



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0, \text{ 2 действ. корня, } x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot (4t^2 - 4) > 0 \text{ - в.к. 2 корня (различных)}$$

$$(2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow 4 - 3t^2 - 16t^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 4t^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow 4 > t^2 \Leftrightarrow -2 < t < 2$$

$$D = 4 \cdot 3t^2 - 16t^2 + 16 = 4(4 - t^2)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{4(4-t^2)}}{2} = -\sqrt{3}t + \sqrt{4-t^2} \\ x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{4(4-t^2)}}{2} = -\sqrt{3}t - \sqrt{4-t^2} \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} -\sqrt{3}t + \sqrt{4-t^2} > 0 \\ -\sqrt{3}t - \sqrt{4-t^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-t^2} > \sqrt{3}t \\ -\sqrt{4-t^2} > \sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-t^2 > 3t^2 \\ 4-t^2 > 3t^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4-t^2 > 3t^2 \Leftrightarrow 4 > 4t^2 \Leftrightarrow t^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 1$$

$$2. \begin{cases} -\sqrt{3}t + \sqrt{4-t^2} < 0 \\ -\sqrt{3}t - \sqrt{4-t^2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-t^2 < 3t^2 \\ 4-t^2 < 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 1 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$

$$(-\sqrt{3}t + \sqrt{4-t^2})(-\sqrt{3}t - \sqrt{4-t^2}) = 3t^2 - 4 + t^2, 4t^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < t < 2 \\ t > 1 \\ t < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t < -1 \\ 1 < t < 2 \end{cases}$$

Ответ:  $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$a + b = 40, \quad a, b - \text{натуральные}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5, \quad p - \text{простое число}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)^2 + 15(a - b) =$$

$$= (a - b)(a - b - 15) = 17p^5$$

±.  $a \rightarrow$  Т.к.  $a + b = 40$ ,  $a, b$  - натур. числа  $\Rightarrow a_{\min} = 1$ ,  $b_{\min} = 1$   
 $a_{\max} = 39$ ,  $b_{\max} = 39$

1.  $a > b \Rightarrow a - b > 0$   
 $(a - b)(a - b - 15) = 17 \cdot p^5 > 0 \Rightarrow a - b - 15 > 0$

$$a - b \leq a_{\max} - b_{\min} = 39 - 1 = 38 \Rightarrow a - b \leq 38$$

$$a - b \leq 38 \Rightarrow a - b - 15 \leq 23$$

$$\begin{matrix} (a - b) & (a - b - 15) \\ \leq 38 & \leq 23 \end{matrix} = 17 \cdot p^5, \quad p - \text{простое}$$

I  $\begin{cases} a - b = 17 \cdot p^n \\ a - b - 15 = 17 \cdot p^{5-n} \end{cases}$  или II  $\begin{cases} a - b = p^n \\ a - b - 15 = 17 \cdot p^{5-n} \end{cases}, \quad n \leq 5$

I.  $a - b \leq 38 \Rightarrow a - b = 17 \cdot 1, n = 0$   
 $a - b = 17 \cdot 2, n = 1, p = 2$   
 $a - b \neq 17 \cdot 3, \text{ т.к. } 17 \cdot 3 > 38$   
 $a - b = 17 \Rightarrow a - b - 15 = 17 - 15 = 2 = p^5 \Rightarrow p = \sqrt[5]{2} - \text{не может быть по условию}$   
 $a - b = 34 \Rightarrow a - b - 15 = 34 - 15 = 19 = p^5 \Rightarrow p = \sqrt[5]{19} - \text{не может быть по условию}$

II  $a - b - 15 \leq 23 \Rightarrow a - b - 15 = 17 \cdot 1, n = 0$   
 $a - b - 15 \neq 17 \cdot 2, \text{ т.к. } 17 \cdot 2 > 23$   
 $a - b - 15 = 17 \Rightarrow a - b = 32 = p^5 \Rightarrow p^5 = 32 \Rightarrow p = 2 - \text{может быть}$

$$a - b - 15 = 1 \begin{cases} a - b = 32 \\ a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 72 \\ b = a - 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 36 \\ b = 4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad b > a \Rightarrow a - b < 0$$

$$(a-b)(a-b-15) = 14 \cdot p^5 > 0 \Rightarrow a-b-15 < 0$$

$$a-b \geq a_{\min} - b_{\max} = 1 - 39 = -38 \Rightarrow a-b \geq -38$$

$$a-b \geq -38 \Leftrightarrow a-b-15 \geq -53$$

$$(a-b)(a-b-15) = 14 \cdot p^5, \quad p\text{-натуральное}$$

$$I \quad \begin{cases} a-b = -14 \cdot p^n \\ a-b-15 = -p^{5-n} \end{cases} \quad \text{или} \quad II \quad \begin{cases} a-b = -p^n \\ a-b-15 = -14 \cdot p^{5-n} \end{cases}, \quad n \leq 5$$

$$I \quad a-b \geq -38 \Rightarrow a-b = -14, \quad n=0$$

$$a-b = -34, \quad n=1, p=2$$

$$a-b = -51, \quad n=1, p=3$$

$$a-b \neq -14 \cdot 4, \quad \text{в.к.} \quad -14 \cdot 4 < -38$$

$$a-b \neq -14 \cdot 3, \quad \text{в.к.} \quad -14 \cdot 3 < -38$$

$$a-b = -14 \Rightarrow a-b-15 = -14-15 = -32 = -p^5 \Rightarrow p^5 = 32 \Rightarrow p=2 \text{ - не подходит}$$

$$\begin{cases} a-b = -14 \\ a+b = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 23 \\ b = 40-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11,5 \\ b = 28,5 \end{cases} \text{ - невозможно, в.к. } a \text{ и } b \text{ - натуральные}$$

$$a-b = -34 \Leftrightarrow a-b-15 = -34-15 = -49 = -p^4 \Rightarrow p^4 = 49 \neq 16 \quad ; \quad -49 \neq -16 \quad (\text{в.к. } p=2)$$

$$II \quad a-b-15 \geq -53 \Rightarrow a-b-15 = -14, \quad n=0$$

$$a-b-15 = -2 \cdot 14, \quad n=1, p=2$$

$$a-b-15 = -3 \cdot 14, \quad n=1, p=3$$

$$a-b-15 \neq -4 \cdot 14, \quad \text{в.к.} \quad -4 \cdot 14 < -53$$

$$a-b-15 = -14 \Leftrightarrow a-b = -2 = -p^5 \Rightarrow p = \sqrt[5]{2} \text{ - невозможно, в.к. } p\text{-натуральное}$$

$$a-b-15 = -36 \Leftrightarrow a-b = -19 = -p^4 \Rightarrow p^4 = 19 \neq 16 \quad (19 \neq 2^4)$$

$$a-b-15 = -51 \Leftrightarrow a-b = -36 = -p^4 \Rightarrow p^4 = 36 \neq 81 \quad (27 \neq 3^4)$$

Значит, подходит только 1 пара чисел  $a$  и  $b$ :  $\begin{cases} a = 36 \\ b = 4 \end{cases}$

Ответ: (36; 4)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

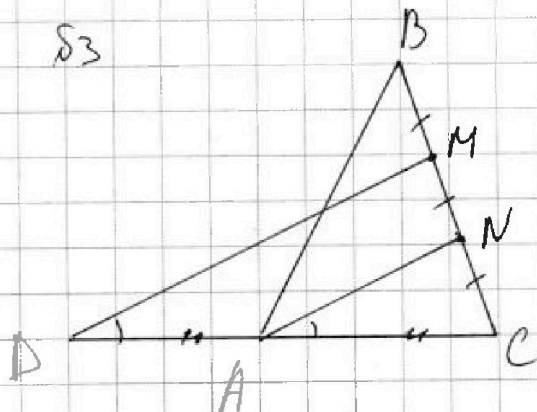


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

S3



Дано:  $BM, MN = NC$ ,  $D \in AC$ ,  $AN \parallel MD$ ,  
 $AB = CD$ ,  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

Найти:  $AB$

Решение: 1)  $CN = NM$ ;  $AN \parallel DM \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CA = AD$  - по теореме Фалеса  
2)  $AB = CD = \frac{1}{2} AC$   
3)  $BC = 12 \Rightarrow CN = \frac{1}{3} BC = 4$

4)  $\nabla n. \cos(2\angle CAN) < 0 \Rightarrow 2\angle CAN > 90^\circ$

$\cos(2\angle CAN) = -\cos(180^\circ - 2\angle CAN) \Rightarrow \cos(180^\circ - 2\angle CAN) = \frac{1}{4}$

5)  $\angle CAN = \angle EDM$  как соответственные углы при  $AN \parallel DM$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Учешки, сидящие за 1<sup>й</sup> партией всегда видят хорошо. Если пустя 2<sup>й</sup> парти, то за 1<sup>й</sup> и 3<sup>й</sup> парти учешки видят хорошо не зависимо от их роста. В остальных случаях учешки должны сидеть по росту (от меньшего к большому начиная от доски).

Пусть назовем ряды А, В и С. Пусть пустая карта на ряду С, тогда на ряду А могут сидеть какие то 3 учешки, т.е. на ряду А могут сидеть любые 3 из 8 учешков, причем, единственным образом (по росту) и на ряду А можно посадить  $C_8^3$  <sup>способами</sup> учешков, тогда на ряду В можно посадить любого из оставшихся людей 3 из оставшихся 5 учешков, причем, единственным образом, т.е.  $C_5^3$  способами.

На оставшихся на ряду С будут сидеть оставшиеся 2 учешки, пусть это учешки а и б, всего на этом ряду их можно рассадить  $2! = 2$  способами, но 2 из них не подходят по условию: пусть а вместе с б, а - пустое место  $\Rightarrow$  а и б не могут сидеть в порядке а-б (от доски)  $\Rightarrow$  т.е. не могут сидеть а-б-0 и 0-а-б (от доски).

Значит, всего учешков можно рассадить  $C_8^3 + C_5^3 + 4$  способами. Заметим, что если свободная карта окажется на ряду А или на ряду В  $\Rightarrow$  кол-во способов рассадки учешков не изменится. Значит, всего учешков можно рассадить  $(C_8^3 + C_5^3 + 4) \cdot 3$  способами

$$(C_8^3 + C_5^3 + 4) \cdot 3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} + 4) \cdot 3 = \frac{8!}{2 \cdot 5!} + \frac{5!}{2 \cdot 2!} + 12$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 12 = 2(124 + 15 + 6) = 210 \text{ - способов}$$

Ответ: 210 способов



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

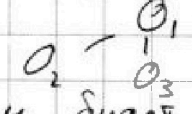
№6

Представим задачу в виде графа (дороги - ребра, деревни - вершины). По условию из любой вершины можно попасть в модуль, причем, единственным способом  $\Rightarrow$  граф связный, в графе нет циклов.

Пусть  $v_1, v_2, v_3, v_4$  обозначим те вершины, степени которых больше 1:  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (по условию жилая вершина 4).

Остальные вершины (со степенью 1) обозначим  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Заметим, что если  $B_i$  и  $B_j$  соединены ребром, то они изолированы от остального графа (степень вершин  $B_i$  и  $B_j = 1 \Rightarrow$  т.к. они уже соединены ребром, то они не могут быть соединены с другими вершинами)  $\Rightarrow$  граф не связен - противоречие  $\Rightarrow$  никакие 2 вершины  $B_i$  и  $B_j$  не соединены. Значит,  $\forall$  любая вершина  $B_i$  соединена с какой-то вершиной  $A_i$  из вершин  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , причем, только с одной.

Рассмотрим вершины  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$ . Времсе их «бокочной» вершины  $B$  и ребра, соединяющие  $B_i$  и  $A_j$ .

В графе из вершин  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  нет циклов, т.к. циклов не было в изначальном графе  $\Rightarrow$  этот граф - дерево. Заметим, что дерево из 4х вершин может быть всего 2х видов:  $O_1 - O_2 - O_3 - O_4$  или  $O_1$   , причем,

в обоих случаях сумма степеней вершин будет 6. Значит, для связи между собой вершин  $A_1, A_2, A_3, A_4$  требуется 3 ребра (или сумма степеней вершин 6). Пусть сумма степеней всех вершин графа  $S$ , вершин  $A - S_A$ , а сумма степеней вершин, не являющихся для связи между собой вершин  $A - S_A$  ( $S = 3 + 4 + 5 + 7 = 19$ ;  $S_A = 6$  - как мы ранее).

Заметим, что сумма степеней вершин  $B - S_B$ :  $S_B = S - S_A$ , т.к.  $S = S_A + S_B$  (т.к. вершины  $A$  связаны соединены только между собой и с вершинами  $B$ ). Значит,  $S_B = 19 - 6 = 13$ . Сумма степеней вершин  $B - 13$ , а степень каждой вершины  $= 1 \Rightarrow$  всего 13 вершин  $B$ . Значит, всего в графе  $13 + 4 = 17$  вершин.

Ответ: 17 деревень на острове.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

1. Пусть  $|x+y-2| \geq 0$

$$\text{OДЗ: } \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ x+y-2 \geq 0 \\ 1-x-y+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)-(x+y)^2+2xy \geq 0 \\ x+y \geq 2 \\ x+y \leq 3 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \begin{cases} (x+y)(2-x-y) \geq -2xy \\ 2 \leq x+y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy \geq (x+y)(x+y-2) \\ 2 \leq x+y \leq 3 \end{cases}$$

$2 \leq x+y \leq 3$ ,  $x$  и  $y$  - целые  $\Rightarrow x+y$  - целое  $\Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$

1)  $x+y=2$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+y)(2-x-y)} + \sqrt{1-(x+y-2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{3-(x+y)} = 1$$

$$1) \sqrt{2 \cdot 2 - 2^2 + 2xy} + \sqrt{3-2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2xy} = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} ; \begin{cases} y=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

2)  $x+y=3$

$$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{3-(x+y)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 3 - 3^2 + 2xy} + \sqrt{3-3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2xy-3} = 1 \Rightarrow 2xy-3=1 \Leftrightarrow 2xy=4 \Leftrightarrow xy=2$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (3-y)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=2 \\ x=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$y^2-3y+2=0, D=9-4 \cdot 2 > 0$$

По т. Виета:  $\begin{cases} y_1+y_2=3 \\ y_1 \cdot y_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=2 \end{cases}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad x + y - 2 \leq 0$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1+x+y-2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{x+y-1} = 1$$

$$OD3: \quad \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1+x+y-2 \geq 0 \\ x+y-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy \geq (x+y)(x+y-2) \\ x+y \geq 1 \\ x+y \leq 2 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \quad \begin{cases} 2xy \geq (x+y)(x+y-2) \\ 1 \leq x+y \leq 2 \end{cases}$$

$$1 \leq x+y \leq 2, \quad x \text{ и } y - \text{целые} \Rightarrow x+y - \text{целое} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$$1) \quad x+y = 1$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{x+y-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 1 - 1 + 2xy} + \sqrt{1-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2xy+1} = 1 \Rightarrow 2xy+1 = 1 \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$2) \quad x+y = 2$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{x+y-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 2 - 2^2 + 2xy} + \sqrt{2-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2xy} + 1 = 1 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \right)$$

Ответ: (0; 2); (2; 0); (2; 1); (1; 2); (0; 1); (1; 0)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 12 \\ \hline 84 \\ + 15 \\ \hline 99 \\ \times 105 \\ \hline 105 \\ \hline 105 \end{array}$$

$BM = MN = NC$   
 $AN \parallel ND$   
 $AB = CD$   
 $BC = 12$   
 $\cos 2\angle CAN = -\frac{1}{4}$

$CA = AD$  по т. Фалеса  
 $AB = CD = 2CA$

$$C^2 \cdot 4 + C^3 + C^3$$

$\frac{d!}{2! \cdot 6!}$	$a$	$a$	$b$	$0$	$a$
	$b$	$0$	$0$	$0$	$a$
	$0$	$b$	$a$	$b$	$b$

$EN = 4$   
 $CN = 4$   
 $16a^2 - a^2 = 15a^2$

$BE = 10$

$\frac{4a}{x} = \frac{y}{4}$   
 $16a = xy$

$\sqrt{15a^2 + (x+a)^2} = 4+y$

$BE = 10$

$\sqrt{15a^2 + (x+a)^2} = 4+y$

+ 1.3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-b)(a-b-15) = 17p^5$$

$$\begin{array}{l} <40 \\ 17 \\ 17p \\ 17p^2 \\ 17p^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} p^5 \\ p^4 \\ p^3 \\ p \end{array}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 40 \Rightarrow a < 40 \\ a-b &= 40-b < 40 \Rightarrow b < 40 \\ a-b-15 &= 40-b-15 < 25 \end{aligned}$$

$$(a-b)(a-b-15) < 40 \cdot 25$$

$$17 \quad 17 \text{ или } p^4$$

1.  $a > b$   
 $a > b+15$

1)  $a-b-15 = 17 \Rightarrow a-b = 32$

$a-b = p^5 = 32, p=2$

2)  $a-b = 17$

$a-b-15 = p^5 \Rightarrow 2 \cdot p^5$  - не может быть

3)  $a-b = 34, p=2$

$a-b-15 = 19 \neq 2^4$

2.  $b > a$

$$\begin{array}{r} 36 \\ +15 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$(a-b)(a-b-15) \geq -40 \cdot 25 \geq -53$$

$$a-b = -b+a \geq -40$$

$$\begin{array}{l} a < 40 \\ b < 40 \\ a-b < 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 17 \\ 34 \\ 51 \end{array}$$

1)  $a-b = -17$

$a-b-15 = -32 = -p^5, p=2$

2)  $a-b = -34, p=2$

$a-b-15 = -49 \neq -2^4$

3)  $a-b-15 = -17 \Rightarrow a-b = -2 \neq -p^5$

4)  $a-b-15 = -34 \Rightarrow a-b = -19 \neq -p^4$

5)  $a-b-15 = -51 \Rightarrow a-b = -36 \neq -p^3$

$$\begin{array}{l} a-15 \\ -15 \\ \hline -41-5 \cdot 8 \end{array}$$

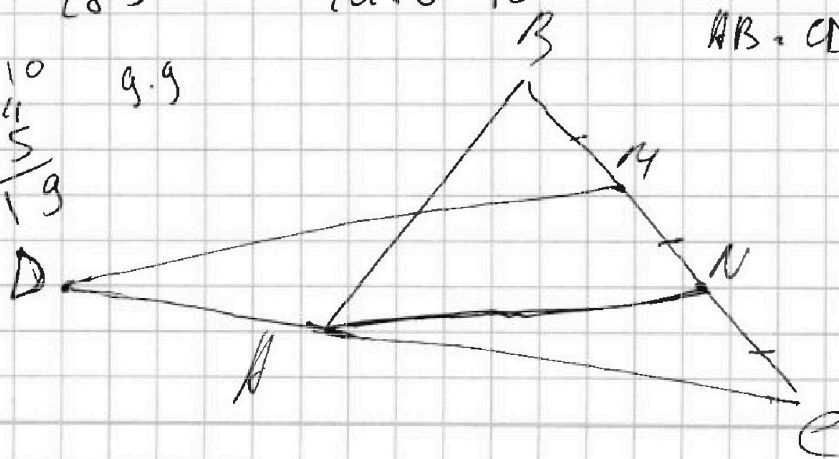
$$\begin{array}{r} 2 \cdot 9 \cdot 10 \\ \times 17 \\ \hline 34 \\ 180 \\ \hline 51 \quad 285 \end{array}$$

$$\begin{cases} a-b = 32 \\ a+b = 40 \end{cases}$$

$$36 - 4$$

$$AB = CD$$

$$\begin{array}{r} 10 \quad 9 \cdot 9 \\ 36 \\ -15 \\ \hline 19 \end{array}$$





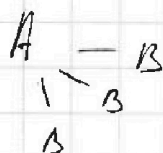
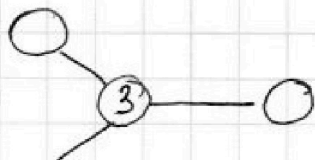
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из модой в продуке по 1 марке руды  $\Rightarrow$  нет шума  
4 дерева: A: 3, 4, 5, 4, авт. - по 1: B  
Ск всего деревьев?  $\#$  дерево

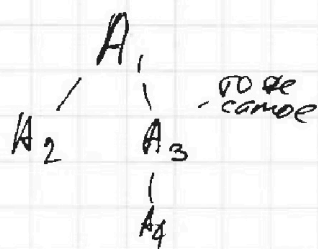
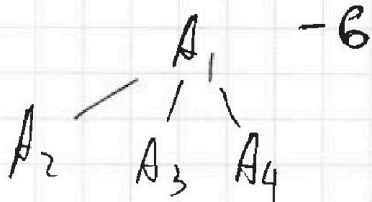


Всего: 17 деревьев

$$A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - 6$$

$$3+4+5+4 - 1-2-2-1 = 1+5+7 = 17$$

-3 -3 -така B



$$\sqrt{4-4} + \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} = 0$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$1. \quad x+y-2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-x-y+2 \geq 0 \\ x+y-2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) \geq x^2+y^2 \Rightarrow x+y \geq x+y \\ \Rightarrow 3 \geq x+y \\ x+y \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} = \sqrt{(x+y)(2-x-y)} \quad \perp \quad x+y=2$$

$$\begin{aligned} & 2(x+y) - (x^2+y^2) \\ & 2(x+y) - (x+y)^2 + 2xy \\ & (x+y)(2-x-y) + 2xy \geq 0 \\ & (x+y)(2-x-y) \geq -2xy \\ & (x+y)(x+y-2) \leq 2xy \end{aligned}$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{3-(x+y)} = 1$$

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 4 + 2xy} + \sqrt{3-2} = 1$$

$$\sqrt{2xy} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ или } y=0$$

$$2(x+y) - ((x+y)^2 - 2xy) = 1$$

$$xy \geq 1,5$$

$$\sqrt{2 \cdot 3 - 9 + 2xy} + \sqrt{3-3} = 1$$

$$\sqrt{2xy-3} = 1 \Rightarrow 2xy-3=1 \Rightarrow 2xy=4$$

$$y(3-y)=2 \Rightarrow y^2-3y+2=0 \Rightarrow y=2 \text{ или } y=1$$

$$\begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow x=3-y$$

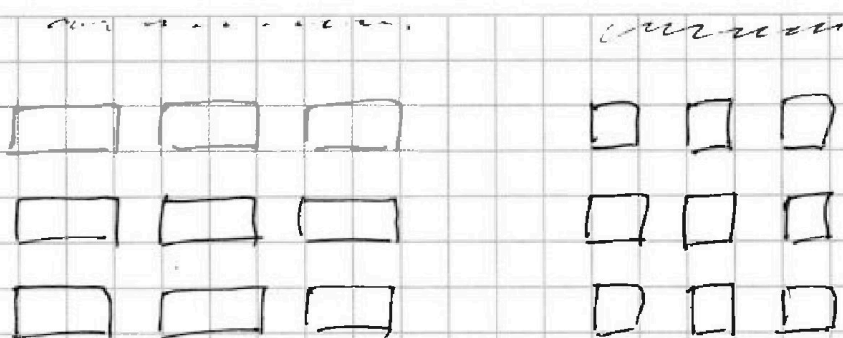


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

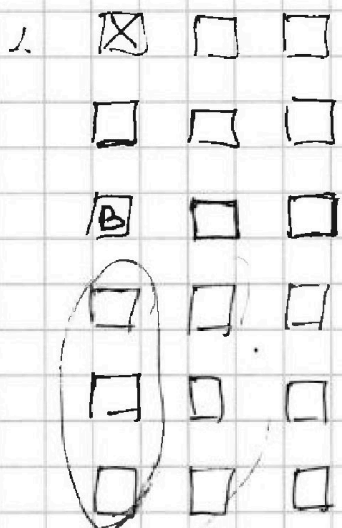
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. 3<sup>я</sup> ларга
2. ларга перед шим нустан
3. перед шим сидит кошачий росток

8 улс.  
Бсе рэгцлого рогот



$$1. \frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 3!$$

$$41$$

$$(\binom{3}{9} + \binom{3}{6}) \cdot 3!$$

2.  $\frac{9!}{6!} + \frac{6!}{3!}$  - итерацио

→ 42829+

а	а	о
б	о	а
о	б	б

$$(\binom{3}{8} + \binom{3}{5} + 3) \cdot 3!$$

$$\left( \frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + 3 \right) \cdot 3!$$

$$\frac{8!}{5!} + \frac{5!}{2!} + 3 \cdot 3!$$

$$4 \cdot 8 \cdot 9 + 4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$= 24(7 \cdot 3 + 5)$$

$$= 24 \cdot 26 = 13 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4$$

$$13 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6$$

$$414$$

$$6 \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$= 6(7 \cdot 8 + 10 + 3) = 6(56 + 10 + 3)$$

$$= 6 \cdot 69 = 414 \text{ способ}$$