



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если обе минимально, то оно не включается
в себя ^{множества} кроме 2 и 7, поэтому мы можем
представить a, b, c в виде:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}; \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}; \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}, \text{ тогда}$$

$$ab = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2} = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}, \text{ аналогично}$$

$$bc = 2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_2 + \beta_3}$$

$$ac = 2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_3}$$

Из условия задачи мы можем вывести неравенства
на степени из-за делимости:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

Сложим неравенства и поделим на 2 и получим:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34, \text{ но } \beta_1 + \beta_3 \geq 39, \Rightarrow$$

\Downarrow

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28, \text{ т.к. } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N}$, т.к. иначе числа a, b, c были бы рациональ-
ными.

т.к. мы.

Из неравенств следует, что $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^{11}$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}; \quad (2^{15} \cdot 7^{11})$$

$$b = 2^4 \cdot 7^0$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{28}; \quad (2^{17} \cdot 7^{28}) \quad abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}; \quad (2^{23} \cdot 7^{39})$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab-2ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab}, \text{ по условию}$$

$$(a+b) : m$$

$$((a+b)^2 - 2ab) : m \Rightarrow (-2ab) : m \quad [\text{п.к. } (a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m, \text{ а}$$

если $(-2ab) \nmid m$, то и разность $2a$ ~~на~~ m не делится]

У a и b нет общих множителей, т.к. дроби несократ-

има, а это значит, что и у a^2 нет общих множителей

ни с a , ни с b ^①, т.е. $ab \nmid m$, а значит $(-2) : m$

$$\text{и } m=2$$

① Если бы были, то $ab = x \cdot a$

$$b = a(x-1) \Rightarrow \text{дроби сократима на } a \text{ — противоречие}$$

Ответ: 2

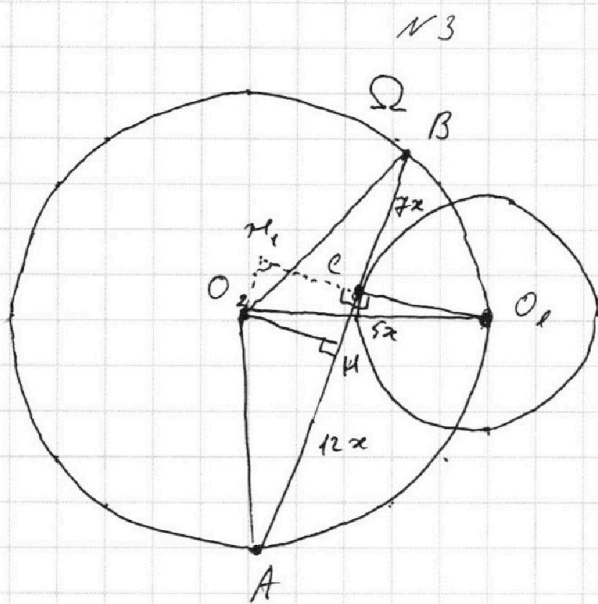
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O_2 - \text{ц. } \Omega; O_1 - \text{ц. } \omega$$

Пусть $BC = 7x$, тогда

$$AC = 17x, \text{ а } AB = 7x + 17x = 24x$$

Проведём O_2H - перпендикуляр на

ω из ц. Ω к AB . По

$$\text{свойству } AH = HB = \frac{24x}{2} = 12x$$

Найдём CH :

$$CH = BH - CB = 12x - 7x = 5x$$

Обозначим O_2H за h

Дополним O_2HC до прямоугольника O_2HCN_1 .

$$O_2N_1 = CH = 5x; O_2H = N_1C = h; C \in N_1O_1, \text{ т.к. } \angle N_1CN = \angle O_1CN = 90^\circ$$

Рассмотрим прямоуг. треуго. $O_2N_1O_1$: по т. Пифагора:

$$O_2N_1^2 + N_1O_1^2 = O_2O_1^2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5x & h + CO_1 = h + r(\omega) & r(\Omega) \end{matrix}$$

$$25x^2 + h^2 + 14h + 49 = 169$$

Рассмотрим в O_2HA , он тоже прямоуг. и по т. Пиф.

$$O_2A^2 = HA^2 + O_2H^2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ r(\Omega) & 12x & h \end{matrix}$$

$$169 = 144x^2 + h^2$$

Приравняем:

$$25x^2 + h^2 + 14h + 49 = 144x^2 + h^2$$

$$\begin{aligned} 14h &= 111x^2 - 49 \\ h &= \frac{111}{14}x^2 - \frac{49}{14} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подставим это в т. Падр для O_2 и А:

$$\left(\frac{17}{2}x^2 - \frac{7}{2}\right)^2 + 144x^2 = 13^2$$

$$\frac{17^2}{4}x^4 - \frac{17 \cdot 7}{2}x^2 + \frac{49}{4} + 144x^2 = 169 \quad | \cdot 4$$

$$289x^4 - 238x^2 + 49 + 576x^2 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \rightarrow \text{подбирается} \\ x^2 = -\frac{627}{289} \rightarrow \text{лот. Ваета (D > 0, м. П. = 338^2 + 627 \cdot 289 \cdot 4)} \\ \quad \quad \quad \uparrow \text{не подходит} \end{cases}$$

Значит $x = 1$

$$AB = 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



114

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-2x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1)$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \quad (1)$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad (2)$$

$$(1): \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \quad |^2$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 1=2x \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = 1\frac{10}{4} > 0 \end{cases}$$

$$(2): \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad |^2$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$6x^2-3x+3 + 2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

Рассмотрим $6x^2-3x+3$: $6x^2-3x+3 = 3(x^2-x+1)$

$$x^2-x+1$$

Вершина: $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$ мин. знач. $-2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8}$, значит

$$6x^2-3x+3 \geq 3 \cdot \frac{7}{8} > 1, \text{ то тогда } 2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} < 0,$$

это невозможно, значит корней нет

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Каждой ~~каждой~~ точке (x, y) сопоставим число $2x + 4y$

Рассмотрим как будет выглядеть плоскость:

0	2						
-1	1	3	4	7	8	11	13
-2	0	2	4	6	8	10	12
-3	-1	1	3	5	7	9	11
-4	-2	0	2	4	6	8	10
-5	-3	-1	1	3	5	7	9
-6	-4	-2	0	2	4	6	8
-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
-8	-6	-4	-2	0	2	4	6

ед. отрезок - 1 клетка, пересечение осей: $(0, 0)$

Заметим, что на прямой вида $y = -2x + b$, все b имеют одинаковые значения, что

фрагментируются:

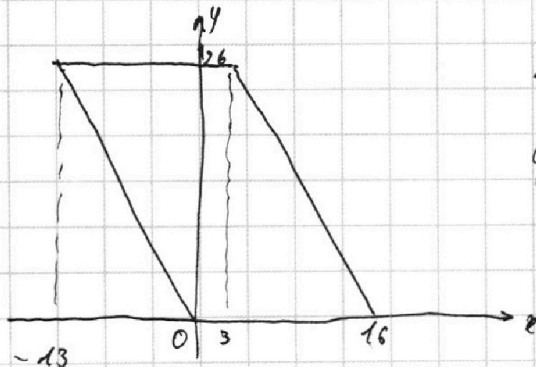
$$2x + 4y = 2x + (-2x + b) = b$$

Условие для пары точек: $2x_2 - 2x_1 + 4y_2 - 4y_1 = 14$

$$(2x_2 + 4y_2) = 14 + (2x_1 + 4y_1)$$

т.е. для чисел на прямой $y = -2x + b$ можно сопоставить числа на прямой $y = -2x + b + 14$

Теперь рассмотрим наш параллелограмм.



Левая сторона задается уравнением $y = -2x$, значит на ней все точки будут иметь $2x + 4y = 0$ и их там будет 14 (от -13 до 0 вал.)

Все единицы будут сложены на $y = -2x + 1$ их будет 13; ~~по формуле~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ординами от 1 до 25 пере $z \{1; 3; 5; \dots; 25\}$
Для всех будем $y = -2x + z$, а поскольку с 0 или будем
14 и т.д.

Каждая нечетная $2x + y$ будет иметь 13 чисел, а
четная: 14

$$\text{Последнее } 2x + y = 2 \cdot 16 + 0 = 32,$$

Теперь будем составлять $2x + y$ так, чтобы
 $(2x_2 + y_2) = 14 + (2x_1 + y_1)$

14	0
15	1
16	2

На четном y нас будет

$$14 \cdot 14 = 196 \text{ пар}$$

⋮	⋮
31	17
32	18

На нечетном $- 13 \cdot 13 = 169$ пар,
при этом пары эти же

среденности.

Четная всего ~~10~~, нечетная: 9

$(0, 2, 4, \dots, 18)$

$(1, 3, 5, \dots, 17)$

$$\text{Значит всего пар: } 10 \cdot 196 + 9 \cdot 169 = 3489$$

Ответ: 3489 пара точек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



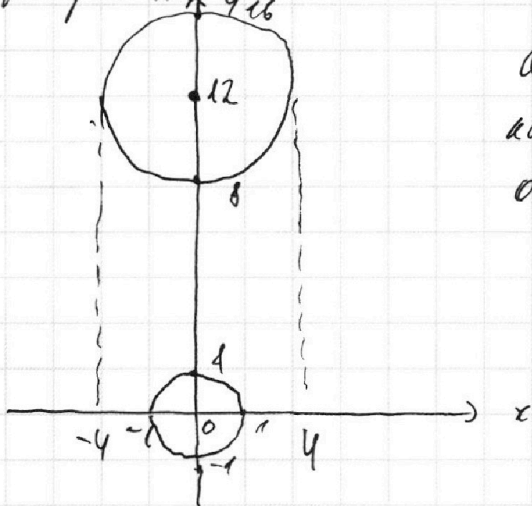
16

$$\begin{cases} ax+4-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+4-8b=0 \\ \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Заметим, что это
уравнение охватывает

нарисуем их



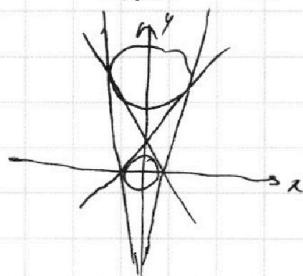
$ax+4-8b=0$ - прямая, которая
как-то проходит через
окружности.

\leq значит, что прямая проходит
внутри окружности (+ касательная)

\geq значит, что снаружи (+кас)

Возьмем решить, но пока бы и раз прямая пере-
секает окружности, но если она это делает не
по касательной, то решений будет бесконечно. Значит,
прямая $ax+4-8b=0$ - касательная к обеим окружностям

и и штука



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

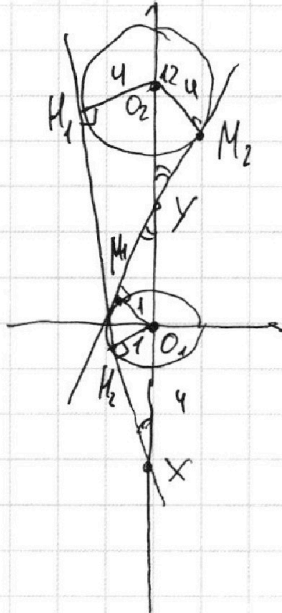
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем их точки пересечения с осью y :



$$r_{\text{вал}} = R = 1 \quad R_{O_2} = \sqrt{16} = 4$$

1. $O_2 H_1 X \sim O_1 H_2 X$

$$\frac{O_2 H_1}{O_1 H_2} = \frac{O_2 X}{O_1 X}$$

$$4 = \frac{O_2 X}{O_1 X} \quad ; \quad O_2 O_1 = 12 \Rightarrow$$
$$O_1 X = 4$$

2. $O_2 M_2 Y \sim O_1 M_1 Y$

$$\frac{O_2 M_2}{M_1 O_1} = \frac{Y O_2}{Y O_1}$$

$$4 = \frac{Y O_2}{Y O_1} \quad ; \quad O_1 O_2 = 12 \Rightarrow O_1 Y = 2,4$$
$$O_2 Y = 2,4$$

~~$x^2 + y^2 - 1 = 0$~~ ~~$y = 4$~~

Далее все совпадает



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

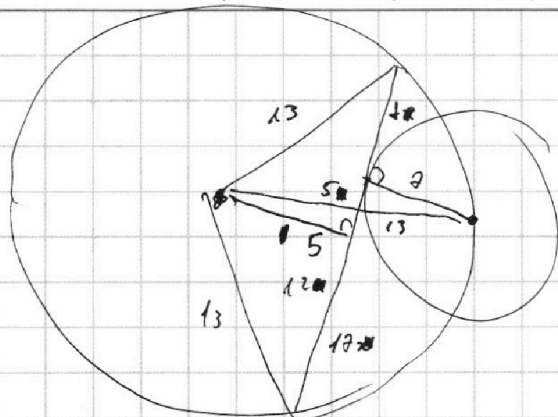
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(h+x)^2 + 25x^2 = 13^2$$

$$h^2 + 144x^2 = 13^2$$

$$h^2 - (h+x)^2 = -144x^2$$

$$(h-h-x)(h+h+x) = -144x^2$$

$$2h+x = 12x^2$$

$$h = 2,5x^2 - 3,5 = \frac{12}{2}x^2 - \frac{7}{2}$$

$$22,25x^4 - 7,25x^2 + 12,25 + 144x^2 = 13^2 \quad | \cdot 4$$

$$89x^4 - 29x^2 + 50 = 13^2 \cdot 4 - 50$$

$$89x^4 + 338x^2 - 626 = 0$$

$$x^2 = p \Rightarrow x = \sqrt{p-4} \quad \frac{C}{B} = \frac{-7}{12} = -2$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 626 \cdot 289 \cdot 4}}{289 \cdot 2} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 289 \cdot 12^2}}{289 \cdot 2}$$

$$= \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 + 289 \cdot 13^2}}{289}$$

$$\begin{array}{r} \times 626 \\ 289 \\ \hline 5834 \\ 5208 \\ \hline 1252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 182914 \\ 625 \\ \hline 183539 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1252 \\ \times 14 \\ \hline 17528 \\ 17528 \end{array}$$

$$26 \cdot 12 =$$

29

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 626 \\ \hline 5834 \\ -626 \\ \hline 5208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 526 \\ -238 \\ \hline 738 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 626 \\ \hline 17528 \\ 17528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5208 \overline{) 8} \\ 48 \overline{) 65} \\ \hline 17 \\ -16 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5008 \overline{) 8} \\ 48 \overline{) 62} \\ \hline 20 \\ -16 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \quad 25 \\ \times 169 \\ \hline 626 \\ 5634 \\ 2810 \\ 526 \\ \hline 238 \\ 538 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 144 \\ \hline 1584 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 26 \\ \hline 104 \\ 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 2 \\ \hline 238 \end{array}$$

666

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 169 \\ \hline 626 \\ 5634 \\ 2810 \\ 526 \\ \hline 238 \\ 538 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \quad 2 \quad 40 \\ \times 626 \\ \hline 17528 \\ 17528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 144 \\ \hline 1584 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 17 \\ \hline 182 \\ 442 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 626 \\ \times 169 \\ \hline 5634 \\ 2810 \\ 526 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 443 \\ \times 443 \\ \hline 1329 \\ 42 \end{array}$$

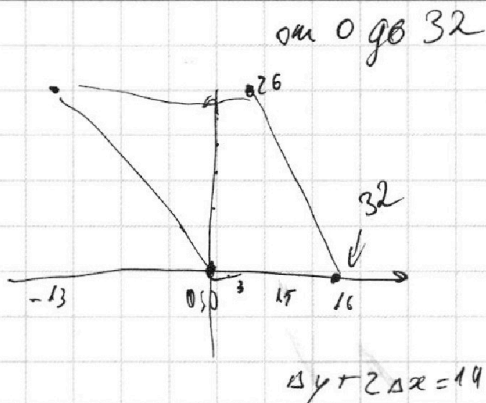
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$y_2 - y_1 = 2$$

$$\begin{matrix} 0 & 14 \\ 1 & 15 \end{matrix}$$

10 см
9 см

$$r = \frac{12}{5} = 2,4$$

одно:

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \\ x_2, x_1, y_2, y_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x_2 - x_1 = 7 - \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$A(x_1, y_1) \in [-26; 26]$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_2 - 2x_1 = 14 \text{ до } 32$$

$$x_2 - x_1 = 7$$

$$y_2 - y_1 = 2$$

$$x_2 - x_1 = 6$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 - 14 = y_1 \in [0; 26]$$

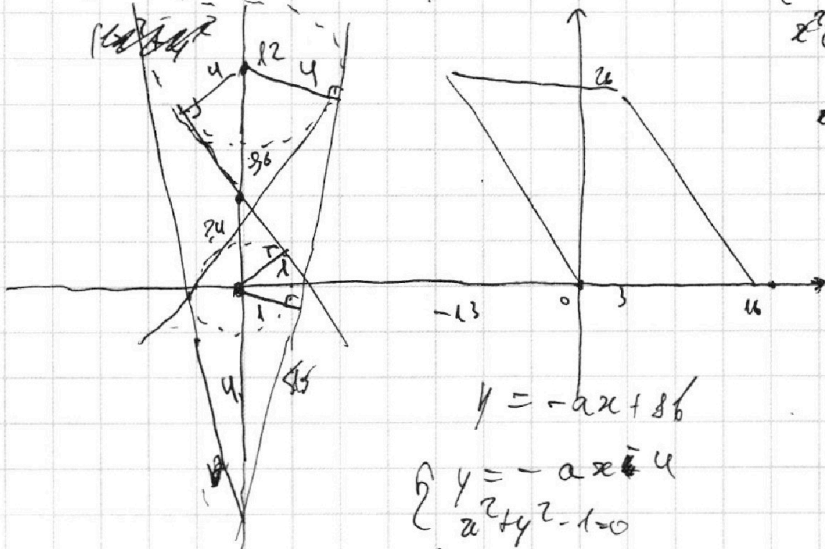
$$2x_2 + y_2 - 14 = x_1 + y_1 + x_1$$

$$ax + y - 86 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 4^2 \end{cases}$$

скорее (на зрел.)



$$\frac{12}{5} = 2,4$$

$$y = -ax + 86$$

$$\begin{cases} y = -ax + 4 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + a^2$$

$$2x_2 - 2x_1 = [-y_2 - 6 - 26 + y_2; 6 + 26 - y_2 + y_2]$$

$$x_1 \in \left[-\frac{y_1}{2}; 3 + \frac{26 - y_1}{2}\right], y_1 \in [0; 26]$$

$$2x_2 - 2x_1 \in [y_1 - 26 - y_2; y_2 + 32 - y_2] \quad x_2 \in \left[-\frac{y_2}{2}; 3 + \frac{26 - y_2}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} \text{tg} = 5/15 & \quad -x_1 \in \left[\frac{y_1}{2} - 16; \frac{y_1}{2}\right] \\ \text{tg} = -5/15 & \quad x_1 \in \left[-\frac{y_1}{2}; 18 - \frac{y_1}{2}\right] \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot x, \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot y, \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} \cdot z$$

$$d_1 + d_2 \geq 15$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 18$$

$$d_1 + d_3 \geq 23$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 39$$

$$2(d_1 + d_2 + d_3) \geq 55$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 27.5$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 28$$

$$\text{но } \beta_1 + \beta_3 \geq 39, \text{ поэтому}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$$

$$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 32$$

$$a = 2 \cdot 7$$

$$2d_2 \geq 19$$

$$b = 2^4 \cdot 7^0 = 1$$

$$a = 2 \cdot 7$$

$$c = 2 \cdot 7$$

$$b = 2 \cdot 7$$

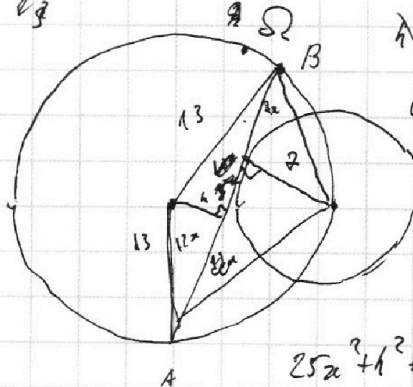
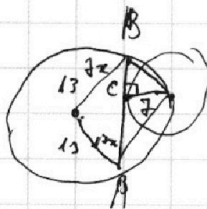
$$c = 2 \cdot 7$$

$$1410 = 82 \cdot 9$$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}; 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{20}; 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{29} \cdot 7^{89}; 2^{23} \cdot 7^{39}$$



$$25x^2 + (h+2)^2 = 13^2$$

$$25x^2 + h^2 + 4h + 4 = 169$$

$$h^2 + 4hx^2 = 13^2$$

$$h^2 + 4hx^2 = 25x^2 + h^2 + 4h + 4$$

$$4h = 119x^2 + 4$$

$$2h = 17x^2 + 2$$

$$\frac{h}{x} = 8.5x^2 + 1$$

$$25x^2 + h^2 + 119x^2 + 4h + 4 = 169$$

$$100 - 59.5 = 40.5$$

$$= 100 - 89.5 = 10.5$$

$$(8.5x^2 + 1)^2 + 4hx^2 = 13^2$$

$$72.25x^4 + 17x^2 + 1 + 4hx^2 = 169$$

$$72.25x^4 + 4hx^2 + 17x^2 + 1 - 169 = 0$$

$$72.25x^4 + 4hx^2 + 17x^2 - 168 = 0$$

$$289x^4 + 169x^2 - 63500 = 0$$

$$17^2 x^4 + 13^2 x^2 - 63500 = 0$$

$$84.5x^2 = 189.2 = 338$$

$$x^2 = \frac{338}{84.5} = 4$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r} 238 \\ 158 \quad 25 \\ \times \quad \quad \quad \\ \hline 63500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 815 \\ 169 \overline{) 815} \\ \underline{169} \\ 646 \\ \underline{646} \\ 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$289a^2 + 815a - 63500 = 0$$

$$a = \frac{-815 \pm \sqrt{815^2 + 63500 \cdot 4 \cdot 289}}{2 \cdot 289}$$

$$289a^2 + 338a - 63500 = 0$$

$$a = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 289 \cdot 63500 \cdot 4}}{2 \cdot 289}$$

$$\begin{array}{r} + 815 \\ + 815 \\ \hline 4085 \\ + 6520 \\ \hline 69285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 635 \\ + 289 \\ \hline 5715 \\ + 5080 \\ \hline 1270 \end{array}$$

$$\times 18515$$

$$\begin{array}{r} + 33406000 \\ \hline 69285 \end{array}$$

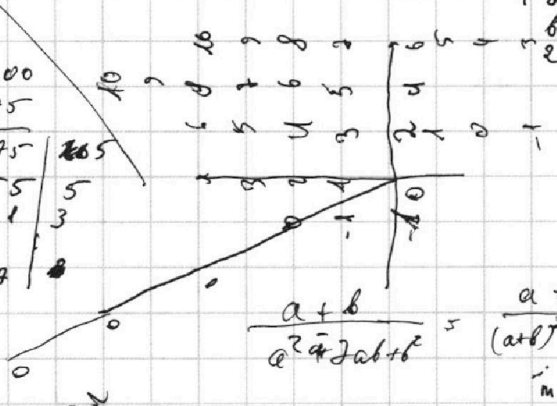
$$\begin{array}{r} 73406000 \\ \hline 69285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12695055 \\ \hline 2539011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 846 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 338 \\ + 338 \\ \hline 2804 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 73406000 \\ \hline 114244 \\ \hline 22520244 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array}$$



$$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab}$$

$\frac{2ab}{a+b}$

$\frac{2ab}{a+b} = 1$

$2ab = a+b$

$2 \cdot 13 = 1 + 13$

$26 = 14$

$M=9$

$$\begin{array}{r} 68 \\ + 168 \\ \hline 196 \\ + 1521 \\ \hline 3984 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{\dots}) (\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{\dots})$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{\dots} = 1 \end{cases} \quad x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{\dots} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{\dots} \sqrt{\dots} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots} \sqrt{\dots} = 1$$

$$3(2x^2 - x + 1)$$

$$2x^2 - x + 1 = 0 \quad D = 1 - 8 = -7$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{8} \cdot 3 > 1$$

$2x_2 - 2x_1 - 14 = 4x_1 - 4x_2 \in [4x_1 - 4x_2 - 14]$

$2x_2 + 4x_2 = 14 + 2x_1 + 4x_1 \in [14; 30]$

$2x_2 = 14 + 4x_1 \in [14; 30]$

$x_2 \in [7; 15]$