



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парты перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.Сколько способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению
$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$x^2 + 2\sqrt{3}t x + 4t^2 - 4 = 0, \text{ 2 действ. корня}, x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot (4t^2 - 4) > 0 \rightarrow 2 \text{ корня (различных)}$$

$$(2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}t^2 - 16t^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 4t^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow 4 > t^2 \Leftrightarrow -2 < t < 2$$

$$D = 4 \cdot 3t^2 - 16t^2 + 16 = 4(4 - t^2)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{4(4-t^2)}}{2} = -\sqrt{3}t + \sqrt{4-t^2} \\ x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{4(4-t^2)}}{2} = -\sqrt{3}t - \sqrt{4-t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3}t + \sqrt{4-t^2} > 0 \\ -\sqrt{3}t - \sqrt{4-t^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-t^2} > \sqrt{3}t \\ -\sqrt{4-t^2} > \sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-t^2 > 3t^2 \\ 4-t^2 > 3t^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4-t^2 > 3t^2 \Leftrightarrow 4 > 4t^2 \Leftrightarrow t^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 1$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3}t + \sqrt{4-t^2} < 0 \\ -\sqrt{3}t - \sqrt{4-t^2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-t^2 < 3t^2 \\ 4-t^2 < 3t^2 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$

$$(-\sqrt{3}t + \sqrt{4-t^2})(-\sqrt{3}t - \sqrt{4-t^2}) = 3t^2 - 4 + t^2, 4t^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < t < 2 \\ t > 1 \\ t < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t < -1 \\ 1 < t < 2 \end{cases}$$

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$a+b=40, a \neq b - \text{натуральные}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5, p - \text{простое число}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) =$$

$$= (a-b)(a-b-15) = 17p^5$$

I. \Rightarrow Т.к. $a+b=40, a \neq b$ - nat. числа $\Rightarrow a_{\min}=1, b_{\min}=1$
 $a_{\max}=39, b_{\max}=39$

$$I: a > b \Rightarrow a-b > 0$$

$$(a-b)(a-b-15) = 17 \cdot p^5 > 0 \Rightarrow a-b-15 > 0$$

$$a-b \leq a_{\max} - b_{\min} = 39 - 1 = 38 \Rightarrow a-b \leq 38$$

$$a-b \leq 38 \Rightarrow a-b-15 \leq 23$$

$$(a-b)(a-b-15) = 17 \cdot p^5, p - \text{простое} \\ \leq 38 \leq 23$$

$$\begin{array}{l} I. \left\{ \begin{array}{l} a-b = 17 \cdot p^n \\ a-b-15 = p^{5-n} \end{array} \right. \text{ или } II. \left\{ \begin{array}{l} a-b = p^n \\ a-b-15 = 17 \cdot p^{5-n}, n \leq 5 \end{array} \right. \end{array}$$

$$I. a-b \leq 38 \Rightarrow a-b = 17 \cdot 1, n=0$$

$$a-b = 17 \cdot 2, n=1, p=2$$

$$a-b \neq 17 \cdot 3, \text{ т.к. } 17 \cdot 3 > 38$$

$$a-b \cdot 17 \Rightarrow a-b-15 = 17-15 = 2 = p^5 \Rightarrow p = \sqrt[5]{2} - \text{не может быть по условию}$$

$$a-b=34 \Rightarrow a-b-15 = 34-15 = 19 = p^5 \Rightarrow p = \sqrt[5]{19} - \text{не может быть по условию}$$

$$II. a-b-15 \leq 23 \Rightarrow a-b-15 = 17 \cdot 1, n=0$$

$$a-b-15 \neq 17 \cdot 2, \text{ т.к. } 17 \cdot 2 > 23$$

$$a-b-15 \cdot 17 \Rightarrow a-b = 32 = p^5 \Rightarrow p^5 = 32 \Rightarrow p=2 - \text{простое}$$

$$a-b-15=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} a-b=32 \\ a+b=40 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a=72 \\ b=a-32 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=36 \\ b=4 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. b > a \Rightarrow a - b < 0$$

$$(a-b)(a-b-15) = 18 \cdot p^5 > 0 \Rightarrow a-b-15 < 0$$

$\Leftrightarrow 0$

$$a-b \geq a_{\min} - b_{\max} = 1-39 = -38 \Rightarrow a-b \geq -38$$

$$a-b \geq -38 \Leftrightarrow a-b-15 \geq -53$$

$$(a-b)(a-b-15) = 18 \cdot p^5, p \text{-простое}$$

$\geq -38 \geq -53$

$$\text{I} \quad \begin{cases} a-b = -18 \cdot p^n \\ a-b-15 = -p^{5-n} \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{II} \quad \begin{cases} a-b = p^n \\ a-b-15 = -18 \cdot p^{5-n}, n \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{I} \quad a-b \geq -38 \Rightarrow a-b = -18, n=0$$

$$a-b = -34, n=1, p=2$$

$$a-b = -51, n=2, p=3$$

$$a-b \neq -17 \cdot 4, \text{ т.к. } -17 \cdot 4 < -38$$

$$a-b \neq -14 \cdot 3, \text{ т.к. } -14 \cdot 3 < -38$$

$$a-b = -14 \Rightarrow a-b-15 = -14-15 = -32 = -p^5 \Rightarrow p=2 \text{ - простое}$$

$$\begin{cases} a-b = -14 \\ a+b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 11,5 \end{cases} \quad \text{невозможно, т.к. } a \text{ и } b \text{- натуральные}$$

$$a-b = -34 \Rightarrow a-b-15 = -34-15 = -49 = -p^4 = -16; -49 \neq -16 \quad (\text{т.к. } p \neq 2)$$

$$\text{II} \quad a-b-15 \geq -53 \Rightarrow a-b-15 = -14, n=0$$

$$a-b-15 = -2 \cdot 18, n=1, p=2$$

$$a-b-15 = -3 \cdot 14, n=1, p=3$$

$$a-b-15 \neq -4 \cdot 18, \text{ т.к. } -4 \cdot 18 < -53$$

$$a-b-15 = -14 \Rightarrow a-b = -2 = -p^5 \Rightarrow p=2 \text{ - простое, т.к. } p \text{-напр.}$$

$$a-b-15 = -36 \Rightarrow a-b = -19 = -p^4 \Rightarrow p^4 = 19 \neq 16 \quad (19 \text{ - простое})$$

$$a-b-15 = -51 \Rightarrow a-b = -36 = -p^4 \Rightarrow p^4 = 36 \neq 51 \quad (36 \neq 51)$$

Значит, подходит только 1 пара чисел a и b : $\begin{cases} a=36 \\ b=16 \end{cases}$

Ответ: $(36; 16)$

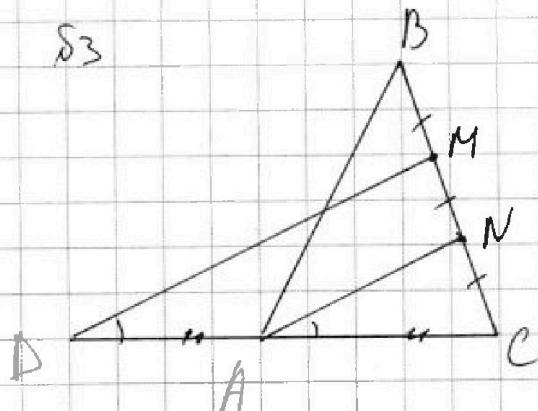


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle B\bar{e}C$, $M, N \in B\bar{e}C$,
 $B\bar{M}, MN \perp NC$, $D \in AC$, $\bar{A}N \parallel MD$,
 $AB = CD$, $BC = 12$, $\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{3}$

Найти: AB

Решение: 1) $CN \cdot NM$; $AN \parallel DM \Rightarrow$
 $\Rightarrow CA = AD$ - по теореме Фалеса
2) $AB = ED = \frac{1}{2} AC$
3) $BC = 12 \Rightarrow CN \cdot \frac{1}{3} BC = 4$.

4) Т.н. $\cos(2\angle CAN) < 0 \Rightarrow 2\angle CAN > 90^\circ$

$$\cos(2\angle CAN) = -\cos(180^\circ - 2\angle CAN) \Rightarrow \cos(180^\circ - 2\angle CAN) = \frac{1}{3}$$

5) $\angle CAN = \angle CDM$ ~~как наименее лежащие~~ при $AN \parallel DM$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Ученики, сидящие за 1^й парой всегда видят хорошо. Если пусты 2^й пары, то 1^й и 3^й пары ученики видят хорошо не зависимо от их роста. В оставшихся случаях ученики должны сидеть по росту (от меньшего к большему начиная от деска).

Решение: Назовем ряды A, B и C. Рассмотрим пары на ряду C, тогда на ряду A могут сидеть какие то 3 ученика, т.е. на ряду A могут сидеть только 3 из 8 учеников, причем, единственным образом (по росту) \Rightarrow на ряду A можно посадить C_8^3 способами учеников, тогда на ряду B можно посадить только из оставшихся любых 3 из 5 оставшихся в 5 способами, причем, единственным образом, т.е. C_5^3 способами. На оставшиеся ряды на ряду C будут сидеть оставшиеся 2 ученика, пусть это ученики а и б, всего на этом ряду их можно расставить $3! \cdot 2$ способами, но 2 из них не подходит по условию: пусть а выше б, о - пустое место \Rightarrow а и б не могут сидеть в порядке а - б (от деска) \Rightarrow т.е. не могут сидеть а - б - о и о - а - б (от деска).

Значит, всего учеников можно расставить $C_8^3 + C_5^3 + 4$ способами. Заметим, что если свободная пара окажется на ряду A или на ряду B, то некоторые способы расставки учеников не возможны. Значит, всего учеников можно расставить $(C_8^3 + C_5^3 + 4) \cdot 3$ способами

$$(C_8^3 + C_5^3 + 4) \cdot 3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{5!}{3! \cdot 2! + 4} \cdot 3 = \frac{8!}{2 \cdot 5!} + \frac{5!}{2 \cdot 2!} + 12 =$$

$$= 320 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 12 = 2(12 \cdot 4 + 15 + 6) = 210 - \text{способы}$$

Ответ: 210 способов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Представим задачу в виде графа (дороги - ребра, деревни - вершины). По условию, из любой вершины можно попасть в любую, пресеки, единственным способом -³ граф связный, в графике нет циклов.

Рассмотрим те вершины, степени которых больше 1: A_1, A_2, A_3, A_4 (по условию такие вершины 4).

Остальные вершины (со степенью 1) обозначим B_1, B_2, \dots, B_n .
Заметим, что если B_i и B_j соединены ребром, то ~~тогда~~ они изолированы от остального графа/степень вершин B_i и B_j - 1 \Rightarrow они уже соединены ребром, то они не могут быть соединены с другими вершинами \Rightarrow граф не связен - противоречие \Rightarrow никакие 2 вершины B_i и B_j не соединены. Значит, любая вершина B_i соединена с какой-то вершиной A_j , из вершин A_1, A_2, A_3, A_4 , причем, только с одной.

Рассмотрим вершины A_1, A_2, A_3 и A_4 . Временно «важнейшие» вершины B и ребра, соединяющие B_i и A_j .

В графике из вершин A_1, A_2, A_3 и A_4 нет циклов, т.к. циклы не могут в изолированном графике \Rightarrow этот график - дерево.
Заметим, что дерево из 4х вершин может быть всего 2⁴ видов: $O_1 - O_2 - O_3 - O_4$ или $O_1 - O_2 - O_3$ и т.д., причем,

6 из них случаются сумма степеней вершин будет 6.

Значит, для связи между собой вершин A_1, A_2, A_3, A_4 требуется 3 ребра (или связь степеней вершин 6).
Сумма степеней всех вершин графа S_A , вершин $A - S_A$, а сумма степеней вершин, не соединенных для связи между собой вершин $A - S_A$ ($S_A = 3 + 4 + 5 + 7 = 19$; $S_A > 6$ - раньше ранее).

Заметим, что сумма степеней вершин $B - S_B$: $S_B = S - S_A$, т.к. $S \cdot S_A + S_B$ т.к. вершины A стоят, соединены только между собой и с вершинами B). Значит, $S_B = 19 - 6 = 13$. Сумма степеней вершин $B - 13$, а степень каждой вершины + 1 \Rightarrow всего 13 вершин B . Значит, всего в графике $13 + 4 = 17$ вершин.

Ответ: 17 деревьев на острове.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

1. Решить $|x+y-2| \geq 0$

$$\text{ODZ: } \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ x+y-2 \geq 0 \\ 1-x-y+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)-(x+y)^2+2xy \geq 0 \\ x+y \geq 2 \\ x+y \leq 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \begin{cases} (x+y)(2-x-y) \geq -2xy \\ 2 \leq x+y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy \geq (x+y)(x+y-2) \\ 2 \leq x+y \leq 3 \end{cases}$$

$$2 \leq x+y \leq 3, \quad x \text{ и } y \text{- целые} \Rightarrow x+y \text{- целое} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$$

1) $x+y=2$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+y)(2-x-y)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{3-(x+y)} = 1 \quad (2)$$

$$(2) \sqrt{2 \cdot 2 - 2^2 + 2xy} + \sqrt{3-2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2xy} = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \quad (3) \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$$

2) $x+y=3$

$$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{3-(x+y)} = 1 \quad (4)$$

$$(4) \sqrt{2 \cdot 3 - 3^2 + 2xy} + \sqrt{3-3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2xy} = 1 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow 2xy = 1/4 \Leftrightarrow xy = 1/2$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (3-y)y=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} y=1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$y^2-3y+2=0, \quad D=9-4 \cdot 2 > 0$$

№ 5. Внешн.: $\begin{cases} y_1+y_2=3 \\ y_1 \cdot y_2=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=2 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad x+y-2 \leq 0$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1+x+y-2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{x+y-1} = 1$$

$$\text{ODZ: } \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1+x+y-2 \geq 0 \\ x+y-2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{(1)} \quad \begin{cases} 2xy \geq (x+y)(x+y-2) \\ x+y \geq 1 \\ x+y \leq 2 \end{cases} \quad \text{(2)}$$

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} 2xy \geq (x+y)(x+y-2) \\ 1 \leq x+y \leq 2 \end{cases}$$

$$1 \leq x+y \leq 2, \quad x \text{ и } y - \text{ целые} \Rightarrow x+y - \text{целое} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$$1) \quad x+y=1$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{x+y-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 1 - 1 + 2xy} + \sqrt{1-1} = 1 \quad \text{(1)}$$

$$\text{(1)} \quad \sqrt{2xy+1} = 1 \Rightarrow 2xy+1=1 \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow xy=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \quad \text{(2)} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$2) \quad x+y=2$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{x+y-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 2 - 2^2 + 2xy} + \sqrt{2-1} = 1 \quad \text{(1)}$$

$$\text{(1)} \quad \sqrt{2xy} + 1 = 1 \Rightarrow xy=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Ответ: $(0; 2); (2; 0); (2; 1); (1; 2); (0; 1); (1; 0)$

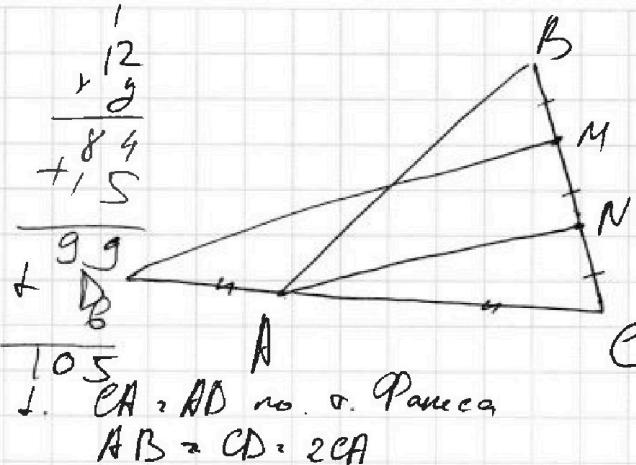


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BM \cdot MN \cdot NC$$

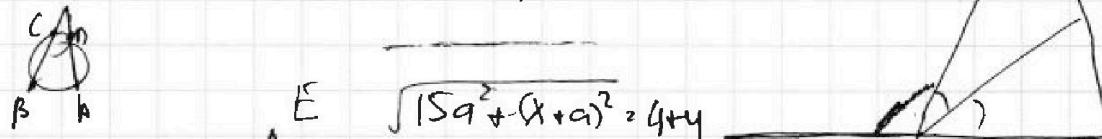
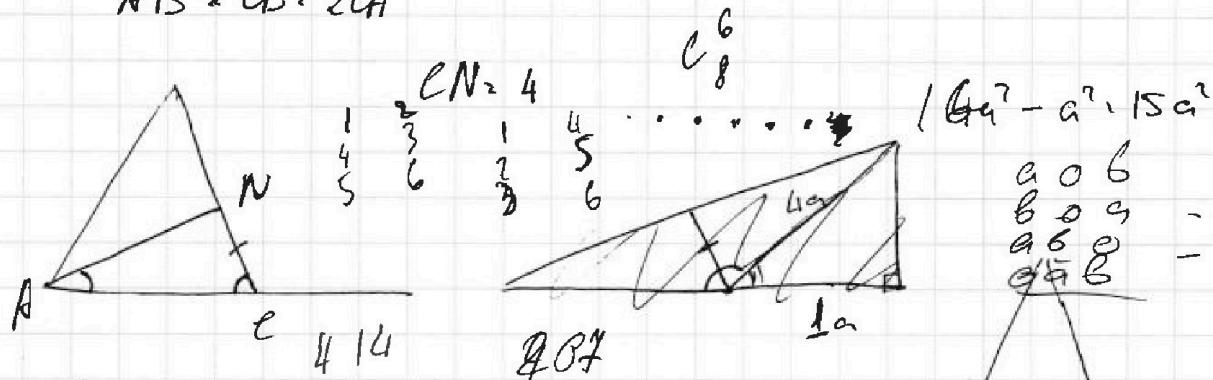
$$AN \parallel ND$$

$$AB = CD$$

$$BC = 12$$

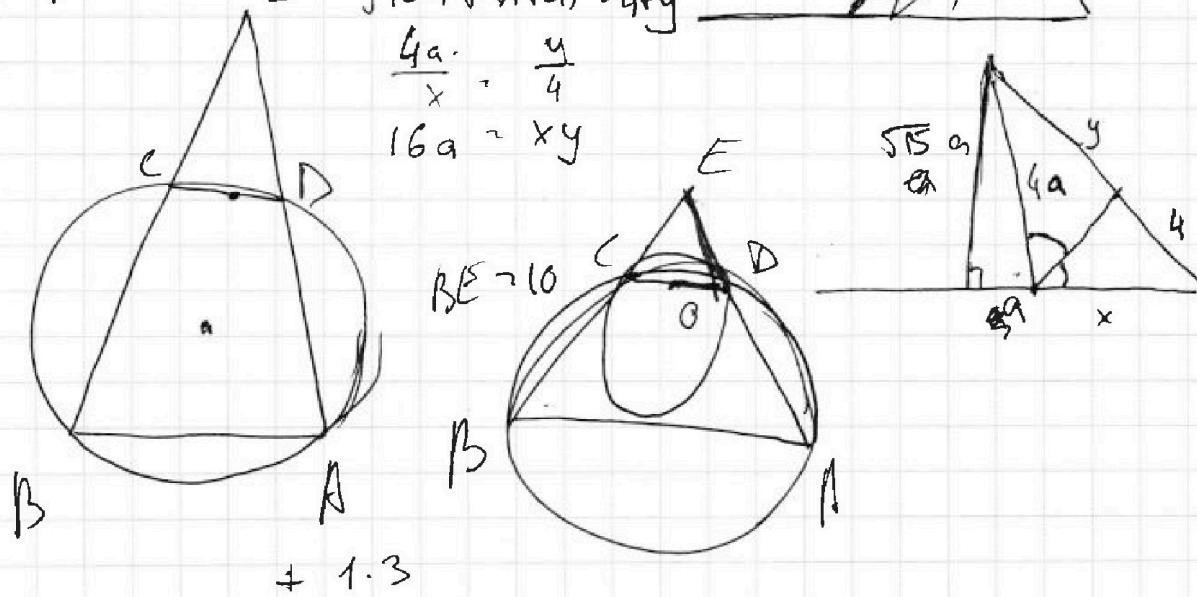
$$\cos 2\angle CAN = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\delta!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{C_8^2 \cdot 4 + C_8^3 \cdot C_3^3}{a^6 b^6 c^6 d^6}$$



$$\frac{4a}{x} = \frac{y}{4}$$

$$16a^2 = xy$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-b)(a-b-15) = 14 p^5$$

≤ 40

14

p^5

17 P

p^9

17 P²

p^3

17 P³

P

14

$$a+b=40 \Rightarrow a < 40$$

$$a-b+40-b < 40 \quad b < 40$$

$$a-b-15+40-b-15 < 25$$

$$(a-b)(a-b-15)$$

$\leq 40 \quad \leq 25$

14 при p^5

$$1) a-b-15 = 14 \Rightarrow a-b = 32$$

$$a-b+p^5 = 32, p=2$$

$$2) a-b = 14$$

$$a-b-15 = p^5 \Rightarrow 2 \cdot p^5 - \text{не может быть}$$

$$3) a-b = 34, p=2$$

$$a-b-15 = 19 \neq p^5$$

$$1. a > b$$

$$a > b + 15$$

$$2. b > a$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 15 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$a < 40$$

$$b < 40$$

$$a-b < 0$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 34 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$(a-b)(a-b-15)$$

$$\geq 40 \quad \geq -53$$

≥ -38

$$\begin{array}{r} a-b = -b+a \geq -40 \\ 40 < 40 \quad > -40 \end{array}$$

$42:11$

-34

$$i) a-b = -17$$

$$a-b-15 = -32 = p^5, p=2$$

$$2) a-b = -34, p=2$$

$$a-b-15 = -49 \neq p^5$$

$$3) a-b-15 = -17 \Rightarrow a-b = -2 \neq p^5$$

$$4) a-b-15 = -34 \Rightarrow a-b = -13 \neq p^5$$

$$5) a-b-15 = -51 \Rightarrow a-b = -36 \neq p^5$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 18 \\ 15 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 34 \\ -15 \\ \hline 19 \end{array}$$

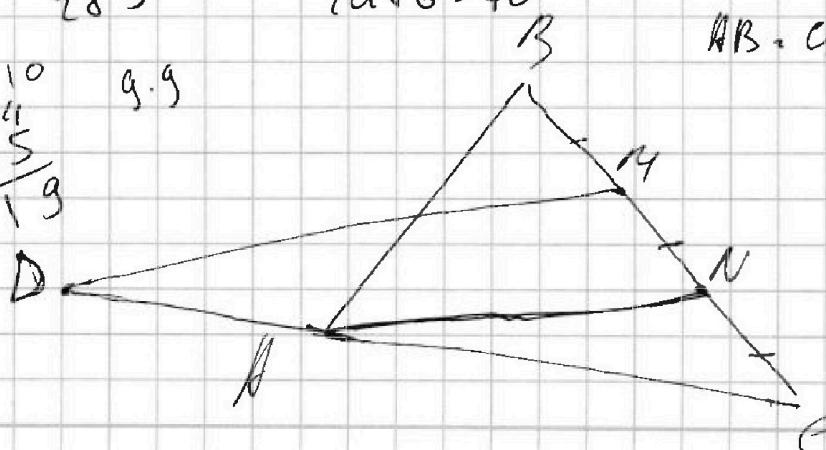
$$\begin{array}{r} 100 \\ 100 \\ -115 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\begin{cases} a-b = 32 \\ a+b = 40 \end{cases}$$

$$36 - 4$$

B

AB = CD



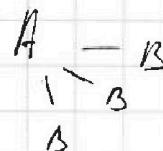
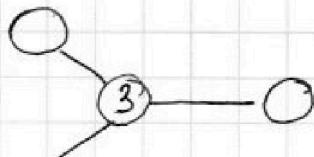


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

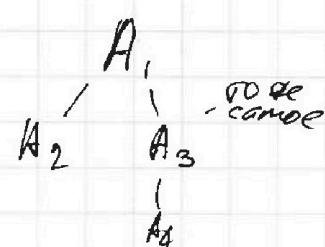
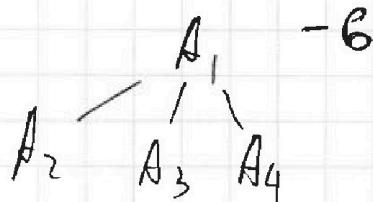
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Из моделей 6 видуко по 1 маркеру \Rightarrow нет генов
4 генов: A:3, 4, 5, 7, ос. - по 1: B
Сколько генов?



$$A_1 - A_2 - A_3 - A_4 = 6$$

$$3+4+5+7 = 1-2-2-1 = 1+5+7 = 13$$



$$\frac{\sqrt{4} - 4 +}{\sqrt{2+4}-1}$$

$$\sqrt{2x+2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x+y-2|} = 1$$

f. $x+y-2 \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-x-y+2 \geq 0 \\ xy-2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 2(x+y) \geq x^2+y^2 \\ 3 \geq x+y \\ x+y \geq 2 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow x+y \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x+y = 3 \\ x+y = 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\sqrt{2(x+y) - (x^2 + y^2)} = \sqrt{(x+y)(2-x-y)} + xy = 2$$

$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$

$$2xy \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{2(x+y) - (x^2 + y^2)}{2(x+y) - (x+y)^2 + 2xy} = \frac{\sqrt{2(x+y)} - \sqrt{(x+y)^2 + 2xy} + \sqrt{3 - (x+y)^2}}{\sqrt{2 \cdot 2 - 4 + 2xy} + \sqrt{3 - 2}} = 1 \end{aligned}$$

$$(x+y)(2-x-y) + 2xy \geq 0$$

$$(x+y)(2-x-y) \geq -2xy$$

$$\frac{2. x+y+3}{\sqrt{3x-3} = \sqrt{9+2xy + \sqrt{3-3}}} \geq 1$$

$$2(xy) - ((x+y)^2 - 2xy) \geq 1$$

$$xy \geq 1,5$$

$$\frac{2\cdot 1}{2xy} \sqrt{2xy - B} \geq 1$$

$$2xy - B \geq 1 \Leftrightarrow 2xy \geq 1 + B$$

$$y(3-y) \geq 2$$

$$y^2 - 2y + 1 \geq 0$$

$$(y-1)^2 \geq 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

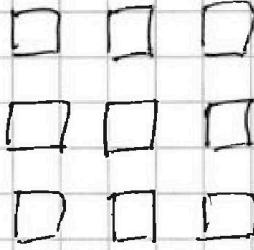
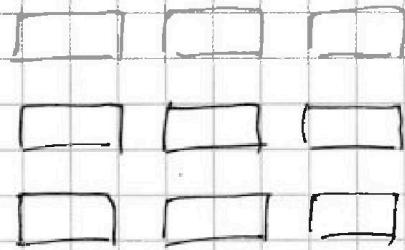


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

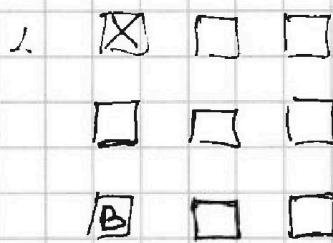
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



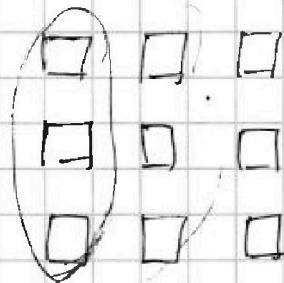
1. 1^я карта
2. карты перед шахматистами
3. первым идет южного рода

8 уч.
все редчего рода



$$12 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} \right) \cdot 3! = \\ \left(C_9^3 + C_6^3 \right) \cdot 3! = 42828 +$$

исходное



9 9 0
6 0 9
0 8 8

$$\left(C_9^3 + C_5^3 + 3 \right) \cdot 3!$$

$$\left(\frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + 3 \right) \cdot 3! = \\ \frac{8!}{5!} + \frac{5!}{2!} + 3 =$$

$$4 \cdot 8 \cdot 9 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = \\ 24(4 \cdot 3 + 5) = \\ 24 \cdot 26 = 13 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \\ 13 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} =$$

$\frac{69}{6} =$

$$6 \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = \\ 6(7 \cdot 8 + 10 + 3) = 6(56 + 10 + 3) = \\ 6 \cdot 69 =$$

414 способов

