МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\dfrac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$$p\cos 3x+6\cos 2x+3(p+4)\cos x+10=0$$
имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7:20$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:
   - $a<b$,
   - число $b-a$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a^2+b=1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

1, часть 1

Пусть это геометрическая прогрессия $\{a_n\}_q$ с начальным элементом a_1 и знаменателем q.

Тогда по условию задачи $a_{10}=\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$,

$a_{12}=2-x$, $a_{18}=\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

$a_{12}=a_{11}q=a_{10}q^2$

$a_{18}=a_{10}q^8$.

Заметим, что $\underline{a_{10}^3 a_{18}}=a_{10}^3\cdot a_{10}\cdot q^8=a_{10}^4 q^8=(a_{10}q^2)^4=$

$=\underline{a_{12}^4}$. Подставим имеющиеся значения в равенство

$$\left(\sqrt{(25x+34)(3x+2)}\right)^3\cdot\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}=(2-x)^4.$$

$$\sqrt{\frac{(25x+34)^3\cdot\cancel{(3x+2)^3}\cdot(25x+34)}{\cancel{(3x+2)^3}}}=(2-x)^4$$

$$\sqrt{(25x+34)^4}=((x-2)^2)^2$$

$$|(25x+34)^2|=(x^2-4x+4)^2$$

$(25x+34)^2\geq 0 \Rightarrow |(25x+34)^2|=(25x+34)^2$

$$(25x+34)^2=(x^2-4x+4)^2$$

$$(x^2-4x+4-25x-34)(x^2-4x+4+25x+34)=0$$

$$(x^2-29x-30)(x^2+21x+38)=0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1, часть 2

$(x+1)(x-30)(x+2)(x+19)=0.$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1; \\ x=30; \\ x=-2; \\ x=-19; \end{array}\right.$$

$a_{10}=\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$. Корень неотрицателен $\Rightarrow a_{10}\geq 0.$

$a_{12}=a_{10}q^2\geq 0 \Rightarrow \ 2-x\geq 0.$

Но если $x=30$, то $2-x=2-30=-28<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=30$ не подходит.

$(25x+34)(3x+2)$ – подкоренное выражение $\Rightarrow$ оно неотрицательно, но при $x=-1$

$(25x+34)(3x+2)=(34-25)(2-3)=-9<0 \Rightarrow x=-1$ не подходит.

При $x=-2$

$a_{10}=\sqrt{(25x+34)(3x+2)}=\sqrt{(-16)\cdot(-4)}=8.$

$a_{12}=2-x=2-(-2)=4$

$a_{18}=\sqrt{\dfrac{(25x+34)}{(3x+2)^3}}=\sqrt{\dfrac{(-16)}{(-4)^3}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $a_{12}=a_{10}q^2=8\cdot\frac{1}{2}=4$, $a_{18}=a_{10}q^8=8\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^8=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.$

1. часть 3

Итак, для $x=-2$ такая геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел, существует.

При $x=-19$

$$a_{10}=\sqrt{(25x+34)(3x+2)}=\sqrt{(-475+34)(-55)}=$$

$$=\sqrt{441\cdot 55}=21\sqrt{55}.$$

$$a_{12}=2-x=2-(-19)=21.$$

$$a_{18}=\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}=\sqrt{\frac{-441}{(-55)^3}}=\frac{21}{55\sqrt{55}}$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q=\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{55}}$$

$$a_{12}=a_{10}q^2=21\sqrt{55}\cdot\left(\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{55}}\right)^2=21\sqrt{55}\cdot\frac{\sqrt{55}}{55}=21.$$

$$a_{18}=a_{10}q^8=21\sqrt{55}\cdot\left(\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{55}}\right)^8=21\sqrt{55}\cdot\left(\frac{\sqrt{55}}{55}\right)^4=21\sqrt{55}\cdot\frac{1}{55^2}=$$

$$=\frac{21}{55\sqrt{55}}.$$

Итак, для $x=-19$ такая геометрическая прогрессия состоящая из действительных чисел, существует.

__Ответ__: $x_1=-2$, $x_2=-\cancel{2}19$.

3, часть 1.

$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$

$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 6(2\cos^2 x - 1) + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$

$4p\cos^3 x - \cancel{3p\cos x} + 12\cos^2 x - 6 + \cancel{3p\cos x} + 12\cos x + 10 = 0$

$4p\cos^3 x + 12\cos^2 x + 12\cos x + 4 = 0 \quad |:4 \neq 0$

$p\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$(p-1)\cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$

Если $\cos x = 0$, то $(p-1)\cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 1^3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$

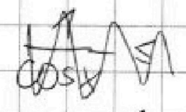
$(p-1)\cos^3 x = -(\cos x + 1)^3 \quad |: \cos^3 x \neq 0$

$$p - 1 = -\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right)^3$$

$$1 - p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

Найдём область значений функции $y = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$

$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \cos x \neq 0$



Значит, $\frac{1}{\cos x} \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos x} \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

$y = x^3$ – возрастающая функция, поэтому

3, часть 2

$$\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; 0^3] \cup [2^3; +\infty)$$, то есть

$$\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty).$$

Итак, $1-p \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$

$-p \in (-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$

$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

Итак, p может быть ~~только~~ из этого объединения. Но заметим, что если $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$, и мы возьмём $t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$, то рассуждая в обратном порядке получим что $-1 \le t \le 1$, (так как все переходы были равносильными) причём $t \ne 0$ ($\sqrt[3]{1-p} - 1$ может стоять в знаменателе, так как $\sqrt[3]{1-p} = 1 \Leftrightarrow 1-p = 1 \Leftrightarrow p = 0$, но $p \ne 0$, так как мы взяли $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

Итак, $-1 \le t \le 1 \Rightarrow$ существует x такой, что $t = \cos x \Rightarrow$ при этих и только при этих p уравнение имеет хотя бы одно решение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3. часть 3

Возьмём $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ и решим уравнение при данном p.

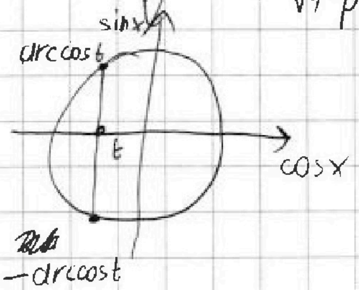
$$1-p=\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$$1+\frac{1}{\cos x}=\sqrt[3]{1-p}$$

$$\frac{1}{\cos x}=\sqrt[3]{1-p}-1$$

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$$

Но мы поняли ранее, что такое x существует. Пусть $\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}=t$, тогда



$$\left[\begin{array}{l} x=\arccos t+2\pi n,\ n\in Z \\ x=-\arccos t+2\pi m,\ m\in Z. \end{array}\right.$$

Итак, $x=\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right)+2\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: уравнение имеет хотя бы одно решение при $p\in(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$. При данных p решением является

$$x=\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right)+2\pi n,\ n\in Z.$$

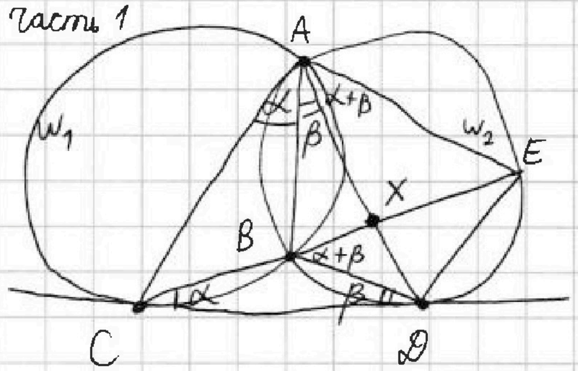
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4. часть 1



Дано: окружности w_1 и w_2, $w_1 \cap w_2 = A, B$, CD — общая касательная к w_1 и w_2, $C \in w_1$, $D \in w_2$; B ближе к CD, чем A; $(CB) \cap w_2 = B$ и E.

$AD \cap CE = X$ (обозначим её так), $CX : XE = 7 : 20$.

Найти: $ED : CD$.

Решение:

Пусть $\angle BCD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$.

CD касается w_1 =>

$\Rightarrow \angle CAB = \angle DCB = \alpha$.

CD касается w_2 =>

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CDB = \beta$.

$\angle EBD$ — внешний для $\triangle CBD \Rightarrow \angle EBD = \angle BCD + \angle BDC = \alpha + \beta$.

$AEDB$ — вписанный $\Rightarrow \angle DAE = \angle DBE = \alpha+\beta = \angle CAB + \angle DAB = \angle CAD$.

CD касается $w_2 \Rightarrow \angle CDA = \angle DEA$.

Итак, $\triangle CDA \sim \triangle DEA$ по двум углам: $\angle CDA = \angle DEA$, $\angle CAD = \angle DAE$. Значит,

$$\frac{ED}{CD} = \frac{DA}{CA} = \frac{EA}{DA} \Rightarrow \left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{ED}{CD}\cdot\frac{ED}{CD} = \frac{EA}{DA}\cdot\frac{DA}{CA} = \frac{EA}{CA}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4. часть 2

Но $\angle CAX = \alpha + \beta = \angle EAX \Rightarrow AX$ – биссектриса $\Delta CAE \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по свойству биссектрисы $\frac{EA}{CA} = \frac{EX}{CX} = \frac{1}{\frac{CX}{EX}} =$

$= \frac{1}{\frac{7}{20}} = \frac{20}{7}$.

Итак, $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{EA}{CA} = \frac{20}{7} \Rightarrow \left|\frac{ED}{CD}\right| = \sqrt{\frac{20}{7}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Но ED и CD – длины отрезков $\Rightarrow \frac{ED}{CD} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{ED}{CD}\right| = \frac{ED}{CD}$.

Ответ: $\cancel{ED}$ $\frac{ED}{CD} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$.

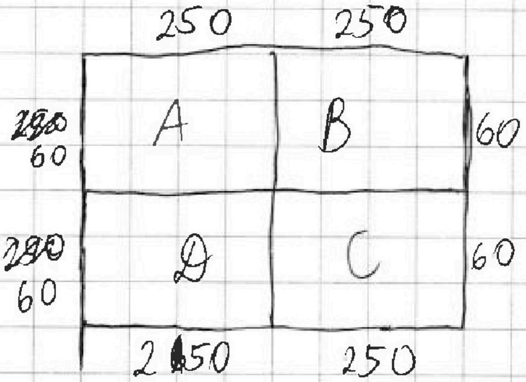
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5, часть 1.



Разделим прямоугольник средними линиями на 4 прямоугольника A, B, C, D ~~на~~ размером 250×60. (названия прямоугольников, как на рисунке)

Посчитаем количество способов выбрать 8 клеток так, чтобы они были симметричны относительно горизонтальной средней линии. Тогда в A и B суммарно должно быть столько же (выбранных) клеток, сколько суммарно в C и D, то есть по 4. Выберем 4 клетки из $A \cup B$, а тогда клетки, симметричные им относительно горизонтальной средней линии будут определяться однозначно и будут находиться в C и D $\Rightarrow$ количество ~~где~~ выбрать так 8 клеток = кол-во способов выбрать 4 клетки в $A \cup B$, то есть $C^4_{500\cdot 60} = C^4_{30000}$, причём все эти способы различны.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5, часть 2.

Аналогично, столько же различных способов выбрать 8 клеток симметрично относительно вертикальной средней линии.

Если мы выберем 4 клетки в A и B, то отразив их относительно центра прямоугольника, мы получим 4 клетки в C и D, однозначно дополняющие те 4 клетки до симметричной относительно центра картинки ⇒ ⇒ различных картинок, симметричных относительно центра, тоже C_{30000}^{4}.

Итого $3 \cdot C_{30000}^{4}$ способов. Но некоторые из способов совпадают, так как картинки могут быть симметричны ~~одно~~ по нескольким симметриям сразу.

Пусть картинака (выбор клеток) симметрична относительно и центра, и горизонтальной средней линии.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Значит, такие картинки посчитаны 3 раза вместо одного, а их

C^2_{600}.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6. часть 1

$(a-c)(b-c)=p^2$, где p - простое число по условию задачи.

Так как p - простое, то $p \geq 2$, $p^2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a-c$ и $b-c$ одного знака и $a-c\neq 0$, $b-c\neq 0$.

При этом $a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a-c \in \mathbb{Z}$, $b-c\in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 \vdots (a-c)$, $p^2 \vdots \cancel{p}\ b-c$. Разберём варианты, чему может быть равно $(a-c)$.

1) $a-c=p^2 \Rightarrow b-c=1$.

$a=c+p^2 \quad b=c+1$

$p\geq 2 \Rightarrow c+p^2>c+1$, но $a<b$ по условию задачи $\Rightarrow a-c\neq p^2$.

2) $a-c=p \Rightarrow b-c=p$

$a=c+p=c+p=b$, но $a<b$ по условию задачи.

3) $a-c=-1 \Rightarrow b-c=-p^2$

$a=c-1>c-p^2=b$, но $a<b$ по условию.

4) $a-c=-p \Rightarrow b-c=-p$

$a=c-p=c-p=b$ но $a<b$.

Итак, ~~а~~ эти 4 варианта не подходят.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6. часть 2

p^2 имеет 3 натуральных делителя => 6 целых делителей => есть ещё 2 варианта. Разберём их:

• $a-c=1 \Rightarrow b-c=p^2$ или • $a-c=-p^2,\ b-c=-1$

$a=c+1<c+p^2=b$ | $a=c-p^2<c-1=b$

условие $a<b$ выполнено | условие $a<b$ выполнено.

$b-a=(c+p^2)-(c+1)=$ | $b-a=(c-1)-(c-p^2)=p^2-1 \not\vdots 3$

$=p^2-1 \not\vdots 3$ по условию | по условию.

Итак, $p^2-1 \not\equiv_3 0$.

Если $p \equiv_3 1$, то $p^2-1 \equiv_3 1\cdot1-1 \equiv_3 0 \Rightarrow p \not\equiv_3 1$

Если $p \equiv_3 2$, то $p^2-1 \equiv_3 2\cdot2-1 \equiv_3 0 \Rightarrow p \not\equiv_3 2$.

Если $p \equiv_3 0$, то $p^2-1 \equiv_3 0\cdot0-1 \equiv_3 2 \neq 0$.

Значит, возможен только вариант $p \vdots 3$.

Но p - простое $\Rightarrow p=3$.

• $a=c+1,\ b=c+9$ или • $a=c-9,\ b=c-1$.

$a^2+b=1000$ | $a^2+b=1000$

$c^2+2c+1+c+9=1000$ | $c^2-18c+81+c-1=1000$

$c^2+3c=990$ | $c^2-17c=920$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6. часть 3

$c^2+3c=990$ или $c^2-17c=920$

$c^2+3c-990=0$ $c^2-17c-920=0$

$(c-30)(c+33)=0$ $(c-40)(c+23)=0$

$\left[\begin{array}{l} c=30 \\ c=-33 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} c=40 \\ c=-23 \end{array}\right.$

Итак, мы получили ~~4~~ 2 возможных значения c для каждого варианта. Проверим их.

1) $a=c+1$, $b=c+9$, $c=30$

$a=31$, $b=39$, $c=30$

$a<b$: $31<39$

$b-a \,\vdots\, 3$ $39-31=8 \,\not\vdots\, 3$

$(a-c)(b-c)=1\cdot 9=3^2$

$a^2+b=31^2+39=961+39=1000$

2) $a=c+1$, $b=c+9$, $c=-33$

$a=-32$, $b=-24$, $c=-33$

$a<b$: $-32<-24$

$b-a \,\vdots\, 3$ $(-24)-(-32)=8 \,\not\vdots\, 3$

$(a-c)(b-c)=1\cdot 9=3^2$

6. часть 4

$a^2+b = (-32)^2-24 = 2^{10}-24 = 1024-24 = 1000.$

3) $a=c-9$, $b=c-1$, $c=40$

$a=31$, $b=39$, $c=40$

$a<b$: $31<39$

$b-a \not\vdots 3$: $39-31=8 \not\vdots 3$

$(a-c)(b-c) = (-9)\cdot(-1) = 9 = 3^2.$

$a^2+b = 31^2+39 = 961+39 = 1000$

4) $a=c-9$, $b=c-1$, $c=-23$

$a=-32$, $b=-24$, $c=-23$

$a<b$: $-32<-24$

$b-a \not\vdots 3$: $(-24)-(-32) = 8 \not\vdots 3$

$(a-c)(b-c) = (-9)(-1) = 9 = 3^2$

$a^2+b = (-32)^2-24 = 1024-24 = 1000.$

Итак, 4 найденные тройки подходят, все числа в них целые. Других троек нет.

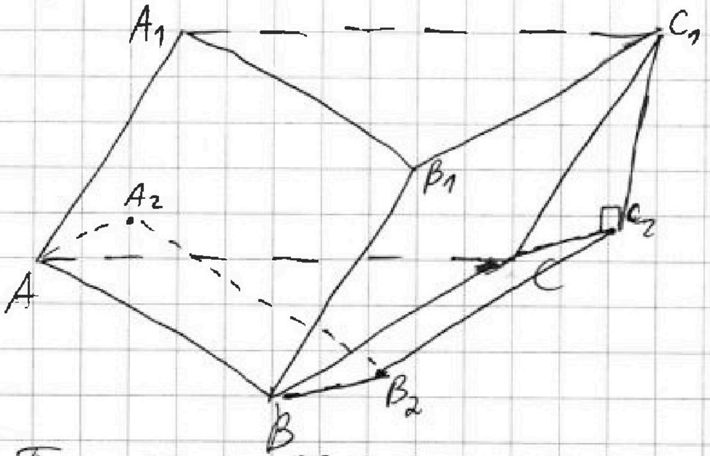
<u>Ответ:</u> $a_1=31$, $b_1=39$, $c_1=30$

$a_2=-32$, $b_2=-24$, $c_2=-33$

$a_3=31$, $b_3=39$, $c_3=40$

$a_4=-32$, $b_4=-24$, $c_4=-23$

7, часть 1.



Дано: призма $ABCA_1B_1C_1$, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ – равносторонние, $S_{ABC} = 4$, $S_{AA_1B_1B} = S_{BB_1C_1C} = 6$, $S_{AA_1C_1C} = 5$.

Найти: $S_{ABCA_1B_1C_1}$.

Решение:

Пусть $AB = x$, $BB_1 = y$ => $AB = BC = AC = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = x$, $BB_1 = CC_1 = AA_1 = y$

AA_1B_1B и BB_1C_1C – параллелограммы =>

$$\Rightarrow \underset{2S_{ABB_1}}{\underset{\parallel}{S_{AA_1B_1B}}} = \underset{2S_{BB_1C}}{\underset{\parallel}{S_{BB_1C_1C}}} \Rightarrow \underset{\frac{1}{2}AB\cdot BB_1\cdot \sin\angle ABB_1}{\underset{\parallel}{S_{ABB_1}}} = \underset{\frac{1}{2}AB BC\cdot BB_1\cdot \sin\angle B_1BC}{\underset{\parallel}{S_{BB_1C}}}$$

$$\frac{xy}{2}\sin\angle ABB_1 = \frac{xy}{2}\sin\angle B_1BC \,\Big|:\frac{xy}{2}\neq 0$$

$$\sin\angle ABB_1 = \sin\angle B_1BC.$$

По теореме синусов для трёхгранного угла BAB_1C

$$\frac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle ABCB_1} = \frac{\sin\angle B_1BC}{\sin\angle B_1ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\angle ABCB_1 = \sin\angle CABB_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\cos\angle ABCB_1| = \sqrt{1-\sin^2\angle ABCB_1} = \sqrt{1-\sin^2\angle CABB_1} = |\cos\angle CABB_1|$$

Спроецируем A_1, B_1, C_1 на (ABC) – получим точки A_2, B_2, C_2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7, часть 2.

$S_{AA_2B_2B} = S_{AA_1B_1B}|\cos\angle B_1ABC| = S_{BB_1C_1C}|\cos\angle ABCB_1| =$

$= S_{BB_2C_2C}$, так как $S_{ф.пр} = S_ф \cos$(угол между плоскостями фигуры и плоскости, на которую мы её проецируем).

Итак, $S_{AA_2B_2B} = S_{BB_2C_2C}$

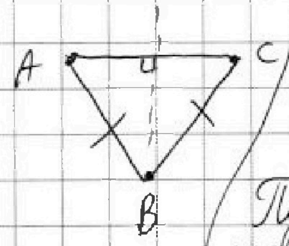
$BB_2 \cdot \rho(A; BB_2) = BB_2 \cdot \rho(C; BB_2) \quad | : BB_2 \neq 0$

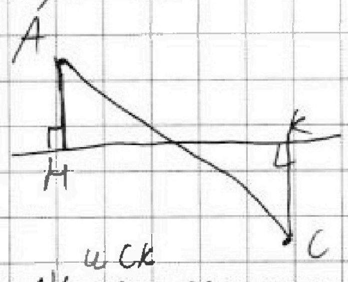
Если $B_2 \equiv B$, то $BB_2 \perp (ABC) \Rightarrow$ все боковые грани — прямоугольники $\Rightarrow$ площадь каждой из них равна xy, но в задаче площади боковых граней ~~не~~ различаются: 5; 6; 6.

Итак, $\rho(A; BB_2) = \rho(C; BB_2)$, причём все точки A, B, C, B_2 лежат в плоскости (ABC).

• Если $AC \nparallel BB_2$, то $AB = BC$ и $\rho(A; BB_2) = \rho(C; BB_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$





Пусть AH и CK — перпендикуляры на $BB_2 \Rightarrow AH = CK$ и $AH \parallel CK \Rightarrow AHCK$ — параллелограмм $\Rightarrow$ середина $AC \equiv$ $\equiv$ середина $HK \in BB_2$.

$\Downarrow$

BB_2 содержит середину AC

$\Downarrow$

BB_2 — серединный перпендикуляр к AC.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7, часть 3.

Значит, $BB_2 \not\perp AC$.

$B_1B_2 \perp (ABC)$

B_1B – наклонная

BB_2 – её проекция

$BB_2 \perp AC$

$\Rightarrow$ по теореме о трёх перпендикулярах $B_1B \perp AC$.

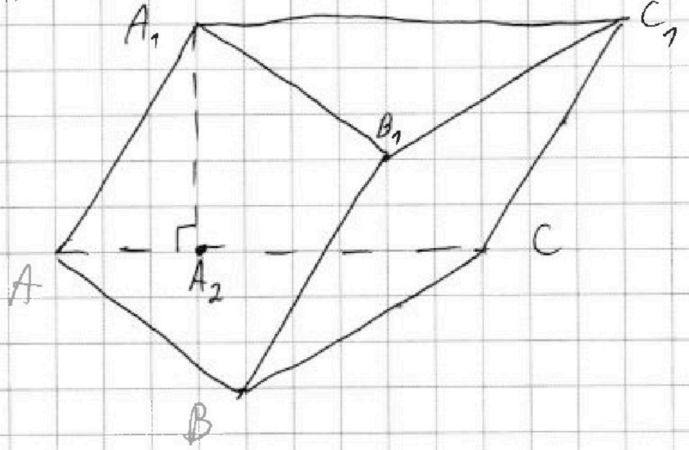
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 \perp AC,\ CC_1 \perp AC \Rightarrow AA_1C_1C$ – прямоугольник $\Rightarrow S_{AA_1C_1C} = xy = 5$.

Но $S_{ABB_1A_1} = 2S_{ABB_1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \sin\angle ABB_1 = xy\sin\angle ABB_1 = 5\sin\angle ABB_1 \leq 5$, так как $\sin\angle ABB_1 \leq 1$. Но $S_{ABB_1A_1} = 6$. Противоречие $\Rightarrow BB_2 \parallel AC$.

Так как AA_2, BB_2 и CC_2 – проекции равных и параллельных наклонных (AA_1, BB_1, CC_1) на (ABC), то AA_2, BB_2, CC_2 равны и параллельны.

Итак, $BB_2 \parallel AC$, $BB_2 \parallel AA_2$, $BB_2 \parallel CC_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AA_2 \parallel AC$, $CC_2 \parallel AC \Rightarrow A_2 \in AC$, $C_2 \in AC$.

7, часть 4.



Итак, $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot A_1A_2 = 5 \Rightarrow A_1A_2 = \frac{5}{AC} = \frac{5}{x}$, причём A_1A_2 – высота призмы.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4$ по условию задачи

так как $\triangle ABC$ – равносторонний.

Итак, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot A_1A_2 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{4}x$,

где $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt[4]{3}}$

$\frac{5\sqrt{3} \cdot x}{x \cdot \sqrt[4]{3}} = 5\sqrt[4]{3}$

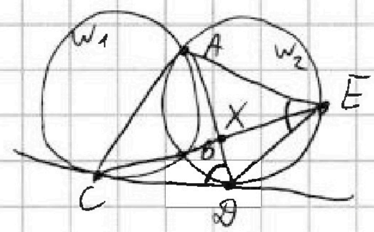
Ответ: $V_{ABCA_1B_1C_1} = 5\sqrt[4]{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~1~~ 2 ~~3~~ ~~4~~ 5 ~~6~~ ~~7~~



$\frac{CX}{EX} = \frac{7}{20}$ $CX = 7t$ $EX = 20t$ $CE = 27t$

~~920~~

$a = c - 9$
$b = c - 1$

$a^2 + b$

$920 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23$

$990 = 10 \cdot 99 = 9 \cdot 11 \cdot 10$

$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$

$c(c-17) = 920$

$(a; b; c)$

$a < b$

$b \not\vdots_3 a$

$30 \cdot 33$

$(a-c)(b-c) = p^2$

1) 1 p^2 $a = c+1$ $b = c + p^2$

~~2)~~ p^2 1 $a = p^2 + c$ $b = c+1$ $a > b$

~~3)~~ p p $a - c = p = b - c \Rightarrow a = b$

$a = c - 1$ $b = c - p^2$ $c - 1 < a$

~~4)~~ -1 $-p^2$ $a - c = -1$

~~5)~~ $-p$ $-p$ $a - c = -p = b - c \Rightarrow a = b$

6) $-p^2$ -1

$c^2 - 17c - 920 = (c - 40)(c + 23)$

• $a = c+1$, $b = c + p^2$!

• $a = c - p^2$, $b = c - 1$!

$|a - b| = p^2 - 1 \not\vdots_3 0$

67×67: 469, 402, 4489

$p \vdots 3$

$c^2 + 3c - 9990 = 0$

$D = 9 + 4 \cdot 9990$

$9 \cdot 4441$

$a = c + 1$ $b = c + 9$

$1000 - 10 = 990$

$9990 \times 4 = 39960$

~~67×67~~

$(a-c)(b-c) = 9$.

$a^2 + b = 1000$

$39969 : 9 = 4441$

$65^2 = 4225$

$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$

$c(c+3) = 9990 = 90 \cdot 111 = 99$

$66^2 -$

$3600 + 720$

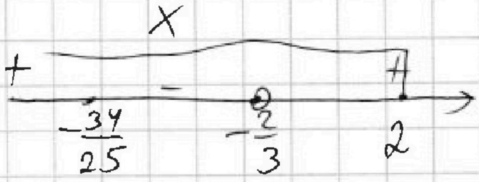
На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$



$a_{12} = a_{10} q^2 = 2-x$

$a_{18} = a_{12} q^6 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$

$a_{18} = a_{10} q^8$

1) $a_{10} \neq 0 \Rightarrow q^8 = \frac{a_{18}}{a_{10}} = \frac{\cancel{\sqrt{25x+34}}}{\sqrt{(3x+2)^3}\cdot\cancel{\sqrt{25x+34}}\cdot\sqrt{3x+2}} = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} =$

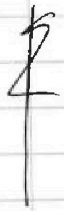
$= \frac{1}{(3x+2)^2}$

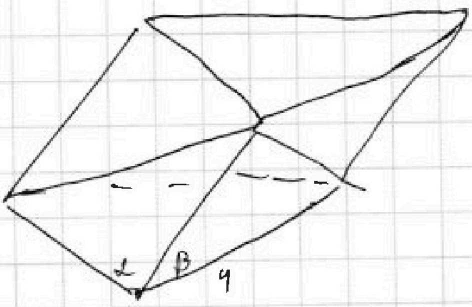
$x \geqslant -6$

$\cancel{x+6}$

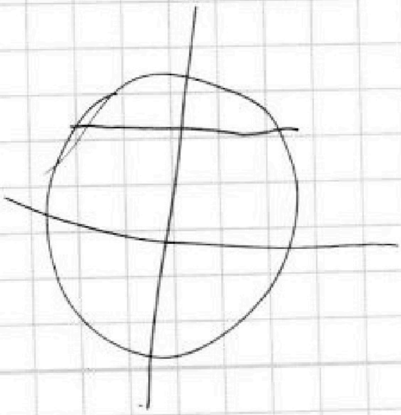
$3 \geqslant x+2z$

$y \geqslant 3x+x^2+z$





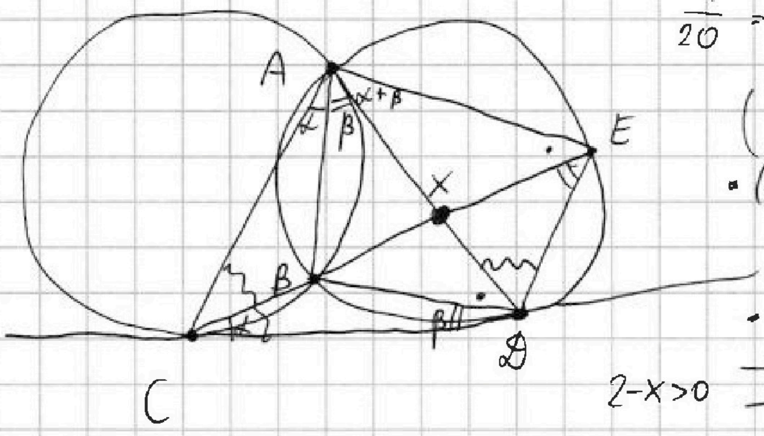
sinα = sin β



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\frac{7}{20} = \frac{CX}{XE} = \frac{CA}{AE}$

$(x^2-29x-30)\cdot$

$\cdot(x^2+21x+38)=0$

$(x+1)(x-30)\cdot$

$\cdot(x+2)(x+19)$

$2-x>0$

$-\frac{34}{25}$ -1 $-\frac{2}{3}$ 2 30

$1 = \frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle EAD} = \frac{CD\cdot\sin\angle ABE}{DE\cdot\sin\angle AED} = \frac{CD}{DE}\cdot\sin\angle$

$\triangle ACD \sim \triangle ADE$

$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$

$x \neq -\frac{2}{3}$

$\frac{CD^2}{DE^2} = \frac{AC}{\cancel{AD}}\cdot\frac{\cancel{AD}}{AE} = \frac{AC}{AE} = \frac{CX}{XE} = \frac{7}{20}$

$\frac{DE^2}{CD^2} = \frac{20}{7}$ $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 19 \\ \hline 225 \\ 25 \\ \hline 475 \end{array}$

a_{10} $a_{12} = a_{10}q^2$ $a_{18} = a_{10}q^8$

$(a_{10})^3 a_{18} = a_{10}^4\cdot q^8 = (a_{10}q^2)^4 = a_{12}^4$

$\begin{array}{r} 475 \\ -34 \\ \hline 441 \end{array}$

$\cancel{\sqrt{\frac{(25x+34)^3(3x+2)^3(25x+34)}{(3x+2)^3}}} = (25x+34)^2$

$(2-x)^4 = (25x+34)^2$

$(x^2-4x+4-25x-34)(x^2-4x+4+25x+34)=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

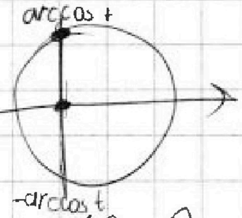
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$3p+12$

$x=\frac{\pi}{2}$ $\quad \cos 3x+\cos x = 2\cos 2x\cos x$



$p(\cos 3x+\cos x)+6\cos 2x+2(p+6)\cos x+10=0$

$2p\cos 2x\cos x+6\cos 2x+2(p+6)\cos x+10=0$

$\cos 2x = 2\cos^2 x-1$

$1+\frac{1}{\cos x}=\sqrt[3]{1-p}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$

$p(4\cos^2 x-2)\cos x$

$p(4\cos^3 x-3\cos x)+12\cos^2 x-6+3p\cos x+$

$1+\frac{1}{t}=\sqrt[3]{1-p}$

$+12\cos x+10=$

$\cos 3x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=$

$=(2\cos^2 x-1)\cos x-2\sin^2 x\cos x=$

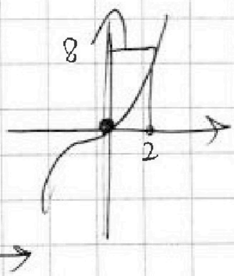
$=2\cos^3 x-\cos x-2(1-\cos^2 x)\cos x=$

$=4\cos^3 x-3\cos x$

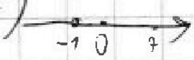
$=4p\cos^3 x+12\cos^2 x+12\cos x+4=0$

$p\cos^3 x+3\cos^2 x+3\cos x+1=0$

$(p-1)\cos^3 x+(\cos x+1)^3=0$



$p-1=-\left(\frac{\cos x+1}{\cos x}\right)^3$



~~$p-1=($~~

$1+\frac{1}{\cos x}=\sqrt{2}$

$1+\frac{1}{\cos x}\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$

$1-p=\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3=2\sqrt{2}$

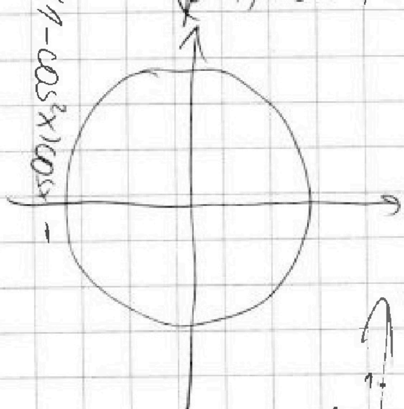
$1-p\in(-\infty;0]\cup[8;+\infty)$

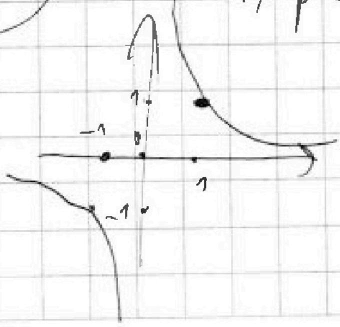
$\frac{1}{\cos x}\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$

$1+\frac{1}{\cos x}\to\min$

$-p\in(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$

$1-p\in(-\infty;-1)$ $\quad p\in(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$





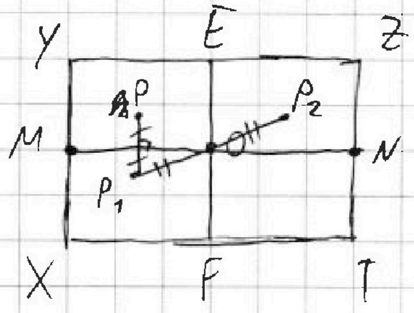
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5, часть 3.



Пусть прямоугольник XYZT, O — его центр, ~~A — серед~~ MN — горизонт. средняя линия, EF — вертик. средняя линия. Пусть P — выбрана ⇒

⇒ P_1, симметричная P относительно MN, выбрана ⇒

⇒ P_2, симметричная P_1 относительно O, выбрана.

Значит, $\angle P_1OM = \angle MOP$, $\angle POE = 90^\circ - \angle MOP = \angle EON - \angle P_2ON = \angle EOP_2$, $PO = P_1O = OP_2$ ⇒

⇒ P_2, симметричная относительно EF, выбрана, причём это для каждой выбранной точки. ~~Значит,~~

⇓

картинка симметрична относительно EF тоже ⇒ относительно всех трёх симметрий.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

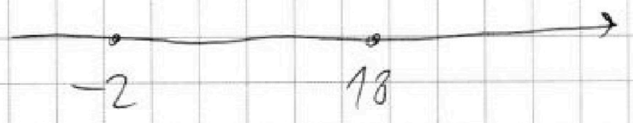
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$400 - z^2 = y^2 + 4y + 4 + 2y^2 - 72y + 648 +$

$+ 41y^2 - 16y - 361$

$\times 18$
18
144
18
324

$400 - z^2 = 3y^2 - 68y + 652 + 41y^2 - 16y - 361$



252

При $y \in [-2; 18]$ $\cancel{400} - z^2 = 3y^2 - 68y + \cancel{652} - 4y^2 + 64y +$

$+144$

$0 = z^2 - y^2 - 4y + 396$

$\cdot 10$
252
$- 144$
108

$z^2 - (y-2)^2 + 400$

$(y-2)^2 = z^2 + 400$

При $y \notin [-2; 18]$ $\cancel{400}$

$-z^2 = 3y^2 - 68y + 252 + 4y^2 - 64y - 144$

$0 = z^2 + 7y^2 - 132y + 108$

$\cancel{x + 6 \cdot 3 - x - 2z} + A\sqrt{(x+6)(3-x-2z)} = 4y - \overset{6}{\cancel{12}}x - \overset{2}{\cancel{4}}x^2 + \overset{2}{\cancel{8}}z + \overset{20}{\cancel{40}} -$

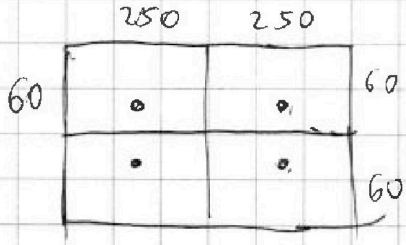
$-\overset{14}{\cancel{28}}\sqrt{y - 3x - x^2 + z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

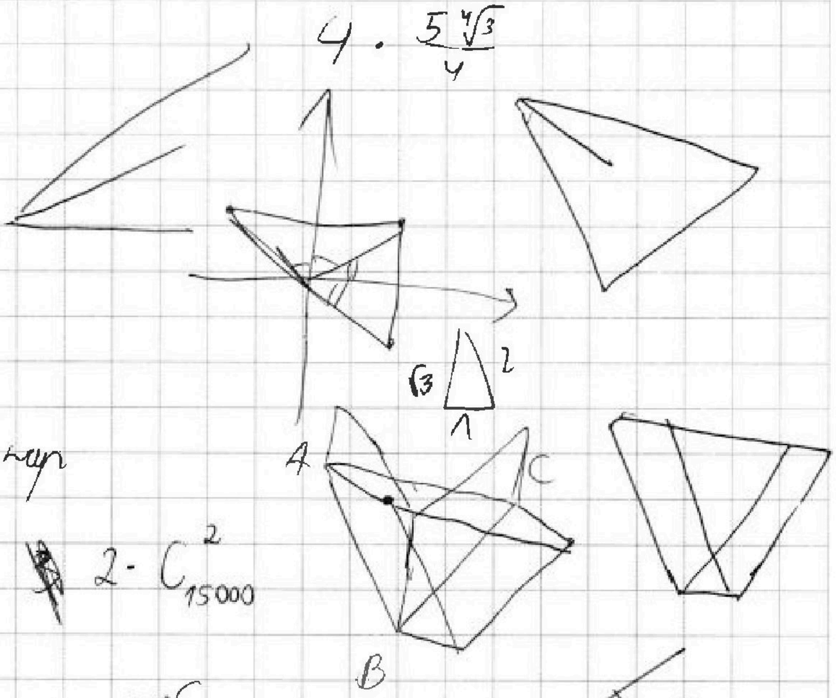
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



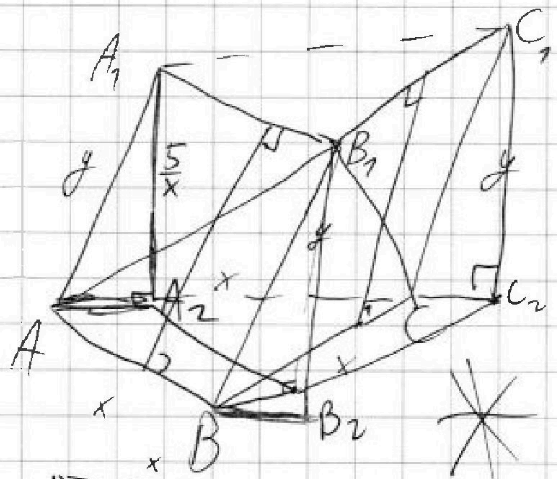
$4\cdot\frac{5\sqrt[4]{3}}{4}$



250·60·2 пар

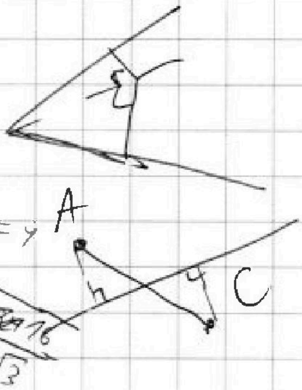
500·60 пар

$3C^{4}_{30000} - 2\cdot C^{2}_{15000}$



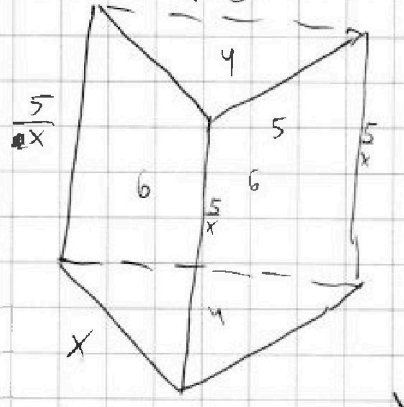
$\frac{2\sqrt8}{4} = 4$

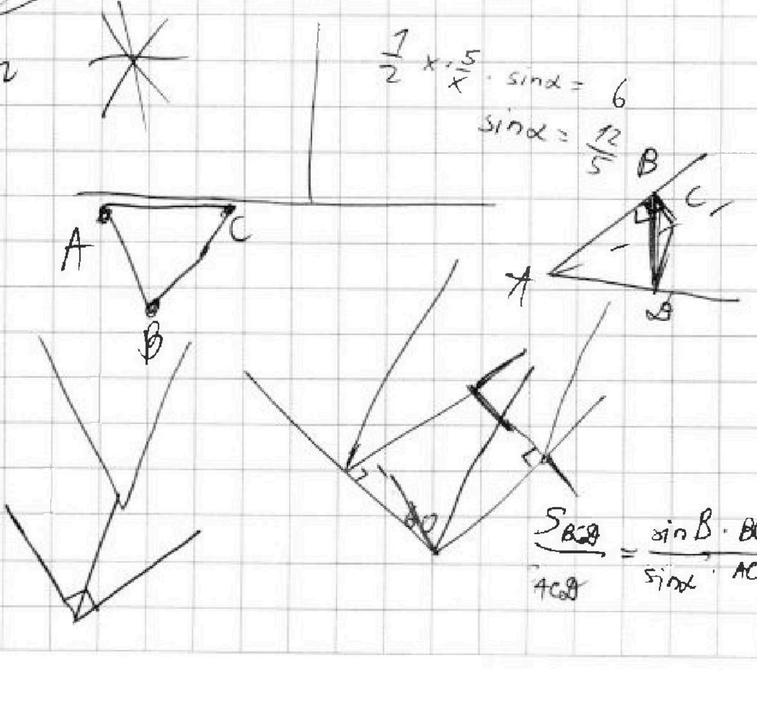
$x = \sqrt{\frac{16}{\sqrt3}}$



$\frac12 x\cdot\frac5x\cdot\sin\alpha = 6$

$\sin\alpha = \frac{12}{5}$





$\frac{S_{BCD}}{S_{ACD}} = \frac{\sin B\cdot BC\cdot BD}{\sin\alpha\cdot AC\cdot AB}$