



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1, часть 1

Пусть это геометрическая прогрессия $\{a_n\}_9$ с начальным элементом a_1 и знаменателем q .

Тогда по условию задачи $a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$,

$$a_{12} = 2-x, \quad a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{12} = a_{11}q = a_{10}q^2$$

$$a_{18} = a_{10}q^8$$

Заметим, что $\frac{a_{10}^3 a_{18}}{a_{12}^4} = a_{10}^3 \cdot a_{10} q^8 = a_{10}^4 q^8 = (a_{10} q^2)^4 =$

$= a_{12}^4$. Подставим имеющиеся значения в равенство:

$$\left(\sqrt{(25x+34)(3x+2)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = (2-x)^4$$

$$\sqrt{\frac{(25x+34)^3 \cdot (3x+2)^3 \cdot (25x+34)}{(3x+2)^3}} = (2-x)^4$$

$$\sqrt{(25x+34)^4} = ((x-2)^2)^2$$

$$|(25x+34)^2| = (x^2 - 4x + 4)^2$$

$$(25x+34)^2 \geq 0 \Rightarrow |(25x+34)^2| = (25x+34)^2$$

$$(25x+34)^2 = (x^2 - 4x + 4)^2$$

$$(x^2 - 4x + 4 - 25x - 34)(x^2 - 4x + 4 + 25x + 34) = 0$$

$$(x^2 - 29x - 30)(x^2 + 21x + 38) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1, часть 2

$$(x+1)(x-30)(x+2)(x+19) = 0.$$

$$\begin{cases} x = -1; \\ x = 30; \\ x = -2; \\ x = -19; \end{cases}$$

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}. \text{ Корень неотрицателем } \Rightarrow a_{10} \geq 0.$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 \geq 0 \Rightarrow 2-x \geq 0.$$

$$\text{Но если } x=30, \text{ то } 2-x = 2-30 = -28 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=30$ не подходит.

$(25x+34)(3x+2)$ - подкоренное выражение, \Rightarrow оно неотрицательно, но при $x=-1$

$$(25x+34)(3x+2) = (34-25)(2-3) = -9 < 0 \Rightarrow x=-1$$

не подходит.

При $x=-2$

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{(-16) \cdot (-4)} = 8.$$

$$a_{12} = 2-x = 2-(-2) = 4$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = \sqrt{\frac{-16}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad a_{12} = a_{10} q^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, \quad a_{18} = a_{10} q^8 = 8 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^8 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. часть 3

Итак, для $x = -2$ такая геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел, существует.

При $x = -19$

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{(-475+34)(-55)} = \\ = \sqrt{441 \cdot 55} = 21\sqrt{55}$$

$$a_{12} = 2 - x = 2 - (-19) = 21$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = \sqrt{\frac{-441}{(-55)^3}} = \frac{21}{55\sqrt{55}}$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q = \sqrt{\frac{\sqrt{55}}{55}}$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 = 21\sqrt{55} \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{55}}\right)^2 = 21\sqrt{55} \cdot \frac{\sqrt{55}}{55} = 21$$

$$a_{18} = a_{10} q^8 = 21\sqrt{55} \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{55}}\right)^8 = 21\sqrt{55} \cdot \left(\frac{\sqrt{55}}{55}\right)^4 = 21\sqrt{55} \cdot \frac{1}{55^2} = \\ = \frac{21}{55\sqrt{55}}$$

Итак, для $x = -19$ такая геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел, существует.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = -19$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3, часть 1.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0.$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad | :4 \neq 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0.$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 1^3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$

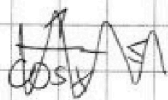
$$(p-1) \cos^3 x = -(\cos x + 1)^3 \quad | : \cos^3 x \neq 0$$

$$p-1 = -\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right)^3$$

$$1-p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

Найдём область значений функции $y = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \cos x \neq 0$$



Значит, $\frac{1}{\cos x} \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos x} \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty).$$

$y = x^3$ - возрастающая функция, поэтому



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3, часть 2

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; 0^3] \cup [2^3; +\infty), \text{ но есть}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$$

$$\text{Итак, } 1-p \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$$

$$-p \in (-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Итак, p может быть только из этого объединения. Но заметим, что если $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$,

~~то~~ и мы возьмем $t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$, то рассуждая

в обратном порядке, получим что $-1 \leq t \leq 1$,
(так как все преобразования были равносильными)

пусть $t \neq 0$. ($\sqrt[3]{1-p} - 1$ может стоять в знаменателе, так как $\sqrt[3]{1-p} = 1 \Leftrightarrow 1-p = 1 \Leftrightarrow p = 0$, но $p \neq 0$, так как мы взяли $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.)

Итак, $-1 \leq t \leq 1 \Rightarrow$ существует x такое, что

$$t = \cos x \Rightarrow \text{при этих и только при}$$

этих p уравнение имеет хотя бы одно решение



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. часть 3

Возьмём $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ и решим уравнение при данном p .

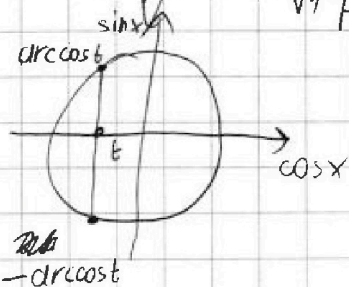
$$1-p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$$p \in \quad 1 + \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

Но мы знаем ранее, что такое x существуют. Пусть $\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} = t$, тогда



$$\begin{cases} x = \arccos t + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos t + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Итак, } x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: уравнение имеет хотя бы одно решение при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$. При данных p решением является

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

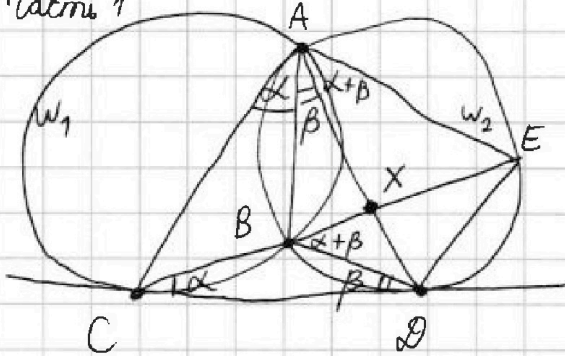


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. часть 1



Дано: окружности w_1 и w_2 ,

$w_1 \cap w_2 = A, B$, CD — общая

касательная к w_1 и w_2 ,

$C \in w_1, D \in w_2$; B ближе к CD ,

чем A ; $(CB) \cap w_2 = E$ и F .

$AD \cap CE = X$ (обозначим её так),

$CX : XE = 7 : 20$.

Найти: $ED : CD$.

Решение:

Пусть $\angle BCD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$.

CD касается $w_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAB = \angle DCB = \alpha$.

CD касается $w_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CDB = \beta$.

$\angle EBD$ — внешний для $\triangle CBD \Rightarrow \angle EBD = \angle BCD + \angle BDC =$

$= \alpha + \beta$.

$AEDB$ — вписанный $\Rightarrow \angle DAE = \angle DBE = \alpha + \beta = \angle CAB + \angle DAB =$

$= \angle CAD$.

CD касается $w_2 \Rightarrow \angle CDA = \angle DEA$.

Итак, $\triangle CDA \sim \triangle DEA$ по двум углам: $\angle CDA = \angle DEA$, $\angle CAD = \angle DAE$. Значит,

$\angle CDA = \angle DEA$, $\angle CAD = \angle DAE$. Значит,

$$\frac{ED}{CD} = \frac{DA}{CA} = \frac{EA}{DA} \Rightarrow \left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{ED}{CD} \cdot \frac{ED}{CD} = \frac{EA}{DA} \cdot \frac{DA}{CA} = \frac{EA}{CA}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. часть 2

По $\angle CAH = \alpha + \beta = \angle EAH \Rightarrow AH$ - биссектриса $\triangle CAE \Rightarrow$

\Rightarrow по свойству биссектрисы $\frac{EA}{CA} = \frac{EH}{CH} = \frac{1}{\frac{CH}{EH}} =$

$$= \frac{1}{\frac{7}{20}} = \frac{20}{7}$$

$$\text{Угол } \left(\frac{EH}{CH}\right)^2 = \frac{EA}{CA} = \frac{20}{7} \Rightarrow \left|\frac{EH}{CH}\right| = \sqrt{\frac{20}{7}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$

По EH и CH - длины отрезков $\Rightarrow \frac{EH}{CH} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\frac{EH}{CH}\right| = \frac{EH}{CH}$$

Ответ: ~~EH~~ $\frac{EH}{CH} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$



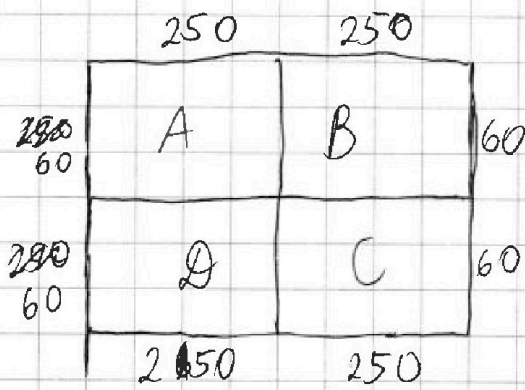
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы до каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5, часть 1.



Разделим прямоугольник средними линиями на 4 прямоугольника A, B, C, D на размерами 250×60 .

(названия прямоугольников, как на рисунке)

Посчитаем количество способов выбрать 8 клеток так, чтобы они были симметричны относительно горизонтальной средней линии.

Тогда в A и B примерно должно быть столько же клеток, сколько примерно в C и D, то есть по 4. Выберем 4 клетки из A и B, и тогда клетки, симметричные им относительно горизонтальной средней линии будут определяться однозначно и будут находиться в C и D \Rightarrow количество способов выбрать так 8 клеток = кол-во способов выбрать 4 клетки в A и B, то есть $C_{500-60}^4 = C_{30000}^4$, причем все эти способы различны.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5, часть 2.

Аналогично, столько же ^{различных} способов выбрать 8 клеток симметрично относительно вертикальной средней линии.

Если мы выберем 4 клетки в АБВ, то отразив ^{их} относительно центра прямоугольника, мы получим 4 клетки в СД, однозначно дополняющие те 4 клетки до симметричной относительно центра картинке \Rightarrow

\Rightarrow картинка ^и симметричная относительно центра, тоже C_{30000}^4 .

Итого $3 \cdot C_{30000}^4$ способов. Но некоторые из способов совпадают, так как картинки могут быть симметричны ~~относительно~~ по нескольким симметриям сразу.

Пусть картинка (выбор клеток) симметрична относительно и центра, и горизонтальной средней линии.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Значит, такие карточки почитают
3 раза вместо одного, а их

$$C_{600}^2$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. часть 1

$(a-c)(b-c) = p^2$, где p - простое число по условию задачи.

Так как p - простое, то $p \geq 2$, $p^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a-c$ и $b-c$ одного знака и $a-c \neq 0$, $b-c \neq 0$.

При этом $a, b, c \in \mathbb{Z}_* \Rightarrow a-c \in \mathbb{Z}$, $b-c \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 : (a-c)$, $p^2 : \cancel{b-c}$. Разберём варианты, чему может быть равно $(a-c)$.

1) $a-c = p^2 \Rightarrow b-c = 1$.

$$a = c + p^2 \quad b = c + 1$$

$p \geq 2 \Rightarrow c + p^2 > c + 1$, но $a < b$ по условию задачи $\Rightarrow a-c \neq p^2$.

2) $a-c = p \Rightarrow b-c = p$

$a = c + p = c + p = b$, но $a < b$ по условию задачи.

3) $a-c = -1 \Rightarrow b-c = -p^2$

$a = c - 1 > c - p^2 = b$, но $a < b$ по условию.

4) $a-c = -p \Rightarrow b-c = -p$

$a = c - p = c - p = b$, но $a < b$.

Итак, все эти 4 варианта не подходят.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. часть 2

p^2 имеет 3 натуральных делителя \Rightarrow 6 целых делителей \Rightarrow есть ещё 2 варианта. Разберём их:

• $a - c = 1 \Rightarrow b - c = p^2$ или • $a - c = -p^2, b - c = -1$

$a = c + 1 < c + p^2 = b$

$a = c - p^2 < c - 1 = b$

условие $a < b$ выполнено

условие $a < b$ выполнено.

$b - a = (c + p^2) - (c + 1) =$

$b - a = (c - 1) - (c - p^2) = p^2 - 1 \not\equiv 3$

$= p^2 - 1 \not\equiv 3$ по условию

по условию.

Итак, $p^2 - 1 \not\equiv_3 0$.

Если $p \equiv_3 1$, то $p^2 - 1 \equiv_3 1 \cdot 1 - 1 \equiv_3 0 \Rightarrow p \not\equiv_3 1$

Если $p \equiv_3 2$, то $p^2 - 1 \equiv_3 2 \cdot 2 - 1 \equiv_3 0 \Rightarrow p \not\equiv_3 2$.

Если $p \equiv_3 0$, то $p^2 - 1 \equiv_3 0 \cdot 0 - 1 \equiv_3 2 \neq 0$.

Значит, возможен только вариант $p = 3$.

Но p - простое $\Rightarrow p = 3$.

• $a = c + 1, b = c + 9$ или • $a = c - 9, b = c - 1$.

$a^2 + b = 1000$

$a^2 + b = 1000$

$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$

$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$

$c^2 + 3c = 990$

$c^2 - 17c = 920$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. *дасть 3*

$$c^2 + 3c = 990$$

или

$$c^2 - 17c = 920$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$(c - 30)(c + 33) = 0$$

$$(c - 40)(c + 23) = 0$$

$$\begin{cases} c = 30 \\ c = -33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 40 \\ c = -23 \end{cases}$$

$$c = -33$$

$$c = -23$$

Итак, мы получили 4-2 возможных значения c для каждого варианта. Проверим их.

1) $a = c + 1, b = c + 9, c = 30$

$$a = 31, b = 39, c = 30$$

$$a < b : 31 < 39$$

$$b - a \div 3 : 39 - 31 = 8 \div 3$$

$$(a - c)(b - c) = 1 \cdot 9 = 3^2$$

$$a^2 + b = 31^2 + 39 = 961 + 39 = 1000$$

2) $a = c + 1, b = c + 9, c = -33$

$$a = -32, b = -24, c = -33$$

$$a < b : -32 < -24$$

$$b - a \div 3 : (-24) - (-32) = 8 \div 3$$

$$(a - c)(b - c) = 1 \cdot 9 = 3^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б. часть 4

$$a^2 + b = (-32)^2 - 24 = 2^{10} - 24 = 1024 - 24 = 1000.$$

$$3) a = c - 9, b = c - 1, c = 40$$

$$(a = 31, b = 39, c = 40)$$

$$a < b : 31 < 39$$

$$b - a \div 3 : 39 - 31 = 8 \div 3$$

$$(a - c)(b - c) = (-9) \cdot (-1) = 9 = 3^2.$$

$$a^2 + b = 31^2 + 39 = 961 + 39 = 1000.$$

$$4) a = c - 9, b = c - 1, c = -23$$

$$(a = -32, b = -24, c = -23)$$

$$a < b : -32 < -24$$

$$b - a \div 3 : (-24) - (-32) = 8 \div 3$$

$$(a - c)(b - c) = (-9)(-1) = 9 = 3^2$$

$$a^2 + b = (-32)^2 - 24 = 1024 - 24 = 1000.$$

Итак, 4 найденные тройки подходят, все числа в них целые. Других троек нет.

Ответ: $a_1 = 31, b_1 = 39, c_1 = 30$

$$a_2 = -32, b_2 = -24, c_2 = -33$$

$$a_3 = 31, b_3 = 39, c_3 = 40$$

$$a_4 = -32, b_4 = -24, c_4 = -23$$



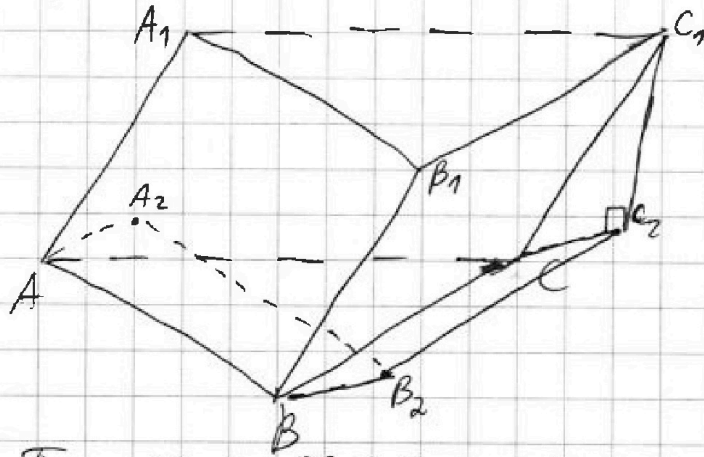
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7, часть 1.



Дано: призма $ABCA_1B_1C_1$,
 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ - равносторонние, $S_{ABC} = 4$,

$$S_{AA_1B_1B} = S_{BB_1C_1C} = 6, S_{AA_1C_1C} = 5.$$

Найти: $S_{ABCA_1B_1C_1}$.

Пусть $AB = x$, $BB_1 = y \Rightarrow AB = BC = AC = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = x$, $BB_1 = CC_1 = AA_1 = y$

$\triangle AA_1B_1B$ и $\triangle BB_1C_1C$ - параллелограммы \Rightarrow

$$\Rightarrow S_{AA_1B_1B} = S_{BB_1C_1C}$$

$$2 S_{\triangle ABB_1} = 2 S_{\triangle BB_1C}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle BB_1C}$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot BB_1 \cdot \sin \angle ABB_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B_1BC$$

$$\frac{xy}{2} \sin \angle ABB_1 = \frac{xy}{2} \sin \angle B_1BC; \frac{xy}{2} \neq 0$$

$$\sin \angle ABB_1 = \sin \angle B_1BC$$

По теореме синусов для треугольного угла

$$\triangle ABB_1C \quad \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle ABCB_1} = \frac{\sin \angle B_1BC}{\sin \angle B_1ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle ABCB_1 = \sin \angle CABB_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\cos \angle ABCB_1| = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ABCB_1} = \sqrt{1 - \sin^2 \angle CABB_1} = |\cos \angle CABB_1|$$

Спроецируем A_1, B_1, C_1 на (ABC) - получим точки A_2, B_2, C_2 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7, часть 2.

$$S_{AA_2B_2B} = S_{AA_1B_1B} |\cos \angle A_1ABC| = S_{BB_1C_1C} |\cos \angle ABCB_1| =$$

$$= S_{BB_2C_2C}, \text{ так как } S_{\text{ф.пр}} = S_{\text{ф}} \cos(\text{углы между плоскостями фигуры и плоскостью, на которую мы её проектируем}).$$

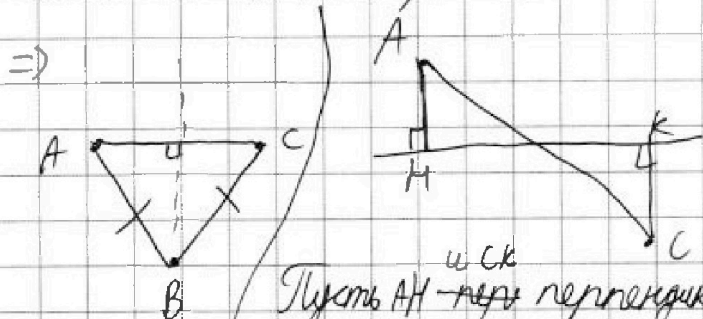
Итак, $S_{AA_2B_2B} = S_{BB_2C_2C}$

$$BB_2 \cdot \rho(A; BB_2) = BB_2 \cdot \rho(C; BB_2) \quad | : BB_2 \neq 0$$

Если $B_2 \equiv B$, то $BB_2 \perp (ABC) \Rightarrow$ все боковые грани прямоугольнички \Rightarrow площадь каждой из них равна xy , но в задаче площади боковых граней не различаются: $5; 6; 6 \neq$.

Итак, $\rho(A; BB_2) = \rho(C; BB_2)$, при этом все точки A, B, C, B_2 лежат в плоскости (ABC) .

• Если $AC \parallel BB_2$, то $AB = BC$ и $\rho(A; BB_2) = \rho(C; BB_2) \Rightarrow$



BB_2 содержит середину AC

Пусть $AH \perp BB_2 \Rightarrow AH = CK$ и $AH \parallel CK \Rightarrow AHCK$ - параллелограмм \Rightarrow середина $AC \equiv$ середина $HK \in BB_2$.
 BB_2 - серединный перпендикуляр к AC .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7, часть 3.

Значит, $BB_2 \perp AC$.

$B_1B_2 \perp (ABC)$

B_1B - наклонная

BB_2 - её проекция

$BB_2 \perp AC$

\Rightarrow по теореме о трёх перпендикулярах $B_1B \perp AC$.

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 \perp AC, CC_1 \perp AC \Rightarrow AA_1C_1C$ -

прямоугольник $\Rightarrow S_{AA_1C_1C} = xy = 5$.

Но $S_{ABB_1A_1} = 2S_{ABB_1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \sin \angle ABB_1 = xy \sin \angle ABB_1 = 5 \sin \angle ABB_1 \leq 5$, так как $\sin \angle ABB_1 \leq 1$. Но

$S_{ABB_1A_1} = 6$. Противоречие $\Rightarrow BB_2 \parallel AC$.

Так как AA_2, BB_2 и CC_2 - проекции равных и параллельных наклонных (AA_1, BB_1, CC_1) на (ABC) , то

AA_2, BB_2, CC_2 равны и параллельны.

Итак, $BB_2 \parallel AC, BB_2 \parallel AA_2, BB_2 \parallel CC_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_2 \parallel AC, CC_2 \parallel AC \Rightarrow A_2 \in AC, C_2 \in AC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

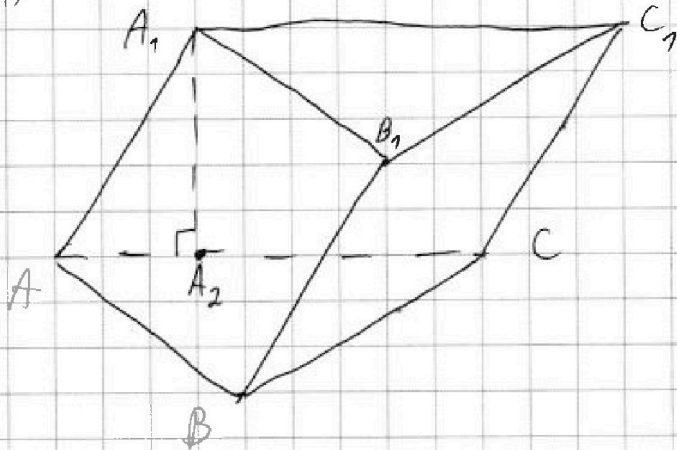


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7, часть 4.



Учтем, $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot A_1A_2 = 5 \Rightarrow A_1A_2 = \frac{5}{AC}$, где $\frac{5}{AC}$ — высота призмы.

A_1A_2 — высота призмы.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = 4$ по условию задачи
так как $\triangle ABC$ — равносторонний.

Учтем, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot A_1A_2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{4} x$,

где $\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt[4]{3}}$

$\frac{5\sqrt{3} \cdot x}{x \cdot \sqrt[4]{3}} = 5\sqrt[4]{3}$

Ответ: $V_{ABCA_1B_1C_1} = 5\sqrt[4]{3}$

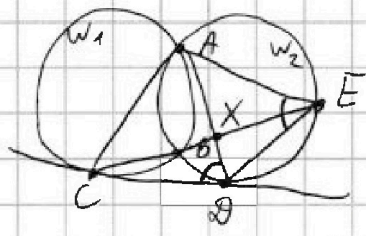


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2~~ ~~5~~ ~~7~~



$$\frac{CX}{EX} = \frac{7}{20} \quad CX = 7t \quad EX = 20t$$

$$CE = 27t$$

$$920 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23$$

$$a = c - 9$$

$$b = c - 1$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$990 = 10 \cdot 99 = 9 \cdot 11 \cdot 10$$

$$c(c-17) = 920$$

$$(a, b, c)$$

$$a < b$$

$$b \neq a$$

$$30 \cdot 33$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

- 1) p^2
- 2) p^2
- 3) p
- 4) -1
- 5) $-p$
- 6) $-p^2$

$$a = c + 1 \quad b = c + p^2$$

$$a = p^2 + c \quad b = c + 1 \quad a > b$$

$$a - c = p = b - c \Rightarrow a = b$$

$$d = c - 1 \quad b = c - p^2$$

$$a - c = -1$$

$$a - c - p = b - c \Rightarrow a = b$$

$$c^2 - 17c - 920 =$$

$$= (c - 40)(c + 23)$$

$$a = c + 1, b = c + p^2$$

$$! \cdot a = c - p^2, b = c - 1 !$$

$$|a - b| = p^2 - 1 \neq 0$$

$$p = 3$$

$$a = c + 1 \quad b = c + 9$$

$$c^2 + 3c - 9990 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 9990$$

$$9 \cdot 4441$$

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$$

$$c(c+3) = 9990 = 90 \cdot 111$$

$$\begin{array}{r} 910 \\ 1000 \\ 10 \\ \hline 9990 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 9990 \\ 4 \\ \hline 39960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39969 \mid 9 \\ \underline{-36} \\ 39 \\ \underline{-36} \\ 06 \\ \underline{-06} \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 67 \\ 167 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$65^2 =$$

$$4225$$

$$66^2 =$$

$$3600 + 720$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 = 2-x$$

$$a_{18} = a_{12} q^6 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{18} = a_{10} q^8$$

$$1) a_{10} \neq 0 \Rightarrow q^8 = \frac{a_{18}}{a_{10}} = \frac{\sqrt{25x+34}}{\sqrt{(3x+2)^3} \cdot \sqrt{25x+34} \cdot \sqrt{3x+2}} = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}}$$

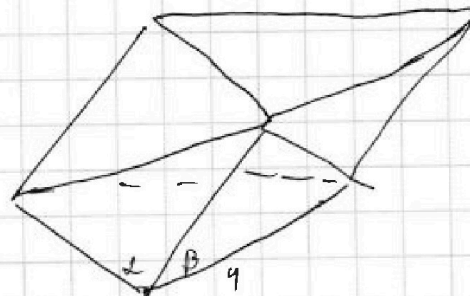
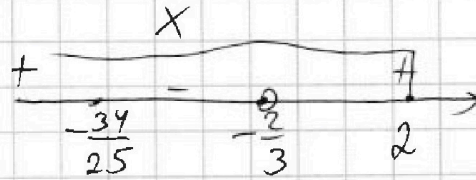
$$= \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$x \geq -6$$

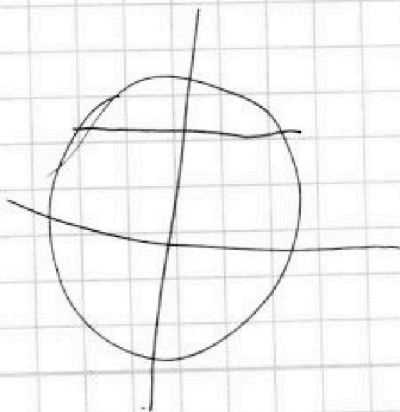
~~$$x+6$$~~

$$3 \geq x+2$$

$$y \geq 3x+x^2+2$$



$$\sin \alpha = \sin \beta$$



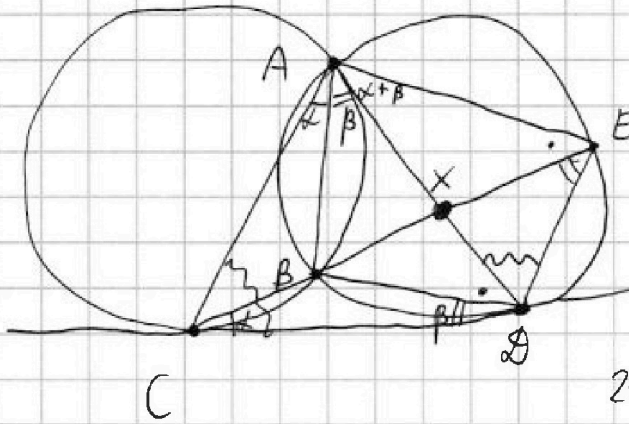


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{7}{20} = \frac{CX}{XE} = \frac{CA}{AE}$$

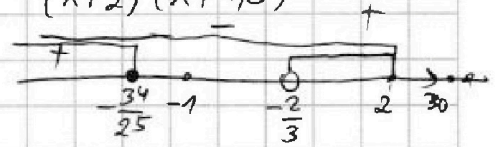
$$(X^2 - 29X - 30)$$

$$\cdot (X^2 + 21X + 38) = 0$$

$$(X+1)(X-30)$$

$$\cdot (X+2)(X+19)$$

$$2-X > 0$$



$$\frac{\sin \angle CAB}{\sin \angle EAB} = \frac{CA \cdot \sin \angle ABE}{BE \cdot \sin \angle AEB} = \frac{CA}{BE} \cdot \sin \angle$$

$$\triangle ACB \sim \triangle ABE$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AE} = \frac{CB}{BE}$$

$$X \neq -\frac{2}{3}$$

$$\frac{CB^2}{BE^2} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AE} = \frac{CX}{XE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{BE^2}{CB^2} = \frac{20}{7} \quad \frac{EB}{CB} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 19 \\ \hline 225 \\ 475 \\ \hline 475 \\ \hline 225 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$a_{10}$$

$$a_{12} = a_{10} q^2$$

$$a_{18} = a_{10} q^8$$

$$(a_{10})^3 a_{18} = a_{10}^4 q^8 = (a_{10} q^2)^4 = a_{12}^4$$

$$\begin{array}{r} 475 \\ -34 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$\frac{(25x+34)^3 (3x+2)^3 (25x+34)}{(3x+2)^3} = (25x+34)^2$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$(x^2 - 4x + 4 - 25x - 34)(x^2 - 4x + 4 + 25x + 34) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

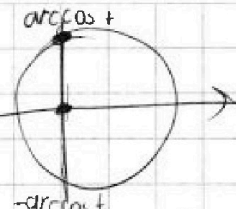
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$E \cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x + \cos x$$



$$p(\cos 3x + \cos x) + 6 \cos 2x + 2(p+6) \cos x + 10 = 0$$

$$2p \cos 2x \cos x + 6 \cos 2x + (2p+6) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$p(4 \cos^2 x - 2) \cos x$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}}$$

$$p(4 \cos^3 x - 2 \cos x) + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

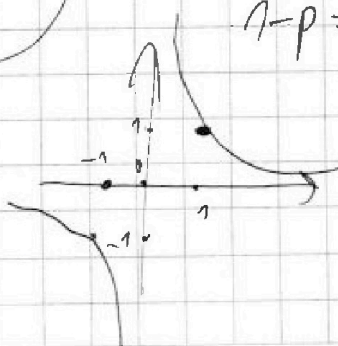
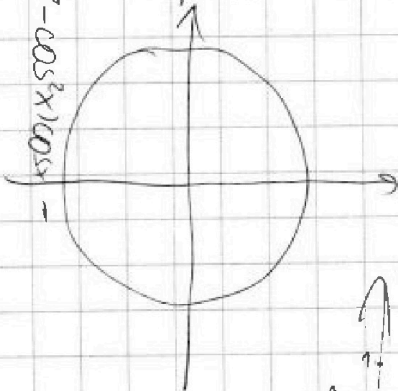
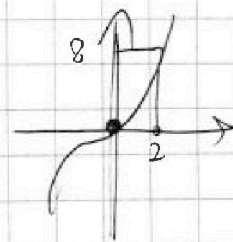
$$p-1 = -\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right)^3$$

$$p-1 = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$$1-p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$$\frac{1}{\cos x} \rightarrow \min$$

$$1-p \in (-\infty, -1) \quad p \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$$



$$1 + \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos x} \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$1-p \in (-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$$

$$\frac{1}{\cos x} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$-p \in (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$$



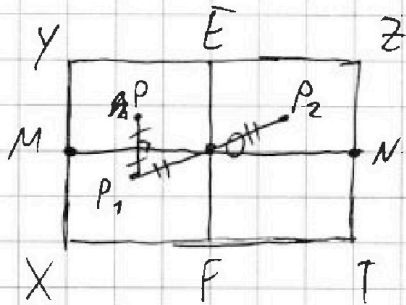
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5, часть 3.



Пусть прямоугольник $XUYZ$,

O - его центр, M - середина YZ .

MN - средняя линия, EF - средняя линия.

Пусть P - точка, $\neq O \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1$, симметричная P относительно MN , точка.

$\Rightarrow P_2$, симметричная P_1 относительно O , точка.

Значит, $\angle P_1OM = \angle MOR$, $\angle POE = 90^\circ - \angle MOR =$

$= \angle EON - \angle P_2ON = \angle EOP_2$, $PO = P_1O = OP_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_2$, симметричная относительно EF , точка.
Значит, \Downarrow

картинка симметрична относительно EF ,
тоже \Rightarrow относительно всех трех симметрий.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

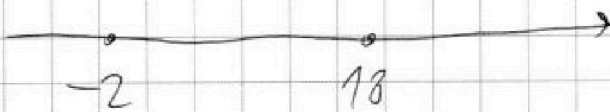
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$400 - z^2 = y^2 + 4y + 4 + 2y^2 - 72y + 648 + 41y^2 - 16y - 361$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 278 \\ 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$400 - z^2 = 3y^2 - 68y + 652 + 41y^2 - 16y - 361$$



При $y \in [-2; 18]$ $400 - z^2 = 3y^2 - 68y + 652 - \frac{4y^2 + 64y + 144}{252}$

$$0 = z^2 - y^2 - 4y + 396$$

$$z^2 - (y-2)^2 + 400$$

$$(y-2)^2 = z^2 + 400$$

$$\begin{array}{r} \cdot 10 \\ 252 \\ 144 \\ \hline 108 \end{array}$$

При $y \notin [-2; 18]$ ~~400~~

$$-z^2 = 3y^2 - 68y + 252 + 4y^2 - 64y - 144$$

$$0 = z^2 + 7y^2 - 132y + 108$$

~~1800~~ ~~1800~~ ~~1800~~ $\sqrt{(x+6)(3-x-2z)}$ = $\frac{2}{4y} - \frac{6}{2x} - \frac{2}{4x^2} + \frac{6^2}{z} - \frac{20}{4y}$

$$-28 \sqrt{y-3x-x^2+z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$250 \quad 250$
 $60 \quad 60$
 $60 \quad 60$

$250 \cdot 60 \cdot 2 \text{ пар}$
 $500 \cdot 60 \text{ пар}$

$3C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$

$4 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}$

$\frac{2\sqrt{3}}{4} = 4$
 $x = \sqrt{\frac{2016}{\sqrt{3}}}$
 $\frac{1}{2} x \cdot \frac{5}{x} \cdot \sin \alpha = 6$
 $\sin \alpha = \frac{12}{5}$

$\frac{S_{BCB}}{ACB} = \frac{\sin B \cdot BC \cdot BB}{\sin \alpha \cdot AC \cdot AB}$