



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $b_1 q$ - первый член прогрессии:

$$b_1 q^7 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$b_1 q^{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$b_1 q^{10} = x+4$$

$$\frac{b_1 q^{12}}{b_1 q^4} = q^8 = \sqrt{(x-3)^2} = (x-3)^2$$

$$q^8 = |x-3| \quad q^2 = \sqrt{|x-3|}$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^5}} \quad b_1 |x-3| = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$(15x+6)(x-3) \geq 0$

$-\frac{6}{15} \quad 3$

Тогда $b_1 q^{10} = x+4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot (\sqrt{|x-3|})^5$

$$x+4 = (x-3) \sqrt{15x+6}$$

~~$x > -4$~~

1) $(x+4)^2 = (15x+6)$

2) $(x+4)^2 = -15x-6$

$$x^2 + 8x + 16 - 15x - 6 = 0$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$x = -22; x = -21$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} = 5, 2$$

не подходит
 $x > -40$

$x = 2$ не подходит.

~~Ответ: 5, 2~~

Ответ: 5

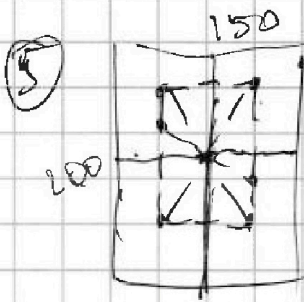


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

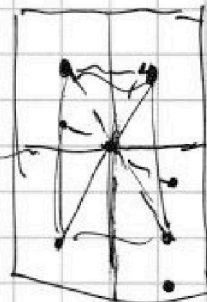


$$150 \cdot 100 = 15000$$

$$75 \cdot 100 = 7500$$

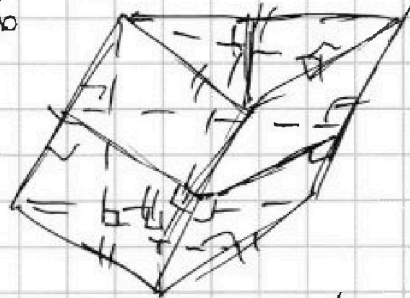
$$2 \cdot \frac{15000!}{14996!} - \frac{7500!}{7498!}$$

$$30000 - 20998 - 20996 - 20994$$



$$\frac{15000!}{14996!}$$

$$3 \cdot \frac{15000!}{14996!}$$



$$ab = 4$$

$$ac = 4$$

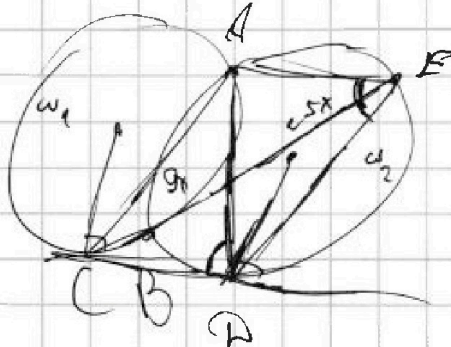
$$ad = 5$$



$$2 \cdot 15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997 - 2 \cdot 7500 \cdot 7499$$

$$3 \cdot \frac{15000!}{14996!} - 2 \cdot \frac{7500!}{7498!}$$

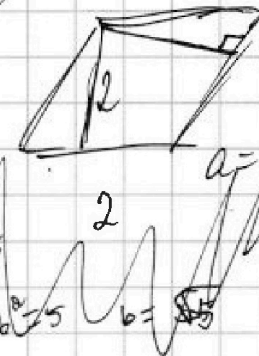
4



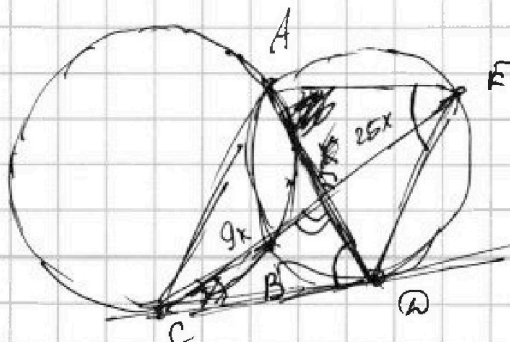
$$ab = 4$$

$$ac = 4$$

$$bc = 5$$



$$\frac{9x}{y} = \frac{2}{25x}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

Рассмотрим 2 уравнения:

$$\begin{aligned} 1) z^2 &\in [0; +\infty) \\ -z^2 &\in (-\infty; 0] \\ 225 - z^2 &\in (-\infty; 225] \end{aligned}$$

$$\sqrt{225 - z^2} \in [0; 15].$$

$$2) |y-20| + 2|y-35|$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y < 7,35 \\ 3y - 90 \end{cases} \\ &\begin{cases} 7,35 < y < 35 \\ -y + 50 \end{cases} \\ &\begin{cases} y > 35 \\ -y + 50 \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда $f(y) = 3y - 90$.

Заметим что $f(y)$ на данном участке возрастает \Rightarrow минимальное значение

в точке $y = 35: f(y) = 15$.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 30 \leq y \leq 35 \\ f(y) = -y + 50 \end{cases} \end{aligned}$$

Функция на данном участке убывает \Rightarrow минимальное значение при

$$y = 35: f(y) = 15.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) При $y \leq 20$

$$f(y) = 90 - 3y.$$

$f(y)$ убывает \Rightarrow минимальное значение при $y = 20$: $f(y) = 30$.

Тогда $f(y)$ на $D(f)$ принимает значение $[15; +\infty)$.

Т.к. $\sqrt{225 - z^2} \in [0; 15]$ \Rightarrow

$$\Rightarrow \sqrt{225 - z^2} = 15$$

$$|y - 20| + 2|y - 35| = 15 \quad \begin{matrix} z = 0 \\ y = 35. \end{matrix}$$

Подставим это в первое уравнение:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \quad (x \in [-7; 5])$$

$$(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}) = 2(\sqrt{35-2x-x^2} - 6) \quad (\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \geq 0)$$

$$x+7+5-x - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(35-2x-x^2) + 144 - 48\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$12 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(35-2x-x^2) + 144 - 48\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$2(35-2x-x^2) - \sqrt{35-2x-x^2} + 66 = 0$$

$$\sqrt{35-2x-x^2} = \frac{23 \pm 1}{4} = 6; \frac{11}{2}$$

$$\begin{cases} 35 - 2x - x^2 = 36 \\ 4(35 - 2x - x^2) = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ 4x^2 + 8x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 4x^2 + 8x - 19 = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = -1 \\ 4x^2 + 8x - 19 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{D}{4} = 16 + 19 \cdot 4 = 23 \cdot 4$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{23}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{23}}{4} = -2 \pm \frac{\sqrt{23}}{2}$$

Проверим подставив это в $\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \geq 0$

$$1) \quad x = -1: \sqrt{6} - \sqrt{6} + 6 \geq 0 \quad - \text{верно}$$

$$2) \quad x = -2 + \frac{\sqrt{23}}{2}: \sqrt{5 + \frac{\sqrt{23}}{2}} - \sqrt{7 - \frac{\sqrt{23}}{2}} + 6 \geq 0$$

$$3) \quad x = -2 - \frac{\sqrt{23}}{2}: \sqrt{5 - \frac{\sqrt{23}}{2}} - \sqrt{7 + \frac{\sqrt{23}}{2}} + 6 \geq 0$$

$$\text{Ответ: } x = -1; \quad x = -2 \pm \frac{\sqrt{23}}{2}$$

$$y = 35 \\ z = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0$$

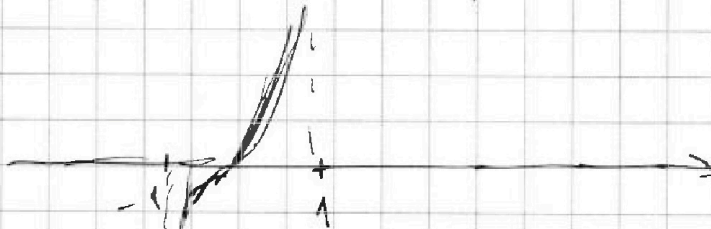
$$\cos x = t, \quad t \in [-1; 1]$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) =$$

$$= 3(2t - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) \nearrow \text{ на } (0; 1)$$



$$\text{Тогда } \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - 6 - 3 + 3 - p \leq 0 \\ 4 - 6 + 3 + 3 - p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \geq -10 \\ p \leq 4 \end{cases}$$

$$p \in [-10; 4]$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0 \quad \text{при } p \in [-10; 4].$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) \cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) = p - 3$$

При $p \in [-10; 4]$ $\cos x$ всегда будет принимать 0 только один раз \Rightarrow
 $\Rightarrow x$ принимает не больше 2 корней на отрезке $[0; 2\pi]$.

$$\text{Ответ: } 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0 \text{ при } p \in [-10; 4].$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

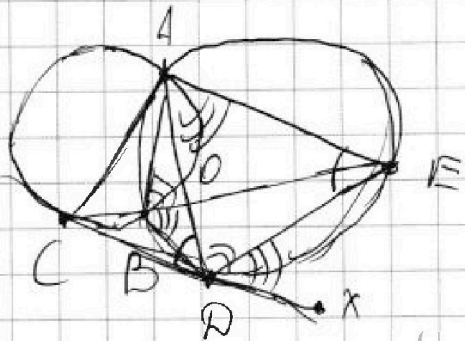


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$\angle AOC = \angle AEO = \frac{1}{2} \angle A$$

$$\angle AOE = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle E$$

$$\angle EAO = \angle EBO = \angle EXO = \frac{1}{2} \angle X$$

$$\angle BDA = \angle AEB = \frac{1}{2} \angle AB$$

$$\triangle AOB \sim \triangle EOD \Rightarrow \frac{AO}{EO} = \frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OD}$$

$$\triangle BOD \sim \triangle AOE \Rightarrow \frac{BO}{AO} = \frac{OD}{OE} = \frac{OD}{OE}$$

Тогда $\angle CDA = \angle ADE \Rightarrow DO$ — биссектриса.

По св-ву биссектрисы:

$$\frac{CD}{CO} = \frac{DE}{OE} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{25}{9}$$

Ответ: $\frac{ED}{CD} = \frac{25}{9}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Рассмотрим случай, когда прямоугольник параллелен одной из двух средних линий.

Тогда закрашиваем одну клетку, мы однозначно закрашиваем клетку ~~параллельно~~ симметричную ей.

Тогда всего надо закрасить 4 клетки на одной половине прямоугольника.

Таких способов $\frac{15000!}{14996!}$, т.к. все $\frac{150 \cdot 200}{2}$ мест для 4 клеток.

При этом кол-во способов закрасить симметрично горизонтальной и вертикальной средней линией.

Тогда кол-во способов ^{симм.} одной из двух средних линий:

~~$\frac{7500!}{7498!}$~~ ~~$\frac{15000!}{14998!}$~~ , но в таких способах

есть пересечения когда раскраска симметрична и относительно горизонтальной и относительно вертикальной.

В таких случаях когда ~~ставится~~ на одну четверть доски закрашиваем одну клетку, определяем сразу 3 остальные закрашенные клетки.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Р⁵ Рассмотрим случай когда симметрично относительно центра.

Таких способов: $\frac{15000!}{14996!}$

Но может быть ситуация, в которой симметрично относительно центра и средней линии, таких мы посчитали 2 раза.

Таких ситуаций: $\frac{7500!}{7498!}$

Заметим, что в такой ситуации также симметрично относительно второй средней линии.

Тогда всего кол-во способов закрасить 8 клеток, чтобы было симметрично относительно либо средней линии, либо центра:

$$2 \cdot \frac{15000!}{14996!} - 2 \cdot \frac{7500!}{7498!}$$

Ответ: $2 \cdot \frac{15000!}{14996!} - 2 \cdot \frac{7500!}{7498!}$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Рассмотрим условие, что $(a-b)(b-c)$ квадрат некоторого простого числа.

$$\text{Тогда } (a-c)(b-c) = p^2.$$

Т.к. p - некоторое простое число, но при этом $p^2 : (a-c)(b-c)$ - 2 делителя.

Тогда либо одна из скобок равна ± 1 , либо скобки равны.

Рассмотрим все случаи.

1) $a-c = b-c \Rightarrow a=b$, но по первому условию $a > b \Rightarrow$ противоречие.

2) $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b=1-p^2 \Rightarrow a < b$ - тоже противоречие.

3) $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c-1 \\ b=c+p^2 \end{cases}$

$$\text{Тогда } a-b = c-1 - c+p^2 = p^2-1.$$

Но по второму условию $a-b \not\equiv 0$. Заметим, что $p^2 \not\equiv 1$ имеет остаток на 3 либо 0, либо 1. Если $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, то $p^2-1 \equiv 0 \pmod{3}$, что

противоречит условию $\Rightarrow p^2 : 3$, но p - простое число $\Rightarrow p=3$

$$p^2=9 \Rightarrow \begin{cases} a=c-1 \\ b=c-9 \end{cases} \Rightarrow a=b+8$$

Подставим это в последнее условие:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6) \quad b^2 + b + 8 = 820 \Rightarrow b^2 + b - 812 = 0$$

$$b = \frac{-1 \pm 57}{2} = 28; -29$$

$$\text{Тогда } a = 36; -21 \\ c = 37; -20$$

$$4) \begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a - b = 1 - p^2 - \text{противоречие,} \\ \text{т.к. } a > b.$$

$$5) \begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a - b = p^2 - 1 \\ c = b - 1$$

Данная ситуация порождается на $3: p^2 - 1/3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p^2 = 9 \Rightarrow a = b + 8$$

$$\text{Тогда } b = 28; -29 \\ a = 36; -21 \\ c = 27; -30$$

Ответ: $(36; 28; 37); (-21; -29; -20);$
 $(36; 28; 27); (-21; -29; -30).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(6) \quad (a-c)/(b-c) = p^2$$

$$1) \quad \begin{cases} a-c = b-c \\ a = b \end{cases}$$

$$b^2 + b - 820 = 0$$

$$820 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 41$$

$$D = 1 + 820 \cdot 4 = 3281$$

$$2) \quad \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \quad a < b$$

$$3) \quad \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= c - 1 \\ b &= c - p^2 \end{aligned}$$

$$c - 1 + c^2 \leq 2cp^2 + p^4 = 820$$

$$c - 1 + (c - p^2)^2 = 820$$

$$\begin{aligned} a > b \\ a + b^2 = 820 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= c - 1 \\ b &= c - p^2 \end{aligned}$$

$$a - b \div 3 \Rightarrow (c - 1) - (c - p^2) \div 3$$

$$p^2 - 1 \div 3$$

$$p \div 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow p^2 = 9$$

$$\begin{aligned} a &= c - 1 \\ b &= c - 9 \end{aligned}$$

$$a = b + 8$$

$$b + 8 + b^2 = 820$$

$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 820 \\ 10 \\ \hline 3280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 820 \\ 10 \\ \hline 3280 \\ \times 820 \\ 10 \\ \hline 3280 \\ \times 820 \\ 10 \\ \hline 3280 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$D = 5249$$

$$b = \frac{-1 \pm 57}{2} = 28; -29$$

$$a = 36; -21$$

$$c = 37; -20$$

~~$$812 = 2 \cdot 2 \cdot 203$$~~

$$\begin{array}{r} 812 \\ \times 4 \\ \hline 3248 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 399 \\ 285 \\ \hline 3249 \end{array}$$

$$4) \begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases}$$

$$a - b = 1 - p^2 - 1$$

$$5) \begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases}$$

~~$$a = c + p^2$$~~

$$b = c + 1$$

$$p^2 = 9$$

$$a - b = p^2 - 1 / 3$$

$$a = c + 9$$

$$b = c + 1$$

$$a = b + 8$$

$$c = b - 1$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$D = 16 + 76 = 92$$

$$b = 28; -29$$

$$a = 36; -21$$

$$c = 27; -30$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 4 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$a - b = 2ab - 3$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2(\sqrt{35-2x-x^2} - 3)$$

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 8 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ -121 \\ \hline 219 \\ -40 \\ \hline \end{array}$$

$$x+7 + 5-x - 2\sqrt{35-2x-x^2} = 4\sqrt{35-2x-x^2} - 6\sqrt{35-2x-x^2} + 9$$

$$12 + 46\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(35-2x-x^2)$$

$$2(x+7)(5-x) - 23\sqrt{(x+7)(5-x)} - 6 = 0$$

$$D = 529 - 528 = 1$$

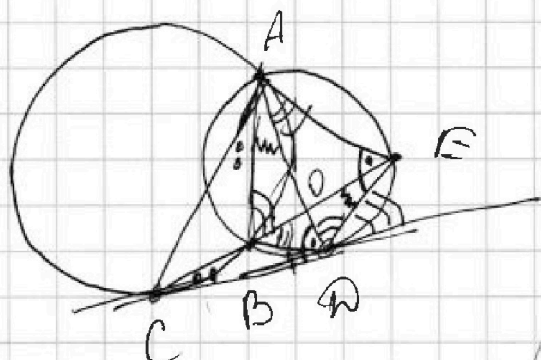


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BOD = \frac{m + n}{2}$$

$$\angle ECR = \frac{m - n}{2}$$

$$\angle DOE = 180^\circ - \frac{m + n}{2}$$

$$180^\circ - \frac{m}{2} - \frac{n}{2} + \frac{m}{2} = 180^\circ + \frac{n}{2}$$

$$a - b + c = 2ab$$

$$a(1 - 2b)$$

$$\angle DOE = \frac{m}{2}$$

$$\frac{m - n}{2} + \frac{m + n}{2} = \frac{m}{2}$$

2) $x \geq -7$
 $x + 3z \leq 5$
 $-15 \leq z \leq 15$

$x \leq 5$
 $y - 2x - x + z \geq 0$
 $x^2 + 2x \leq 35 - x$

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} + 6 =$$

$$= 2\sqrt{35 - 2x - x^2}$$

$x \geq -7$
 $-x \leq 7$
 $5 - x \leq 12$

$3z \in [-45; 45]$
 $5 - 3z \in [-34; 50]$
 $x \in [-7; 50]$

$|y - 20| + 2|y - 35| \in [0; 15]$
 $\min(|y - 20| + 2|y - 35|)$

$y = 35$
 $z = 0$

$y \geq 35: 3y - 55$
 $20 \leq y \leq 35: -y + 50$
 $50 - y$

$20 \geq -y \geq -35$
 $30 \geq 50 - y \geq 15$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(x+2x) = \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

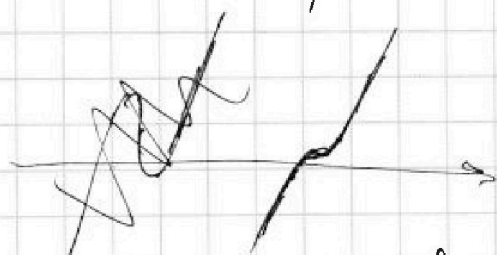
$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 3 - p = 0$$

$$\cos x = t, \quad t \in [-1; 1].$$

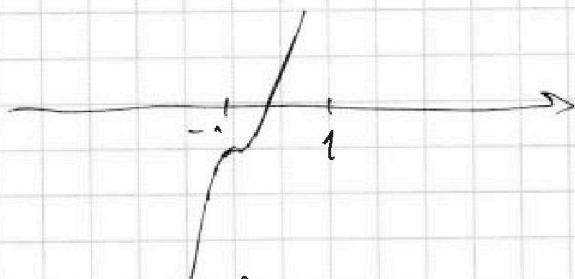
$$4t^3 - 6t^2 + 9t + 3 - p = 0$$

$$p = 4t^3 - 6t^2 + 9t + 3$$



$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + 3 \\ &= -\frac{5}{2} + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= 12t^2 - 12t + 9 = 3(4t^2 - 4t + 3) = 3(2t - 1)^2 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - 6 - 3 + 3 - p \leq 0 \\ 4 - 6 + 3 + 3 - p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \geq -10 \\ p \leq 4 \end{cases}$$

Ответ: $[-10; 4]$.