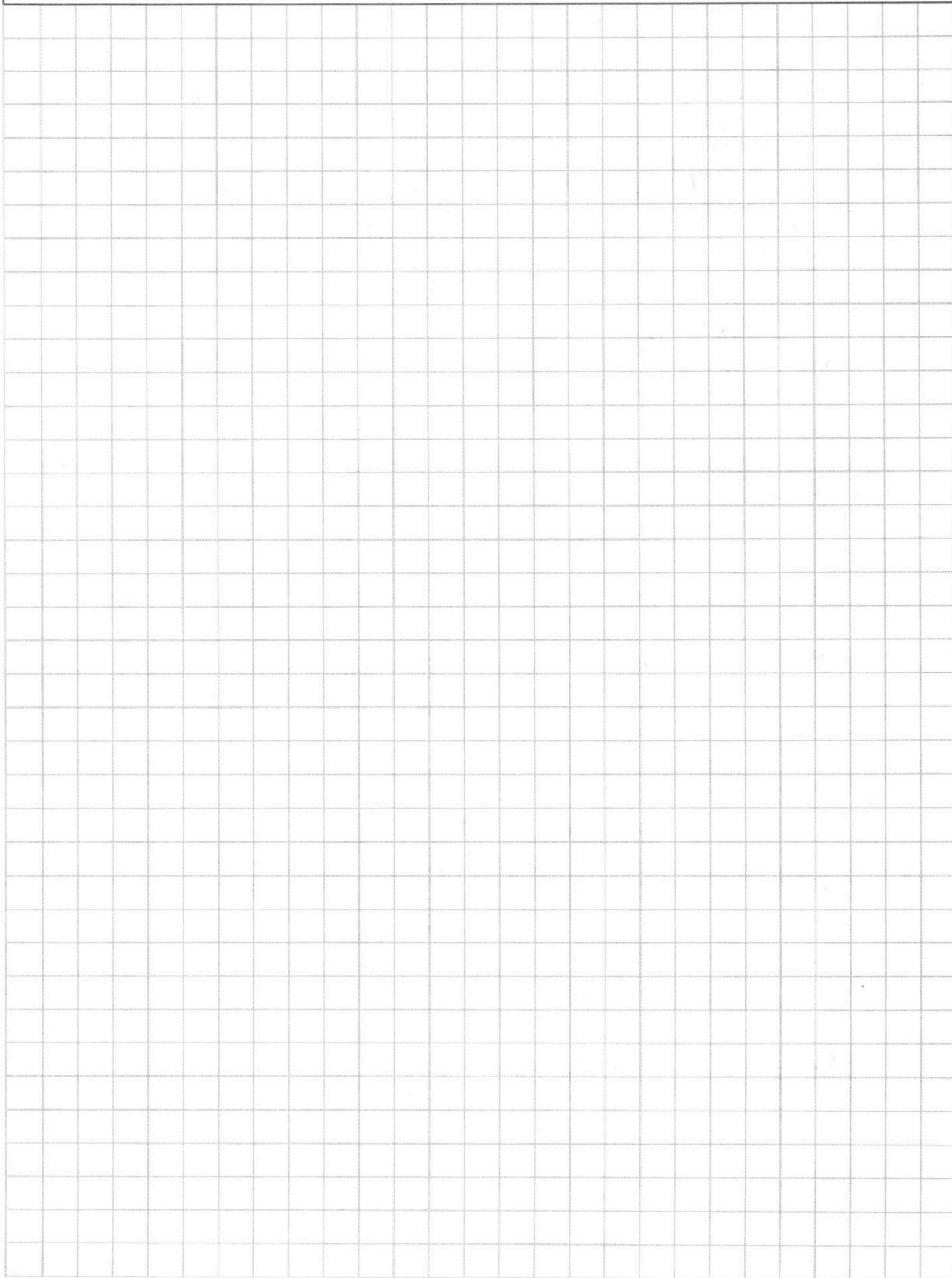
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

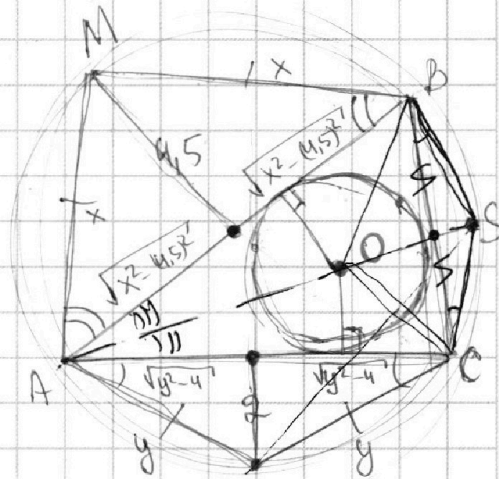
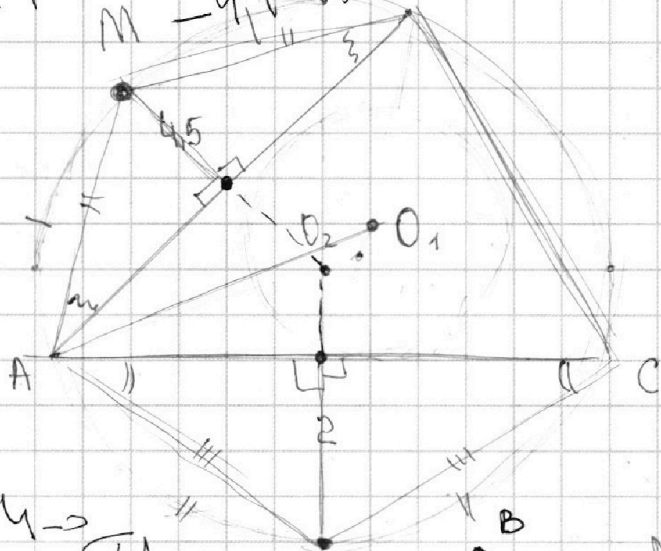
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

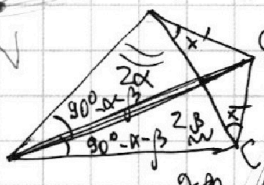
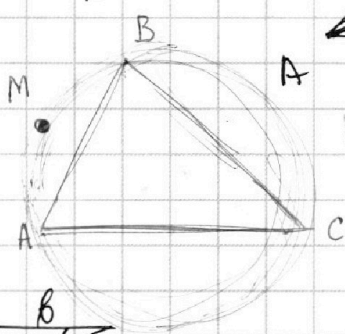
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



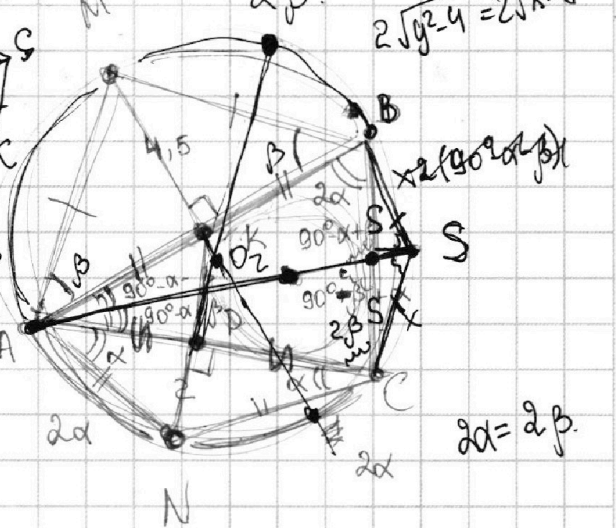
-4. 1+3 1-3
M -4. 1-2-3-3.



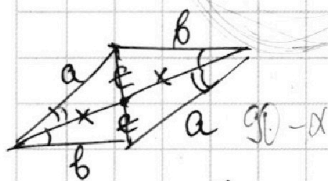
4 →
11 - 2√61
41.



$180^\circ - 2\alpha - x - 90^\circ + \alpha + \beta$
 $90^\circ - \alpha + \beta = x$



$2\sqrt{y^2 - 4} = 2\sqrt{x^2 - 4.5^2}$



$180^\circ - 2\beta =$

$MA = \sqrt{}$

$180^\circ - 2\alpha - 2\beta$

$90^\circ - \alpha - \beta$

$180^\circ - 2\alpha - 90^\circ + \alpha + \beta = \beta$

$= 90^\circ - \alpha + \beta$

$180^\circ - 2\alpha - 90^\circ + \alpha + \beta = 90^\circ - \alpha + \beta$

$180^\circ - 90^\circ + \alpha + \beta - 2\beta = 90^\circ + \beta + \alpha$

$360^\circ - 4\alpha - 4\beta$

$180^\circ - 2\alpha - 2\beta =$

$90^\circ - \alpha - \beta$

$CA = 4\alpha + 4(90^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ$

$=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

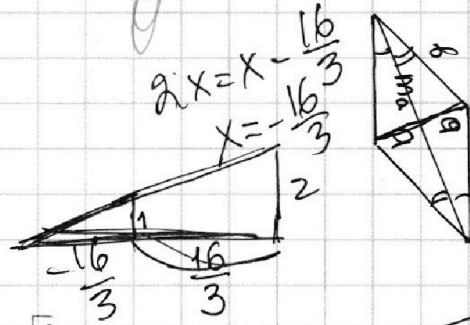
ровно 2 решения - ?

(1) ~~y = ax + 10b~~ y = ax + 10b
 (2) ~~((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0~~

~~((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0~~

$\sqrt{6}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{x^2 + \frac{16}{3}}$

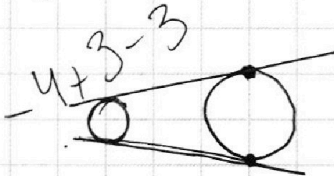
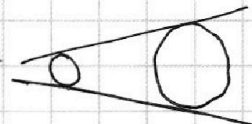


$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

(1) y = ax + 10b

(2) $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$



$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

$-8A + C > 0$

$\rho(-8, 0) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-8A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$\rho(-8, 0) = \frac{|-8A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$2 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$\frac{|-8A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$\begin{cases} -8A + C = \pm \sqrt{A^2 + B^2} \\ -8A + 2C = \pm \sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}$

$y = ax + b$
 $y - ax - b = 0$
 $y - ax - 16a = 0$

$1 = \frac{24a}{a}$

$0 = -16k + b$
 $y = kx + b$
 $b = 16ka$

$1 = \frac{|-8 \cdot (-a) - 16a|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-8a - 16a|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{24a}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$\rho(0, k) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$2 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

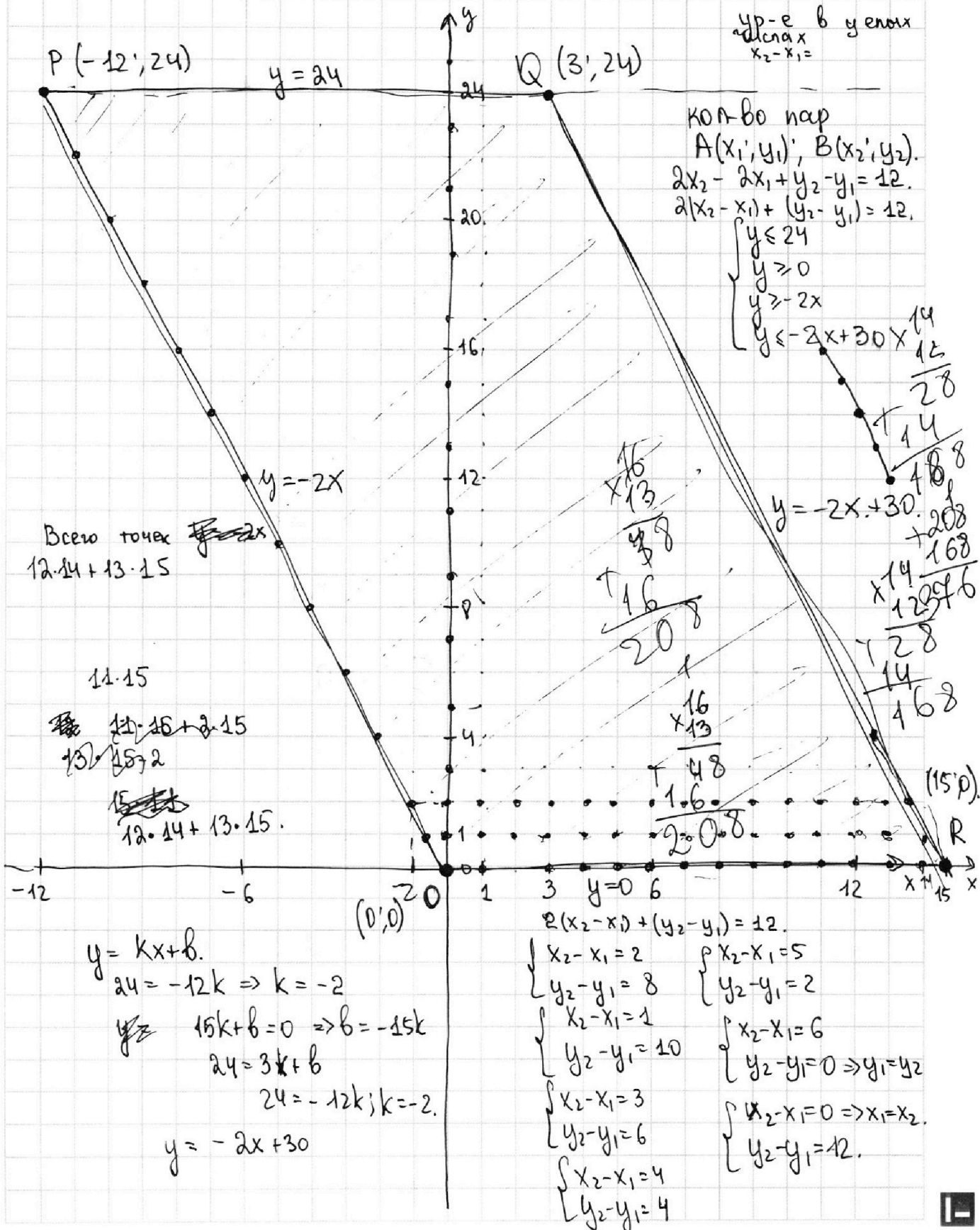
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\
 bc &: 2^{14} \cdot 7^{17} \\
 ac &: 2^{20} \cdot 7^{37}
 \end{aligned}
 \quad (abc)_{\text{наим}} = ?$$

abc ~~abc : 2^{14} \cdot 7^{10}~~

~~ab : 2^{14} \cdot 7^{10}~~ ~~abc :~~ abc : 2^{20} \cdot 7^{37}

$$\begin{aligned}
 ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \\
 ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} \\
 \frac{b}{c} &= \frac{1}{2^6 \cdot 7^{27}}
 \end{aligned}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{27} \cdot c$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow x \wedge y \vee z \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\
 & \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\
 & \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\
 & \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\
 & \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)
 \end{aligned}$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{\dots} = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$0 = (\dots) \cdot (x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$0 = \dots \cdot (x - \frac{1}{2}) - x - 2$$

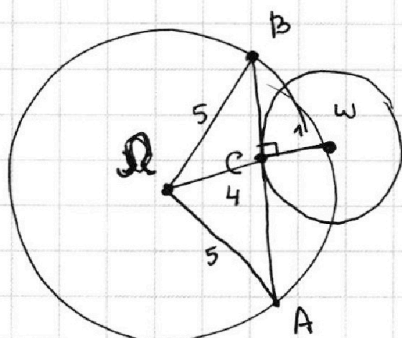
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

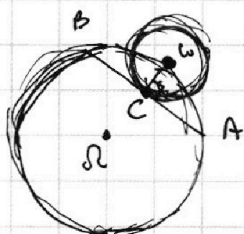


AC: CB = 4

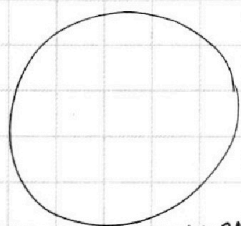
$$\frac{AC}{CB} = 4 \Rightarrow AC = 4CB.$$

$R_w = 1; R_O = 5.$

$$49x^2 + 49x^2 + 99x + 99 = 0.$$



19404



21904.

$$\begin{array}{r} 1 \cdot \\ \times 42 \\ \times 42 \\ \hline 168 \\ \times 4 \\ \hline 672 \end{array}$$

$AB = 8$
 $BW = \sqrt{1 + x^2}$
 $AW = \sqrt{49x^2 + 1}$
 $BO = OA = 5$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$$

$x = 1$

$$\begin{array}{r} 49x^4 + 50x^2 - 99 \quad | \quad x-1 \\ -49x^4 - 49x^3 \\ \hline 49x^3 + 50x^2 - 99 \\ -49x^3 - 49x^2 \\ \hline 99x^2 - 99 \\ -99x^2 - 99x \\ \hline 99x - 99 \end{array}$$

$$\sqrt{49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1} = 10.$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^2(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = 100$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100.$$

$$\begin{aligned} \Omega &= 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49 = \\ &= 2500 + 396 \cdot 49 = \end{aligned}$$

По т. косинусов:

$$AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2 \cdot BO \cdot OA \cdot \cos \angle BOA.$$

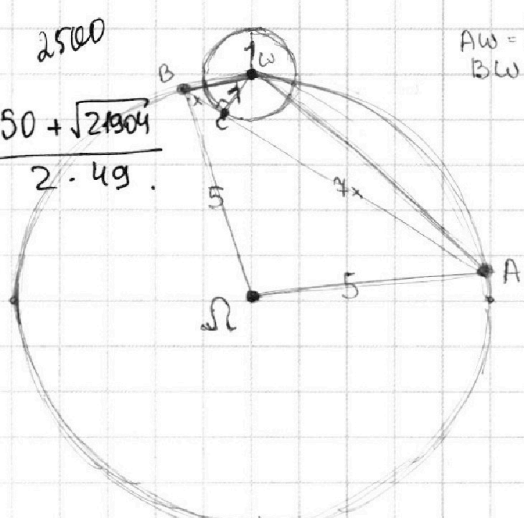
$$64x^2 = 1 + x^2 + 49x^2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} \cdot \cos \angle BOA$$

$$14x^2 = 2 - 2\sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} \cdot \cos \angle BOA$$

$$\cos \angle BOA = \frac{2 - 14x^2}{\sqrt{2(1+x^2)(49x^2+1)}}$$

$$\begin{aligned} &2500 \\ & -50 + \sqrt{21904} \\ & \hline & 2 \cdot 49. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AW &= \sqrt{49x^2 + 1} \\ BW &= \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 395 \\ \times 49 \\ \hline 73564 \\ + 1584 \\ \hline 19404 \\ + 21904 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{49x^2+1}}{(\sqrt{49x^2+1})(\sqrt{x^2+1})} = 10 \\ \sin \angle WBC &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \sin \angle WAB &= \frac{CW}{WA} = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \\ \frac{AW}{\sin \angle WBC} &= \frac{BW}{\sin \angle WAB} = 2R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \angle BWC &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \sin \angle WBC &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~AN = CN - X~~
AN = CN - X
~~AD = ...~~

$$ma = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2x^2 + 2x^2 - 4 - x^2}{4}}$$

$49x + 196 = 196$

$$49x = 0 \Rightarrow x = 0$$

1 $\times 296$
2 $\times 49$
3 $\times 99$
4 $\times 3564$
5 $\times 1584$
6 $\times 39636$
7 $\times 19404$
8 $\times 259$

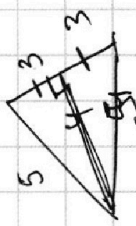
$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 =$$

$k_{мин} = (a+b+4ab)$

$k \geq a+b+4ab$
 $a+b+4ab - k \leq 0$

$(a+b)(a+b+4ab - k) \leq 0$
 $(a+b)^2 + 4ab - k(a+b) \leq 0$
 $k(a+b) \geq (a+b)^2 + 4ab$
 $k(a+b) \geq a^2 + b^2 + 2ab + 4ab$
 $k(a+b) \geq a^2 + b^2 + 6ab$
 $k(a+b) = m(a^2 + b^2 + 6ab)$



$$ma = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$



Решение б ③

$m(a+b) = mk$

не m + не m

$$\frac{(a+b)^2 + 4ab}{a+b}$$

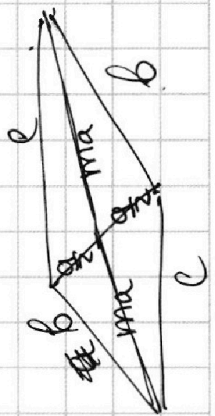
$a+b : m$
 $a^2 + b^2 + 6ab : m$
 $a^2 + 2ab + b^2 + 4ab$
 $(a+b)^2 + 4ab$

$\left. \begin{matrix} \text{не m и не m} \\ \text{не m и не m} \\ \text{не m и не m} \end{matrix} \right\} \text{не m и не m}$

$[2, 1]$; $[2, 5]$

а и b сопряжены? при каком значении

$$\frac{a^2 + b^2 + 6ab}{a+b}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle CO_2B$; $B(-\frac{16}{3}; 0)$.

$BO_2 = \frac{16}{3}$ ~~scribble~~

$BO_2 = \frac{16}{3}$; $CO_2 = 2$.

$BC = \sqrt{\frac{256}{9} + \frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{512}{9}} = \frac{\sqrt{512}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

$BC =$

$y = kx + b$
 $B(-\frac{16}{3}; 0) = -\frac{16}{3}k + b$

$= \sqrt{\frac{256}{9} + \frac{256}{9}}$

$\frac{c}{c} =$

$a = 23.720$
 $b =$
 $c = 23.720$

$\frac{16}{3}k = b$
 $ax - y + b = 0$
 $ax - y + b = 0$

$2A = |c|$

$c = \frac{16}{3}A = \frac{2 \cdot 16 |c|}{3 \cdot 8}$

$\frac{ab}{bc}$

$\frac{c}{a} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 4}{4}$
 $c = a \cdot 2 \cdot 13 \cdot 4$

$k = \frac{c}{3|c|}$

$1 = \frac{1}{A}$

$A = |-8A| + |c|$
 $A = |-8A| + 2A$
 $-A = |-8A|$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
 $= (a+b+c)^2$

$2A = |c|$
 $A = |-8A + c|$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\rho(O_1; l) = \frac{|-8a - 10b|}{a} = 1$$

$$\rho(O_2; l) = \frac{|-10b|}{a} = 2$$

$$|-8a - 10b| = a$$

$$10b = 2a$$

$$b = \frac{1}{5}a$$

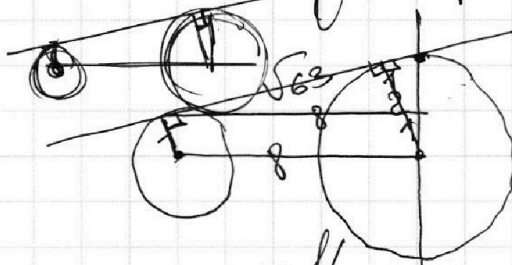
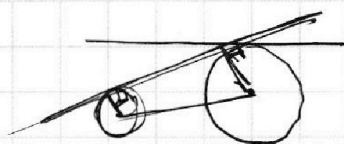
$$y = -\frac{16}{3}x + b$$

~~#~~

$$2 = b$$

$$2 = -\frac{16}{3} \cdot 0 + b$$

$$a = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$



$$\left| -8 \cdot \frac{15b}{8} + 10b \right| = a$$

$$5b = a$$

$$a = \frac{15b}{8} = \frac{3a}{8}$$

$$B\left(-\frac{16}{3}; 0\right)$$

$$y = ax + 10b$$

$$\frac{16}{3}a = 10b$$

$$a = \frac{30}{16}b = \frac{15}{8}b$$

$$\frac{16}{3}a = 10b$$

$$a = \frac{30b}{16} = \frac{15b}{8}$$

$$\rho(O_1; l) = \frac{|-8 \cdot A + D + C|}{\sqrt{A^2}} = \frac{|-8A + C|}{A}$$

$$1 = \frac{|-8A + C|}{A}$$

$$y = ax + b$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$\frac{|-8A + 10b|}{a}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$
 $2x^2 + 2x + 1$
 $2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2$
 $(-7x + 2) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$
 $(-7x + 2) - (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$
 $(-7x) (1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$
 $-7x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$
 $2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 0$
 $4x^2 - 3x + 3 - 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 0$
 $4x^2 - 3x + 3 = 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$
 $2 = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0$
 $4x^2 - 3x + 3 > 0$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 - 7x$
 $(\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 = (\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 - 7x)^2$
 $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 + 4 - 14x + 49x^2 + 4(2x^2 + 2x + 1) - 28x + 28 - 70x + 49x^2 + 4(2x^2 + 2x + 1) - 28x + 28$
 $0 = 49x^2 - 112x + 48$
 $49x^2 - 112x + 48 = 0$
 $x = \frac{112 \pm \sqrt{112^2 - 4 \cdot 49 \cdot 48}}{2 \cdot 49}$
 $x = \frac{112 \pm \sqrt{12544 - 9408}}{98}$
 $x = \frac{112 \pm \sqrt{3136}}{98}$
 $x = \frac{112 \pm 56}{98}$
 $x = \frac{168}{98} = \frac{12}{7}$ or $x = \frac{56}{98} = \frac{4}{7}$

$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2$
 $16x^2 - 24x + 30x^2 - 18x + 9 + x^2 - 4x - x + 3$
 $x^2 - 4x + 4 + x^2 - x - 1$
 $(x-2)^2 + x^2 - x - 1$

$2x^2 - 5x + 3 > 0$
 $2x^2 - 5x + 3 = 0$
 $x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$
 $x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$

$2x^2 - 5x + 3 < 0$
 $2x^2 - 5x + 3 = 0$
 $x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$
 $x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$

$2x^2 - 5x + 3 > 0$
 $2x^2 - 5x + 3 = 0$
 $x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$
 $x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$

$2x^2 - 5x + 3 < 0$
 $2x^2 - 5x + 3 = 0$
 $x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$
 $x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$

$2x^2 - 5x + 3 > 0$
 $2x^2 - 5x + 3 = 0$
 $x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$
 $x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$

$2x^2 - 5x + 3 < 0$
 $2x^2 - 5x + 3 = 0$
 $x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$
 $x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

$$\begin{cases} 2-7x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 2 - 7x. \end{cases}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2 + 7x = 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3}$$

$$4x^2 + 4x + 2 = 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 4x + 2 \\ \underline{4x^2 + 8x + 8} \\ -4x - 6 \\ \underline{-4x - 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 - 4x - 3 \\ \underline{4x^3 - 4x^2} \\ -2x^2 - 2x^2 + x + 3 \\ \underline{-2x^2 + 2x^2} \\ -4x^2 + x + 3 \\ \underline{-4x^2 + 4x} \\ -3x + 3 \\ \underline{-3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-1)(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3) = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$
 $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc: 2^{12} \cdot 7^{14}$
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{34}$

Наим. возм. $abc = ?$
 (произведение).

$$F = \frac{h}{h} = \frac{h}{F-5} = 2 \Rightarrow F = \frac{h}{F-5} = 2 \Rightarrow F(F-5) = h$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - (2-7x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(2-7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$

$$(2-7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2-7x) = 0$$